This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

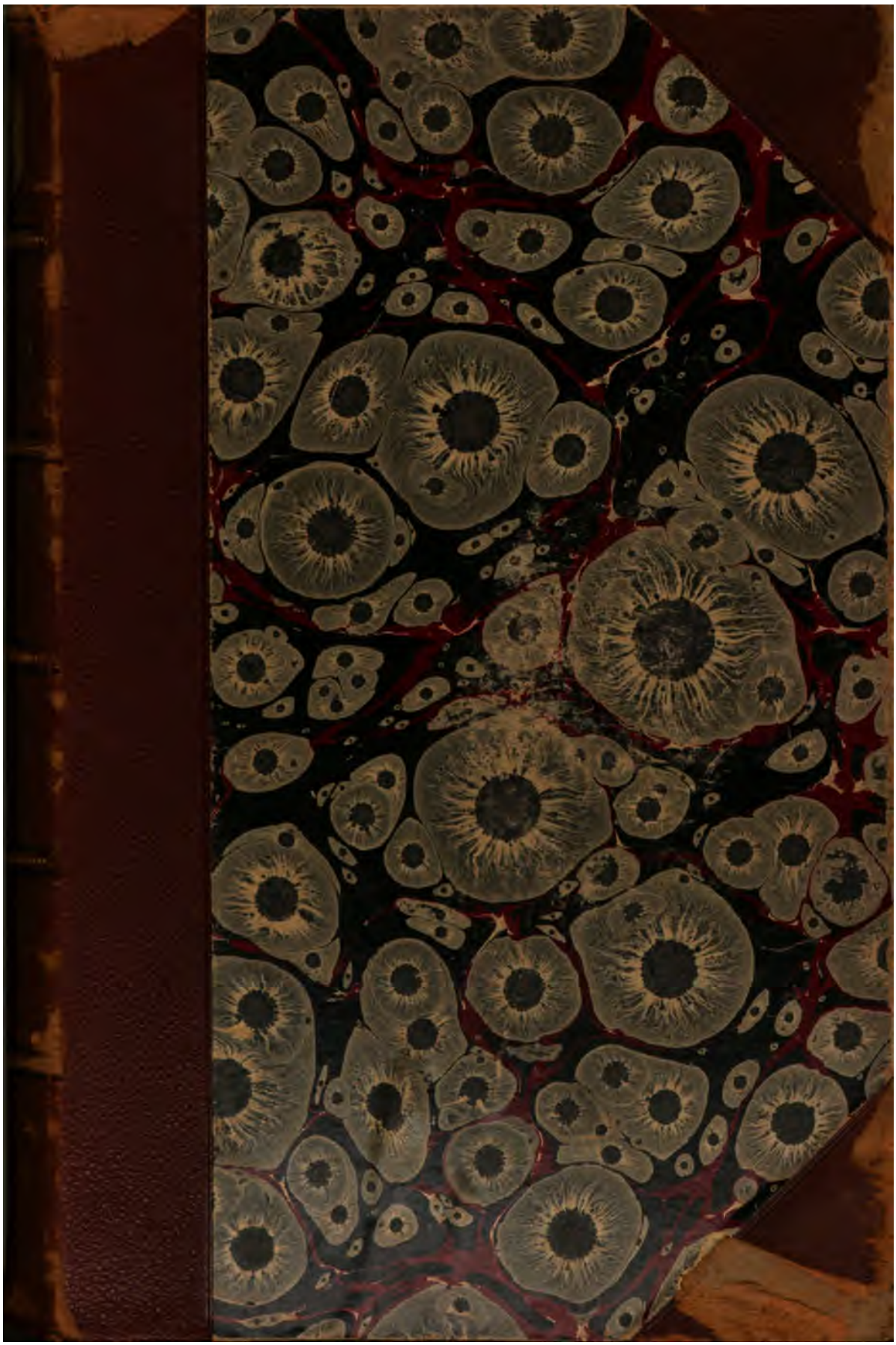
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

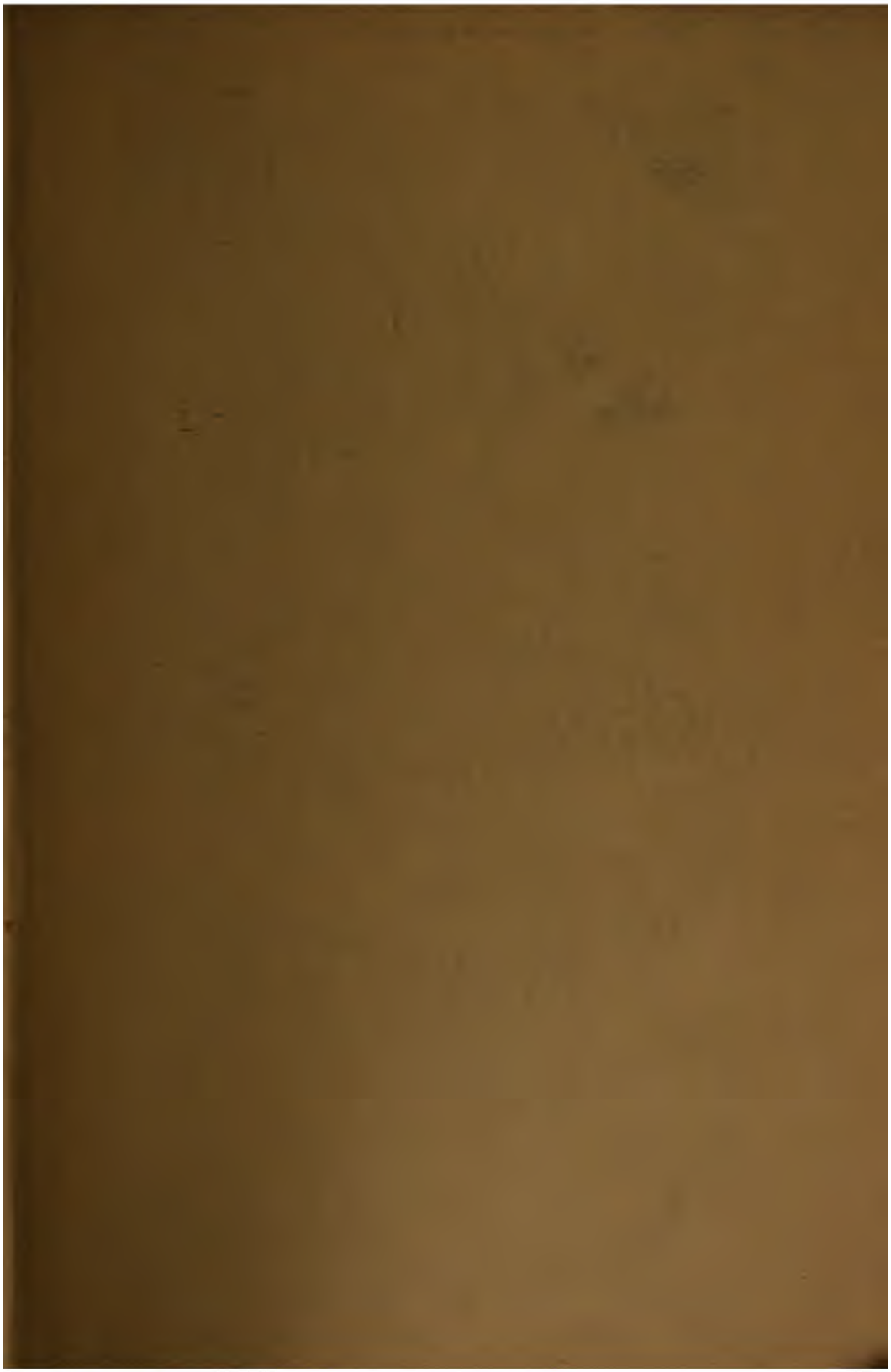


SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5708.83.2

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

21 Oct., 1896.

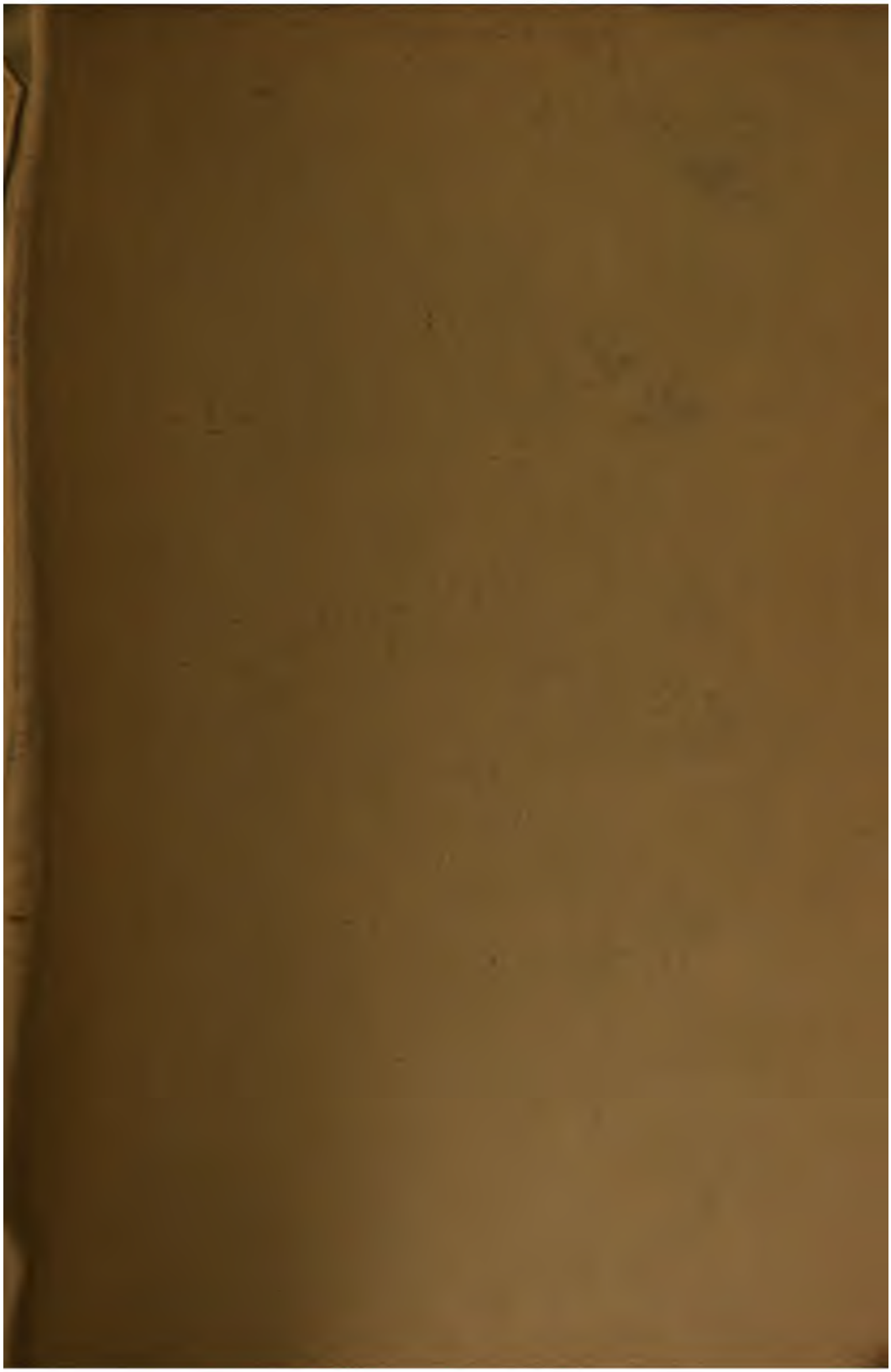


SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5708.83.2

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

21 Oct., 1896.



DIE

DARSTELLENDE GEOMETRIE

IN

ORGANISCHER VERBINDUNG

MIT DER

GEOMETRIE DER LAGE.

VON

Dr. WILHELM FIEDLER.

DRITTE ERWEITERTE AUFLAGE.

III. THEIL.

DIE CONSTRUIERENDE UND ANALYTISCHE GEOMETRIE DER LAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

DIE

CONSTRUIERENDE UND ANALYTISCHE

GEOMETRIE DER LAGE.

FÜR VORLESUNGEN UND ZUM SELBSTSTUDIUM

VON

DR. WILHELM FIEDLER.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

~~VI. 9127~~

Math 5708.83.2

HARVARD COLLEGE
OCT 21 1896
LIBRARY.

Bowen Fund.

Vorrede.

Auch in diesem dritten und letzten Theile hat mein Buch für diese neue Auflage ohne Aenderung seines Planes eine grosse Erweiterung und Vervollständigung erfahren. Es wollte von Anfang an eine Einführung in die darstellende, projectivische und analytische Geometrie nach ihrer organischen Verbindung sein, und nur diesem Zwecke dienen auch die hier durchgeführten Erweiterungen.

Die Gliederung in drei Abschnitte und der sachliche Umfang derselben ist geblieben: A. Die von den Voraussetzungen der Elementargeometrie unabhängige und strenge Begründung der Projectivität, mit Einschluss der imaginären Elemente (§§ 1—13); auf Grund dessen und unter alleiniger Verwendung der fundamentalen Doppelverhältnissrelationen die Entwickelung der projectivischen Coordinaten für alle Stufen (§§ 14—27) mit allen ihren speciellen Formen (regulären, prismatischen, Keil- und Streifen-Coordinaten); schliesslich die geometrische Deutung homogener Gleichungen zwischen solchen Coordinaten (§§ 28—36) und ihre lineare Bestimmung.

B. Die Parameter und die Projectivität (§§ 37—41); die Erzeugnisse der projectivischen Elementargebilde erster Stufe (§§ 42—44); die projectivische Verbindung derselben mit Elementargebilden und unter einander, und die Erweiterung der Projectivität in der Ebene auf die Fläche zweiten Grades (§§ 45—48); die geometrische Deutung linearer Parameter in Gleichungen zweiten Grades und die Projectivität von linearen Gebilden aus Curven und Flächen zweiten Grades mit Elementargebilden und unter einander, nebst deren Erzeugnissen in besonderer Beziehung auf die Raumcurve vierter Ordnung erster Art und deren Centralprojectionen, die allgemeine Curve dritter Ordnung und die Curve vierter Ordnung mit zwei

Doppelpunkten (§§ 49—58); letzteres speciell in §§ 52—56 mit den Grundlagen der Construction der Steiner'schen Polygone; endlich die Deutung des linearen Parameters in Gleichungen beliebiger Grade, die Projectivität und ihre Erzeugnisse für lineare Gebilde überhaupt mit den Elementen der allgemeinen Polarentheorie (§§ 59—61) und der Ableitung der Plücker'schen Relationen.

C. Die Lehre von den projectivischen Elementargebilden zweiter und dritter Stufe, beginnend mit den linearen Substitutionen und den Elementen der Invariantentheorie (§§ 62—68); dann die Collineation und die Reciprocität der Elementargebilde zweiter Stufe nebst den Erzeugnissen ihrer Verbindung in Curven und Developpabeln dritten und Flächen zweiten Grades und in Polarsystemen (§§ 69—79); ebenso die Collineation und Reciprocität der Elementargebilde dritter Stufe mit Polarsystem und Nullsystem (§§ 80—86); endlich die Flächen dritter Ordnung aus drei collinearen Bündeln und der Ausblick auf andere Verbindungen und Erweiterungen des Entwickelten (§§ 87, 88).

Das Buch giebt die Geometrie der Lage in sich selbständig, wenn schon sie aus den darstellend geometrischen Untersuchungen des ersten und zweiten Bandes hervorgewachsen ist; diesen gegenüber erscheint die vorliegende Entwickelung als eine zweite Stufe. „Das Studium der projectivischen Eigenschaften, das der darstellenden Geometrie unentbehrlich ist, weil nur mit ihm aus dem Bilde sich die Formeigenschaften des Originals erkennen lassen, wird nun zum Studium der Raumformen durch Vergleichung derselben mit Abbildern nach einfachen Gesetzen des Entsprechens bei allgemeiner Lage."

Von jener Einführung geht auf diese Entwickelung der wesentliche Zug auf die räumliche Betrachtung, d. i. auf die Beseitigung jener gebräuchlichen Einschränkung auf die Ebene über, die ich in der Vorrede von 1870 als den Krebsschaden dieser Disciplin bezeichnet habe.

In Erinnerung an J. Steiner's begeisterte Verkündigung von der Entdeckung der natürlichen Elemente, aus welchen die Welt der räumlichen Formen sammt ihren unzähligen Eigenschaften hervortrete („Werke" I, Vorrede zu „Systemat. Entwickelung" etc. p. 233), darf wohl gesagt werden, dass die

natürliche Quelle dieser Entdeckung die darstellende Geometrie in der Form der Centralprojection ist. Damit wird man auch erst Poncelet's grossen und älteren Verdiensten gerecht.

„Ich halte aber auch das, fuhr ich 1870 fort, für einen Vorzug dieser Verbindung der Geometrie der Lage mit der darstellenden Geometrie, dass dadurch die metrischen und projectivischen Eigenschaften in ihrem Zusammenhange gezeigt und die Uebergänge zwischen ihnen besonders beleuchtet werden. Die Geometrie der Lage enthält ja die Geometrie des Maasses als einen Theil; die Theorie der Involution führt von jener zu dieser.“ Dem entsprechend haben nun die Fälle der projectivischen Beziehung mit metrischer Specialisierung, die Lehren von der Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz ebener und räumlicher Systeme die eingehende Behandlung und Ausführung erhalten, die sie verdienen und die ihnen selbstverständlich besonders in den Vorlesungen der technischen Hochschulen kaum vorenthalten werden darf; auch die Specialfälle der axialen, geschaarten und centrischen Collineation und Involution sind vollständiger und auch in metrischer Richtung behandelt worden, die congruenten Elementargebilde erster Stufe in den projectivischen der zweiten und dritten Stufe haben nähere Untersuchung gefunden.

„Es ist endlich ein wesentliches Glied in meinem Plane, fuhr ich in der ersten Auflage fort, dass in dem Abschnitt von den projectivischen Coordinaten aus den Grundanschauungen der Geometrie, zu denen die Darstellung führte, die analytische Bestimmungs- und Ausdrucksweise sich ergiebt; denn allerdings ohne die Benutzung gewisser analytischer Begriffe und Sätze wie von Ordnung und Classe, von der Zahl der gemeinsamen Wurzeln von zwei oder drei Gleichungen, ohne die Mitinbetrachtnahme imaginärer Elemente wäre der Vorschritt des Ganzen sehr erschwert; wenn aber die wesentliche Einheit der algebraischen und der geometrischen Untersuchungsmethode erkannt ist, so kann von Eigenschaften der Curven n^{ter} Ordnung oder Classe gesprochen werden und man wird sich selbst den Gebrauch z. B. der Formeln von Plücker, die zwischen den Zahlen der Singularitäten algebraischer Curven bestehen, oder des Geschlechtsbegriffs u. s. w. nicht zu versagen brauchen.“

Deshalb veröffentlichte ich am Schluss meines Buches in der ersten Ausgabe vor Allem als Theil meiner Geometrie der Lage die Theorie der projectivischen Coordinaten, durch welche ich mir die Brücke zwischen der reinen projectivischen und der analytischen Geometrie geschlagen hatte; und auch bei der vollständigeren Ausführung der Geometrie der Lage in der zweiten Ausgabe bediente ich mich der gemischten, die synthetisch construierenden und die analytischen Untersuchungsmittel combinierenden Methode. Ich habe dies von jeher auch in meinen Vorlesungen gethan, in bewusstem Gegensatz zu der Methode v. Staudt's und in der auf Erfahrung begründeten Ueberzeugung, dass dies Verfahren, das in der Einführung des Doppelverhältnisses seine Grundlage hat, pädagogisch viel fruchtbarer ist. „Der systematisch vollkommnere Weg ist historisch der spätere; und wenn die Vorarbeiten dazu so meisterliche Schöpfungen, wenn sie Bestandtheile der Wissenschaft von so unvergänglichem Werthe sind, wie die von Poncelet, Möbius, Steiner und Chasles, so soll man wiederholt überlegen, ehe man sie für veraltet erklärt und verlässt. Man würde sich dadurch des bequemen Zuganges zu einer Fülle von wichtigen und anziehenden Resultaten berauben, und ein gewisser Reichthum der Resultate und der zu bewältigenden Probleme ist ein Anreiz zur Betreibung der Wissenschaft, den kein Lehrer geringschätzen darf." Ich führte damals als Beispiel an, dass die gemischte Methode mir von jeher gestattete, die Reciprocität der ineinander liegenden Gebilde in gewissem Grade abschliessend und doch sehr kurz zu behandeln, die bekanntlich bis zu einer neuesten Veröffentlichung von Herrn Schröter überall nicht erledigt war, die ich aber in der knapp bemessenen Zeit der Vorlesung, in die sie gehört, unmöglich in der Ausführlichkeit seiner Darlegung würde entwickeln können. (Vergl. §§ 72, 83 im Text, p. 490 f. und 589 f.)

„Und die Vereinigung der algebraischen und der geometrisch construierenden Methode ist auch aus dem noch mehr entscheidenden Grunde pädagogisch hoch zu schätzen, weil sie das Mittel bietet, den besten Weg zu den angestrebten Resultaten zu entdecken; man darf in Kürze sagen, derselbe sei immer durch die genaue Uebereinstimmung der analytischen und der geometrisch construierenden Methode ausgezeichnet."

Das Verständniss solcher Vereinigung darf als eins der wichtigsten Ziele des höheren Unterrichts angesehen werden; es sichert der modernen Behandlungsweise der Geometrie erst ihren ganzen Erfolg.

Jetzt habe ich in Festhaltung dieses wesentlichen Zieles namentlich die Coordinatenentwickelung sehr viel eingehender gestaltet und sie durch zahlreiche Beispiele zu dem der vorhergehenden Behandlung der construierenden Geometrie entsprechenden Standpunkt zu bringen gesucht. Jenes ist geschehen durch die Untersuchungen über Grössenänderung und Zeichenwechsel der projectivischen Coordinaten bei der Lagenänderung des dargestellten Raumelements, durch die Aufnahme der speciellen Coordinatensysteme aus dem Uebungsmaterial der Vorlesungen, durch die Entwickelung der Relationen der Coordinaten zu den Maassen des Fundamentalsystems; die Beispiele entnahm ich vorzugsweise dem alten Vorrath: Elemente mit numerisch gleichen, mit permutierten, mit reciproken Coordinaten. Damit war zugleich für die Untersuchung der Bedeutung homogener Gleichungen zwischen den Coordinaten ein reichliches Material bereit gestellt.

Im Zusammenhang damit besprach ich 1875 die Nothwendigkeit der Mitinbetrachtnahme der imaginären Raumelemente, gegen die sich damals noch selbst ein so tüchtiges Buch wie Herrn Reye's „Geometrie der Lage" ablehnend verhielt und deren Ausschliessung als ohne Berechtigung durch geometrische Existenz Andere sich sogar ausdrücklich zum Verdienst anrechneten — während sie einfach unmöglich ist. Ich verknüpfte ihre geometrische Theorie nach v. Staudt mit dem complexen Ausdruck ihrer Coordinaten und gab die wesentlichen Constructionen, so dass ich jetzt nur eine kurze Betrachtung über den Bewegungssinn in imaginären Gebilden hinzuzufügen nützlich fand.

„Und auch in diesem Gebiete, dem ihr scheinbar entschieden unzugänglichen, erweisen sich die Vortheile der construierenden Methode; ich zeige, dass man aus der Darstellung wesentliche Vortheile für die Verfolgung der Schlüsse ziehen kann. Es hätte wohl kaum 15 Jahre gedauert, bis (durch Clebsch) die „Beiträge" v. Staudt's mit der Theorie der imaginären Elemente die Aufmerksamkeit der Mathematiker in

höherem Grade auf sich gezogen haben, wenn das Verständniss seiner Untersuchungen durch Figuren unterstützt und erläutert worden wäre. Es ist nicht unbekannt, dass er sich selbst Figuren zeichnen liess, so dass sie vielleicht ihm sogar nützlich gewesen sind; daraus entspringt die Frage, warum er sie von seinem Werke principiell ausschloss? Ich gehe wohl nicht fehl, wenn ich annehme, dass ihm die Figuren in einem geometrischen streng wissenschaftlichen Werke als verwerflich erschienen, weil sie starr sind und in Folge dessen die Aufmerksamkeit ausschliesslich auf die dargestellten Fälle richten könnten. Es ist aber sogleich klar, dass dem nicht so sein muss, dass dies Uebel nur in der Art liegt, wie man gewöhnlich Figuren benutzt und betrachtet. Und diese falsche Art wird eben durch die mit der projectivischen verbundene darstellende Geometrie beseitigt. Fertige Figuren sind starr; aber man soll die Figur aus dem leitenden Gedanken selbst neu bilden und sich dabei der zahllosen Veränderungen der Form bewusst werden, in denen sie gebildet werden kann; man soll also ihre Bildungsgesetze herauslesen und sie innerhalb der durch diese gezogenen Schranken als organisch beweglich erkennen, soll also z. B. in den Elementen der Kegelschnitte die Erzeugnisse beweglicher Elemente von projectivischen Elementargebilden erster Stufe anschauen etc., oder in der gezeichnet vorliegenden Curve von einer bestimmten Ordnung die sämmtlichen collinear verwandten Formen, die aus ihr hervorgehen. Dann ist die Figur nicht mehr speciell und starr. Und es ist die nothwendige Wirkung der darstellenden Geometrie, diese Betrachtungsweise zur festen Gewohnheit zu machen."

„Wenn aber die fertige von fremder Hand erzeugte Figur immer vom Uebel wäre, so pflege man an unsern Hochschulen überall als einen wesentlichen Theil der mathematischen Studien die Methode der Construction und die darstellende Geometrie. Niemand kann ja bestreiten, dass richtige Figuren die Anschauung unterstützen und dass sie daher bei geometrischen Studien Allen nützlich und Vielen nöthig sind." Aber ich hüte mich, meine Betrachtungen von 1875 über die mangelhafte Pflege der Geometrie zu wiederholen, nachdem ich gefunden habe, dass schon Plato zu ganz ähnlichem sich veranlasst gesehen hat. Die Geometrie lebt und wird leben!

„Natürlich ist im dritten Theile in die Anschauungsfähigkeit des Lesers, deren Entwickelung das Studium der beiden ersten erhöht hat, ein wachsendes Vertrauen gesetzt und an Figuren gespart worden — die darstellende Geometrie hat ja die Aufgabe, sich selbst überflüssig zu machen vor andern Disciplinen! Immerhin wird wohl die Figur für die Curve dritter Ordnung und ihre entwickelbare Fläche zum Begleit des Identitätsbeweises in § 79 dem geneigten Leser recht willkommen sein." Die Vermehrungen haben sich darum auch auf die Figuren erstreckt, 18 neue sind im Text hinzugekommen und eine Tafel ist beigefügt; unter jenen die vollständige Bestimmung der Schraubung zwischen zwei Lagen eines starren Systems durch Centralprojection; diese zur Theorie der Steiner'schen Polygone auf der allgemeinen Curve dritter Ordnung — ich verdanke die letztere meinem Assistenten Herrn Dr. Disteli. Im Zusammenhange damit sind im Texte neu aufgenommen die Lehre von der Projectivität auf den Flächen zweiten Grades und ihrer Transformation in sich selbst, mit den bezüglichen Poncelet'schen Schliessungssätzen; die Lehre von den Curven auf dem einfachen Hyperboloid und ihren Bildern, von den Erzeugungen der Curven dritter und vierter Ordnung auf der Ebene und von doppelter Krümmung. Die Untersuchung des Flächenbüschels vom zweiten Grade, die Bildung der Involution vierten Grades in demselben, in deren sechs Doppelflächen die Regelschaaren durch die Grundcurve in projectivische Involutionen geordnet werden und damit die darstellend geometrische Construction und Ableitung der Steiner'schen Polygone und Schliessungssätze, war das Hauptziel. Hier hat das verspätete Erscheinen des (bis auf den jetzigen § 56) schon 1886 fertig geschriebenen Bandes, das ich beklage, obschon es durch die angenehme Nothwendigkeit der 5. Auflage der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" und resp. deren völlige Neubearbeitung wesentlich veranlasst wurde, doch den Vortheil mit sich gebracht, dass sich jetzt daran die Veröffentlichung einer vollständigen darstellend geometrischen Erledigung jener schönen Steiner'schen Sätze anschliesst, welche Herrn Dr. Disteli nach derselben übrigens von ihm selbständig entwickelten Methode gelungen ist und die ich hiermit dem mathematischen Publikum empfehle.

Der grosse Umfang dieses wesentlich der Raumcurve vierter Ordnung erster Art gewidmeten Theiles wird seine Erklärung und Rechtfertigung in dem darstellend geometrischen Ursprung des Ganzen finden; aber es ist vielleicht am Platze zu Bd. II, p. VII und XI hier noch Einiges hinzuzufügen. Die strengen Constructionen bilden zufolge der Ausbildung und Schätzung der graphischen Methoden in der wissenschaftlichen Technik des Bau- und Maschinen-Ingenieurs den Hauptgrund seiner geometrischen Studien; und die Curve vierter Ordnung als die einfachste der Durchdringungen zwischen krummen Flächen ist ein vortreffliches Object zur Uebung der Genauigkeit bei solchen strengen Constructionen, weil hier das Ergebniss in Folge der sie beherrschenden Involutionseigenschaften einer Fülle von Proben der Genauigkeit unterliegt, die das erlangte Genauigkeitsmaass sofort vor die Augen stellen — daher denn auch, nebenbei gesagt, die ohne solche theoretische Hilfsmittel entstandenen schönen Tafeln in der Literatur der darstellenden Geometrie sich durch sie zumeist als sehr ungenau erweisen. Es ist somit nicht nur theoretisch, sondern in dem Bestreben nach der Ausbildung der graphischen Methoden praktisch von hervorragender Wichtigkeit, wie die Involutionseigenschaften überhaupt, so insbesondere die der Grundcurve des Flächenbüschels zweiter Ordnung zu entwickeln. Frézier hat solche Hilfsmittel gesucht, ohne dass die Geometer seiner Zeit sie ihm zu bieten hatten; nach Poncelet hätten die gleichen Durchdringungen nicht mehr überall in Lehre und Literatur ohne Benutzung ihrer Eigenschaften der involutorischen Symmetrien behandelt werden sollen.

Dabei ist offenbar, dass gerade hier zugleich das ausgezeichnetste Material für Universitätsstudien dieser Richtung liegt.

Wie in den beiden ersten Bänden bin ich auch hier mit besonderer Aufmerksamkeit Steiner'schen Materialien nachgegangen, um dadurch das Meinige beizutragen zu der Wiederbelebung der Studien dieser Richtung, welche sich an die Ausgabe der „Gesammelten Werke" dieses Geometers sowie an die der „Werke" von A. F. Möbius anschliessen wird. Als solche Steiner'sche Materien will ich neben den Schliessungssätzen „Werke" II, p. 371—373, p. 377—380 hier nennen die damit verwandte Erzeugung der circularen Curve dritter Ordnung ibid. p. 487, hier § 50, 1 f. — die Nr. 12 desselben Aufsatzes

von 1852 p. 489, die ich § 60, 9 f. bei der Projection der Durchdringung von zwei Kegeln über derselben ebenen Leitcurve als die Construction der (Doppel-)Spur ihrer Tangentenfläche erkläre; der § 9 der Abhandlung „Neue Bestimmungs-Arten der Curven zweiter Ordnung" „Werke" II, p. 467, den ich als Specialfall einer Untersuchung über die Projectivität des Büschels und der Schaar aus denselben beiden Kegelschnitten ansehe, vergl. § 66, 10 und II, § 25, 2 f. etc.; die Untersuchung der speciellen Hyperboloide und Kegel zweiten Grades in „Werke" I, p. 117, Anm. und p. 382 f., 452, hier § 76, 3 etc.; die Punkte mit reciproken (Dreilinien-)Coordinaten finde ich „Werke" I, p. 193 f. etc.; die Frage 15) ibid. p. 442 hat mich (§ 82, 6 f. und dortige Verweisungen) zur Erörterung der Fälle veranlasst, wo das Doppelverhältniss als Bestimmungselement für Gebilde zweiten Grades erscheint; die Erzeugung der Curve dritter Ordnung und der Developpabeln dritter Classe aus projectivischen Elementargebilden erster Stufe findet sich in 8) ibid. p. 441, etc. wie es in den Literatur-Noten genau angegeben ist; die windschiefe oder hyperboloidische Projection ibid. p. 409 f. will ich nur noch erwähnen. So habe ich schon in Bd. I und Bd. II an vielen Stellen gezeigt, wie sich Objecte fruchtbarer darstellend geometrischer Untersuchung in zahlreichen Steiner'schen Sätzen finden und ich habe nicht verhehlt, wie ich die Methode der „Cyklographie" mit Einschluss der daraus entspringenden Theorie der reciproken Radien nach verschiedenen merkwürdigen Spuren gleichfalls als Steiner's nicht bekannt gegebenen Besitz ansah. Die Reichhaltigkeit dieser Materialien wird es begreiflich machen, dass ich immer geneigt war, J. Steiner als einen grossen, zugleich aber ganz geheimen darstellenden Geometer anzusehen.

Man gestatte, dass ich mich über die mögliche Unsicherheit dieser werthvollen Erwerbung für die Literatur der darstellenden Geometrie durch die Befriedigung tröste, mit der mich das Erscheinen des gehaltvollen zweibändigen Werkes von Herrn Prof. Chr. Wiener „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (Leipzig, Teubner 1884, 1887) erfüllt; es bietet mir willkommene Gewähr dafür, dass die wissenschaftliche Weiterbildung der darstellenden Geometrie, die ich vor Allem erstrebte, feststeht und vorwärts geht.

Ich hätte mich sehr gefreut, wenn ich über das Werk von Herrn G. A. V. Peschka „Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Standpunkte dieser Wissenschaft etc." 4 Bde. (Wien, Gerold 1883—1885), dessen Umfang nach Text und Tafeln den vereinigten des Wiener'schen Werkes und meines Buches noch übersteigt, die gleiche Befriedigung empfinden könnte; aber gerade weil es methodisch sich näher an meine Arbeiten anschliesst, muss ich mir erlauben zu sagen, dass es im Text und in den Figuren weit unter den berechtigten Anforderungen und Erwartungen geblieben ist. Schon die Behandlung der Involution und der an derselben zu Tage tretende Grad der Einsicht in diese gerade auch technisch wichtigste aller neuen Lehren wird jedem Sachverständigen zur Begründung meines Urtheils genügen. Das Werk vertritt die Höhe der wissenschaftlichen Einsicht nicht, welche in diesem Fache an den Hochschulen des Oesterreichischen Kaiserstaates zu finden ist; es genügt, dass ich mich dafür berufe auf die überall geschätzten Arbeiten der Herren Proff. Küpper in Prag und Pelz in Graz, dieser 1865 mein Zuhörer in Prag füge ich gerne hinzu.

Möge mein Buch auch in seiner neuen Form Nutzen stiften und zur Förderung wissenschaftlicher Studien einiges beitragen.

Hottingen-Zürich, Anfang 1888.

Dr. Wilh. Fiedler.

Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.

Dritter Theil. **Construierende und analytische Geometrie der Lage.**

A. Die Grundlagen der Geometrie, die imaginären Elemente, die Coordinaten und Parameter.

§§ 1—36; pag. 1—235. Fig. 1—30.

§		pag.
1.	Rückblick und nächstes Ziel: Die von der Elementargeometrie unabhängige Begründung der Projectivität	1
2.	Schein- und Schnittbildung. Elementargebilde der vier Stufen. Anzahlen ihrer reellen Elemente	4
	Beispiele 1—7. Element-Anzahlen	8
3.	Projectivität und perspectivische Lage: Die Collineation. Die Reciprocität. Das Princip der Dualität	8
4.	Perspectivische Dreiecke, Trieder, Vierecke und Vierkante. Linealconstruction der Involution	14
5.	Die harmonischen Gruppen und die Bewegung ihrer Elemente in Schnitt und Schein	19
6.	Von drei Elementen eines Elementargebildes erster Stufe zu allen andern. Definitionen und Construktionen projectivischer Gebilde aus drei Paaren	22
	Beispiele 1—5. Construction vereinigter Reihen	29
7.	Doppelverhältnissgleichheit und Wurfprojectivität. Kegelschnitte, Kegel und Kegelflächen zweiten Grades; ihre Beziehungen zu Punkt und Gerade; imaginäre Elemente	30
8.	Die Involution, ihre Construction aus zwei Paaren; ihre Doppelelemente und das gemeinsame Paar von zwei vereinigten Involutionen; Charakteristik vereinigter projectivischer Elementargebilde	34
	Beispiele 1—6	38
9.	Die elliptische Involution und die dreierlei imaginären Elementenpaare; ihre Trennung durch den Bewegungsinn; die Darstellung durch harmonische Würfe, speciell die symmetrische und ihre Beziehung zu den complexen Zahlen	39
10.	Constructionen über die Verbindungen der imaginären Elemente mit reellen und unter sich	46

§ pag.

11. Die Entstehung der rein imaginären Geraden und die Regelflächen zweiten Grades; Fortdauer der Beziehungen reeller Elemente für imaginäre. Metrische Darstellungen der imaginären Elemente 51
12. Zählung der Elemente mit Einschluss der imaginären und Constructionen über diese 59
13. Vom Bewegungssinn in imaginären Elementargebilden und ihrer Perspectivität. 64
14. Die algebraischen aus den geometrischen Bestimmungsmethoden. Coordinaten im Elementargebilde erster Stufe 67
Beispiele 1—4. Distanz zweier Punkte der Reihe 71
15. Die projectivischen Coordinaten der Elemente in den Elementargebilden zweiter Stufe; Dreilinien-, Flächen- und Dreipunkt-Coordinaten. Distanz zweier Punkte. 72
Beispiele 1—6. Transversalentheorie; Harmonikale. 78
16. Grösse und Zeichen der Coordinaten nach ihren Veränderungen; Vierergruppen zu gleichen numerischen, Sechsergruppen zu permutierten Coordinaten 80
Beispiele 1—4. Punkte und Gerade derselben Coordinaten; Punkte von reciproken Coordinaten 84
17. Die Gerade als Reihe und der Punkt als Büschel; Bedingung der Indicenz. Gleichungen für Punkte und Gerade; ihre Normalform 85
Beispiele 1—4 88
18. Die Cartesisch-Plücker'schen und die Streifencoordinaten . . . 89
Beispiele 1—9. Abstand von Punkt und Gerade; Winkel zweier Geraden. Das geometrische Netz der harmonischen Gruppen. Reguläre Coordinaten und Permutationsgruppen 92
19. Die Gerade durch zwei Punkte und der Schnittpunkt von zwei Geraden; die Dreiecksfläche in Cartesischen rechtwinkligen Coordinaten 96
Beispiele 1—9. Die Theilverhältnisse in Reihe und Büschel 98
20. Projectivische Coordinaten im Raum für Punkte und Ebenen. Vierebenen-Coordinaten: Distanz zweier Punkte. Vierpunkt- und Volumen-Coordinaten. Harmonikalebene und zusammengehörige Coordinaten 102
Beispiele 1—4 109
21. Die Coordinaten x_i und ξ_i nach Grössen und Zeichen; Achtergruppen von numerisch gleichen, Vierundzwanzigergruppen von permutierten Coordinaten 110
Beispiele 1—9. Punkte von reciproken Coordinaten 114
22. Die Ebene als Ort von Punkten und der Punkt als Enveloppe von Ebenen: Incidenzbedingung. Gleichungen von Ebene und Punkt 116
Beispiele 1—6 122
27. Die prismatischen und Keil-Coordinaten; die Cartesisch-Plückerschen Coordinaten; die regulären 123
Beispiele 1—9. Normalform der Gleichung der Ebene; Abstand von Punkt und Ebene; die Permutationsgruppen in regulären Coordinaten 128
24. Die Ebene durch drei Punkte; Normalform und Tetraedervolumen in rechtwinkligen Coordinaten. Die Punkte der Ebene von dreien etc. 131
Beispiele 1—15. Die Ebenen durch Punkte einer Achter-, resp. Vierundzwanziger-Gruppe. Winkel der Ebenen; Sinus der Ecke; Tetraedervolumen. 136

§ pag.

25. Die Coordinaten des Strahls oder die seiner Durchstosspunkte und projicierenden Ebenen mit den F.-Ebenen und F.-Punkten als vier unabhängige Grössen 142
Beispiele 1—6. Doppelverhältniss des Strahles mit dem Tetraeder 146

26. Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten der Geraden 150
Beispiele 1—10. Kürzeste Entfernung und Moment von zwei Geraden; Incidenzbedingung der Geraden und algebraischer Beweis des Princips der Dualität; linearer Complex, Transversalen zu vier Geraden 152

27. Die identischen Relationen der projectivischen Coordinaten x_i, ξ_i, p_{ik} und der absolute Kreis. 156

28. Geometrische Bedeutung von homogenen Gleichungen zwischen den Coordinaten im Elementargebilde zweiter Stufe: Curven und Kegel. Beispiele 1—16. Curven zweiter Ordnung und Classe, insbesondere aus dem F.-System; die absoluten Richtungen. Curven dritter und vierter Ordnung mit Doppelpunkten. Verwandtschaften der reciproken Coordinaten, der Inversion und der Harmonikalen 161 164

29. Geometrische Bedeutung von homogenen Gleichungen zwischen den Coordinaten im Elementargebilde dritter Stufe: krumme Flächen, ihre gemeinsamen Curven und Developpabeln; partielle und complete. 177
Beispiele 1—16. Flächen zweiten Grades, die Kugel. Verwandtschaften der reciproken Coordinaten, der Inversion und der Harmonikalen 181

30. Geometrische Bedeutung der homogenen Gleichungen zwischen den Strahlencoordinaten: Complexe, Congruenzen, Regelflächen. Das windschiefe Flächenelement und seine Zuordnungen . . . 191
Beispiele 1—8. Tetraedraler Complex; Complex der Strahlen von constantem Moment. Lineare Zusammensetzung der Strahlencoordinaten 195

31. Homogene Gleichungen mit mehr als einer Reihe von Veränderlichen. 200

32. Raumelemente von complexen Coordinaten; Continuität im Flächenbüschel zweiten Grades 203
Beispiele 1—4 208

33. Lineare Bestimmungselemente der Curven, Flächen, Complexe; ihre Anzahl und Benutzung 210
Beispiele 1—10. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, insbesondere durch Vierer-, Sechser-, Achter- und Vierundzwanziger-Gruppen 213

34. Lineare Gebilde erster Stufe aus Curven und Flächen; Involution 216
Beispiele 1—8. Die Büschelschaaren der Permutationsgruppen; die lineare Congruenz; die Complexe der Permutationsgruppen 219

35. Lineare Gebilde zweiter, dritter etc. Stufe; Coordinaten des Elements im Gebilde. Gleichungen von Curven und Flächen als lineare Gebilde; Symbolik. 224
Beispiele 1—9. Construction des bestimmten Elements im Gebilde; lineare Gebilde aus Kugeln; Potenzcoordinaten 229

36. Bestimmungselemente und bestimmte Elemente im linearen Gebilde erster Stufe aus Curven, zweiter Stufe aus Flächen. Curvengeschlecht 232
Beispiel. Zusammenhang der neun Schnittpunkte von zwei Curven dritter Ordnung. 234

B. Die Parameter und die Projectivität. Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe.

§§ 37—61; p. 236—407. Fig. 31—37. Tafel.

§ pag.

37. Bedeutung des Parameters in linearen Elementargebilden erster Stufe; Theilverhältnisse 236
Beispiele 1—6. Harmonische Gruppen, Doppelverhältnisse des Strahles im Tetraeder; der Parameter im Elementargebilde zweiter und dritter Stufe 238
38. Doppelverhältnisse von vier Elementen im Elementargebilde erster Stufe 240
Beispiele 1—4 242
39. Parametergleichung der Projectivität zwischen Elementargebilden erster Stufe; geometrische Bedeutung der Coefficienten, einfache Formen. Coordinatengleichungen der Projectivität 242
Beispiele 1—8. Entsprechende rechte Winkel; perspectivische Potenz, Beispiele des Vorkommens projectivischer Beziehungen 247
40. Vereinigte projectivische Elementargebilde erster Stufe; Doppelelemente, Charakteristik. Algebraische (m, n) Correspondenz 249
Beispiele 1—5. Relationen der Doppelelemente; gleiche Büschel über vereinigten projectivischen Reihen; Winkelmessung und Doppelverhältniss 250
41. Die Involution der Elementargebilde erster Stufe und ihre Doppelelemente 253
Beispiele 1—6. Projectivitätsrelationen der Involution; Projectivitäten zwischen Involutionen und einfachen Gebilden. Die allgemeine symmetrisch-bilineare Relation 254
42. Projectivische Erzeugungen der Kegelschnitte und Parameterdarstellung ihrer Elemente 256
Beispiele 1—12. Die Involution n^{ten} Grades auf dem Kegelschnitt; Involutionscurven 260
43. Das einfache Hyperboloid aus projectivischen Elementargebilden erster Stufe; Abbildung seiner Punkte, Parametertheorie und Classification der auf ihm gelegenen Curven 264
Beispiele 1—10. Projectivische Regelschaaren und Projectivitäten auf demselben Kegelschnitt; Erzeugnisse aus Involutionen 268
44. Involutorische Regelschaaren desselben Hyperboloids in projectivischer Zuordnung und ihre Erzeugnisse; Involutionen in der Ebene 272
Beispiele 1—4. Erzeugnisse aus algebraischer (m, n) Correspondenz 277
45. Projectivität der Elementargebilde erster Stufe mit ihren Erzeugnissen; Curve dritter Classe mit Doppeltangente 278
Beispiele 1—6. Algebraischer Ausdruck 284
46. Projectivität der Erzeugnisse aus Elementargebilden erster Stufe unter einander; Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art 285
Beispiele 1—6. Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten 289
47. Collineationen und Reciprocitäten auf einer Fläche zweiten Grades. Collineationen und Involutionen 1) und 2) aus successiven Centralprojectionen 291
48. Construction dieser Collineationen aus ihren Bestimmungselementen 295
Beispiele 1—10. Poncelet'sche Polygone. Congruenz der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte 296

§ pag.

49. Geometrische Bedeutung des Parameters bei Curven und Kegeln zweiten Grades. Pol, Polare, Tangente und Tangentenpaar. Uebergang von x_i zu ξ_i; Discriminante. Parameter in Kegelschnittbüschel und Schaar 299
Beispiele 1—11. Pol der Geraden; Parameterdarstellungen; Kegelschnitte im Büschel an eine Gerade 306

50. Projectivität der linearen Gebilde erster Stufe aus Curven zweiten Grades. Curven dritter und vierter Ordnung als Erzeugnisse; im Speciellen von projectivischen Involutionen. Curve dritter Ordnung durch neun Punkte etc. 311
Beispiele 1—6. Correspondierende Punkte der Curve dritter Ordnung; Brennpunktcurve der Kegelschnittschaar; Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt 318

51. Erzeugung der Curve dritter Ordnung aus Kegelschnitt- und Strahlbüschel; correspondierende Punkte derselben; zwei Erzeugungen der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten 320
Beispiele 1—5 325

52. Das Bild der Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiten Grades als Erzeugniss von projectivischen Curvenbüscheln . . 326

53. Die allgemeine Curve dritter Ordnung aus Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel, ihre conjugierten Punkte; zweitheilige und eintheilige Curve, Curve mit Doppelpunkt 330
Beispiele 1—5. Curven dritter Classe. Dispositionen. Formschönheit 339

54. Die Vierergruppen der Hyperboloide im Flächenbüschel und die Involution im System der Umrisskegelschnitte 340
Beispiele 1—5. Bicirculare Curve vierter Ordnung; Cyklographie 345

55. Die sechs Doppelflächen der Viererinvolution mit durch die Curve projectivisch zugeordneten Regelschaar-Involutionen und die bezüglichen Erzeugungen der Bildcurve; Projectivität der Tangentenbüschel aus den Doppelpunkten; charakteristisches Doppelverhältniss der Curve dritter Ordnung. Construction der Doppelflächen. Die Schliessungssätze und Polygone von Steiner 347

56. Bildung der Vierer-Involution mittelst Regelschaaren vierten Grades mit zwei Doppelgeraden in Gegenkanten des Quadrupels aus Bisekanten der Curve. Die Vierer-Gruppen in der Curve dritter Ordnung, ihre Ableitung aus einer. Die Scheitel der Grundcurve und die Doppelflächen 354
Beispiele 1—6. Der Fall mit Doppelpunkt und der des Zerfallens in Gerade und Raumcurve dritter Ordnung 361

57. Die Fläche zweiter Ordnung, ihre harmonischen Pole und Polarebenen; der Uebergang von den x_i zu den ξ_i und zu den Strahlencoordinaten; Discriminante und Doppelpunkt; das gemeinsame Quadrupel im Büschel; die geometrische Bedeutung des Parameters und die Projectivität 363
Beispiele 1—8. Axen und Hauptebenen. Polarebenenbüschel nnd Polarhyperboloide; die Gruppe der Grundpunkte des Flächenbündels vom zweiten Grade 370

58. Flächen dritter und vierter Ordnung als Erzeugnisse der Projectivität von Flächenbüscheln zweiter Ordnung mit Ebenenbüscheln und unter sich; Doppelpunkte uud Doppelcurven. Raumcurven als Erzeugnisse 373
Beispiele 1—4 378

59. Fortdauer der Bedeutung des Parameters für Gleichungen höherer Grade. Polarentheorie der Curven und Flächen; darstellend geometrische Ableitung der ersten 379

§ pag.

Beispiele 1—10. Die Tangentenbüschel der Curve. Die Durchdringung zweier Kegel über derselben ebenen Leitcurve in darstellend geometrischer Behandlung; insbesondere für die Curve dritter Ordnung 381

60. Der Pol in der Curve oder Fläche; der Uebergang von x_i zu ξ_i. Die Singularitäten der Curve und die Plücker'schen Gleichungen. Die Discriminante 387

Beispiele 1—7. Curve dritter Ordnung; Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten; Steiner'sche Fläche. Rationale Curven dritter Ordnung. 394

61. Der Parameter im Curven- und Flächenbüschel. Die Kerncurven und Kernflächen von Hesse und Steiner; parabolische Curven der Flächen, Inflexionspunkte der Curven 397

Beispiele 1—8. Die Curve dritter Ordnung und die Cayley'sche Curve; die Geraden der Inflexionspunkte, die Kerncurve. Flächenbüschel und Curvenbüschel 403

C. Die projectivischen Gebilde, speciell die Elementargebilde zweiter und dritter Stufe.

§§ 62—88; pag. 408—640. Fig. 38—53.

62. Projectivität und lineare Substitution: Collineationen und Reciprocitäten der drei Stufen; geometrische Bedeutung der Coefficienten 408

Beispiele 1—10. Vereinfachungen und Uebergang zu speciellen Coordinaten 413

63. Die Coordinatentransformation und die gleichsinnig congruenten Figuren; Durchführung der allgemeinsten Transformation . . 415

Beispiele 1—2. Transformation zwischen schiefwinkligen Coordinaten in der Ebene; das orthogonale Hyperboloid als Beispiel für Keilcoordinaten und für tetraedrische 421

64. Die allgemeinen Gleichungen des Absoluten und die metrischen Relationen als Ergebnisse der Coordinatentransformation . . . 426

65. Invarianten, Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen. Discriminante der Gleichung zweiten Grades und Transformation von einem Tripel von Durchmessern zu den Axen. 432

66. Die Invarianten des Büschels von Kegelschnitten. Das gemeinsame Tripel 438

Beispiele 1—10. Gleichzeitige Transformation zur Normalform. Die harmonischen Invarianten. Büschel und Schaar aus zwei Kegelschnitten 441

67. Die Invarianten des Büschels von Flächen zweiten Grades. Die Flächen des Vierschlusses im Büschel. Ausdrücke in Strahlencoordinaten. 450

Beispiele 1—2 456

68. Jacobi'sche Fläche und Curve zu vier und zu drei Flächen zweiten Grades. Die Erweiterung der Polarentheorie auf Curven und Flächen als Pole. 457

69. Projectivitäten der Elementargebilde zweiter und dritter Stufe. Die Collineationen und ihre Hauptelemente bei vereinigter Lage. Ueberführung collinearer Ebenen in centrische Lage. Die Kegelschnitte des Netzes der ebenen Collineation 463

Beispiele 1—7. Die Berechnung der Transformation zur centrischen Lage 469

§ pag.
70. Die Specialfälle der Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz gleich- und ungleich-sinniger Ebenen und ihre Netzkegelschnitte. Ueberführung in perspectivische Lage 472
Beispiele 1—8. Mehrere vereinigte collineare Ebenen 478
71. Collineare Bündel, vereinigt und getrennt. Entsprechende rechtwinklige Dreikante, entsprechend gleiche Strahlen- und Ebenenbüschel derselben: Focal- und cyklische Elemente 481
Beispiele 1—4. Büschel von Collineationen 487
72. Vereinigte reciproke Gebilde zweiter Stufe: Pol- und Polar-Kegelschnitt, involutorisches Tripel; Verwandtschaft der doppelt conjugierten Elemente 488
Beispiele 1—6. Involutorische Reciprocitäten aus der allgemeinen. Vereinigte reciproke Bündel 496
73. Die Polarreciprocität in der Ebene. Die Polardreiecke und die vier Vereinigungen reciproker Ebenen zum Polarsystem. Die Constructionen des Polarsystems. Directrix- und Symmetrie-Kegelschnitt: Polare und Antipolare 498
Beispiele 1—10. Polare Dreiecke; zusammengehörige Polarsysteme. Die stets reellen Elemente derselben. 506
74. Algebraische Durchführung des Vorigen; die Ueberführung ins Polarsystem. Polarsystem im Bündel, Orthogonalsystem und Metrik. Beispiel 508
75. Zwei vereinigte Polarsysteme: Gemeinsames Tripel, Linien s_k und Punkte T_k. Gemeinsame Punkte und Tangenten von zwei Kegelschnitten 513
Beispiele 1—10. Constructive Durchführung. Die Verwandtschaft der doppelt-conjugierten 517
76. Vereinigte Polarsysteme im Bündel, insbesondere Polarsystem und Orthogonalsystem. Metrische Theorie der Kegel zweiten Grades; sphärische Kegelschnitte. Concyklische und confocale Kegel zweiten Grades. Drei vereinigte Polarsysteme und ihr Netz: Curve dritter Ordnung 520
Beispiele 1—7 527
77. Zwei reciproke Gebilde zweiter Stufe und die Flächen zweiten Grades. Die Arten derselben. Singuläre Reciprocitäten. Algebraische Darstellung 528
Beispiele 1—8. Abbildung der Fläche zweiten Grades 534
78. Zwei collineare Gebilde zweiter Stufe und die Curven dritter Ordnung und Developpabeln dritter Classe sammt ihren Congruenzen. Specialfälle 536
Beispiele 1—10. Singuläre Collineationen und Degenerationsformen 543
79. Die Identität der Curve dritter Ordnung mit der Rückkehrcurve der Developpabeln dritter Classe. Das Nullsystem . . 545
Beispiele 1—8. Die cuspidale Raumcurve vierter Ordnung. Regelflächen fünften und sechsten Grades 551
80. Die Collineation der Räume und ihr Haupttetraeder. Elementare Formen der Collineation: Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz bei gleichem und ungleichem Sinn. Construction der Schraubung des starren Systems für zwei gegebene Lagen 556
Beispiele 1—8. Die Curven dritter Ordnung und die Hyperboloide collinearer Räume 566
81. Specielle Fälle der Raumcollineation: axiale, geschaarte und centrische; involutorisch geschaarte und centrische. 568
Beispiele 1—12. Die geschaarte Affinität. Metrik reciproker Räume 577
82. Die allgemeine Raum-Collineation nach ihren metrischen Be-

§ pag.

sonderheiten. Der Complex derselben. Der Complex der Polargeraden zu zwei Flächen zweiten Grades, speciell der Normalencomplex 580

Beispiele 1—9. Das Doppelverhältniss als Bestimmungselement 586

83. Die Reciprocität der Räume; Pol- und Polarfläche, involutorisches Quadrupel, Complex der doppelt conjugierten Geraden 589

Beispiele 1—8. Constructionen 595

84. Das räumliche Polarsystem, seine Herstellung und seine Eigenschaften; die acht zusammengehörigen Polarsysteme, die Flächen zweiten Grades 596

Beispiele 1—8. Constructionen 602

85. Zwei Polarsysteme und ihr Büschel oder ihre Schaar; confocale Flächen zweiten Grades 604

Beispiele 1—15. Focalkegelschnitte und Directrixencylinder der Flächen zweiten Grades 608

86. Das Nullsystem und der lineare Complex; Polygone und Curven im Complex. Die linearen Involutionenen im Strahlenraum 611

Beispiele 1—9. Curven dritter Ordnung und Schraubenlinien im Nullsystem 620

87. Die Fläche dritter Ordnung, ihre ebene Abbildung und die Geraden in ihr 622

Beispiele 1—12. Bündel erzeugender collinearer Systeme und singuläre Flächen dritter Ordnung 627

88. Das lineare Gebilde zweiter Stufe aus Flächen zweiten Grades und die Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung. Das lineare Gebilde dritter Stufe aus Flächen zweiten Grades. Die Flächen und Curven aus collinearen und reciproken Systemen und die allgemeinen Erzeugungen algebraischer Flächen 630

Uebersicht der Figuren und Tafel des dritten Theiles.

Für die nähere Erklärung ist auf den Text zu verweisen.

Fig. 1, p. 15. Perspectivische Dreiecke in derselben Ebene; Beweis durch Construction.
- 2, - 16. Perspectivische Vierecke.
- 3, - 19. Die Gruppe harmonischer Punkte in der Reihe und das Viereck.
- 4, - - Die Gruppe harmonischer Strahlen des Büschels und das Vierseit.
- 5, - 22. Die zulässigen Vertauschungen in der harmonischen Gruppe.
- 6, - 26. Die Construction projectivischer Reihen.
- 7, - 27. Die Construction projectivischer Strahlbüschel.
- 8, - 31. Die projectivischen Gruppen aus vier Punkten der Reihe.
- 9, - 40. Die Darstellungen der Involution nach Sinn und Anfangselement.
- 10, - 43. Die symmetrisch harmonische Darstellung des imaginären Punktes und die complexe Zahl.
- der Anm., p. 45. Ihre Verbindung mit der ebenen Abbildung der Kugel nach reciproken Radien.
- 11, p. 48. Die Verbindungsebene eines imaginären Punktes mit einer imaginären Geraden erster Art.
- 12, - 52. Die Verbindungsebene eines reellen Punktes mit einer imaginären Geraden zweiter Art.
- 13, - 55. Verbindungsebene eines reellen Punktes und Schnitt einer reellen Ebene mit einer imaginären Geraden zweiter Art.
- 14, - 69 u. Fig. 15, p. 70. Die Bestimmung des Punktes in der Reihe und des Strahles im Büschel aus den F.-Elementen und dem E.-Element.
- 16, - 70. Die Verbindung von Reihe und Büschel mittelst der harmonischen Gruppierung der F.- und E.-Elemente.
- 17, a u. b; p. 73. Die Bestimmung des Punktes resp. des Strahles in der Ebene in Bezug auf das Dreieck oder Dreiseit der F.-Elemente mit E.-Punkt und E.-Gerade.
- 18, p. 79. Construction der Harmonikale $\mathbf{P_1P_2P_3}$ des Punktes P in Bezug auf ein Dreieck $A_1A_2A_3$.
- 19, - 87. Die Coordinatenbestimmungen in der Ebene für Punkte und Gerade in Bezug auf dasselbe F.-System bei harmonischer Trennung der E.-Elemente. (Verbundene projectivische Coordinaten.)
- 20, - 89. Die Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten in der Ebene.

Fig. 21, p. 92. Die Streifencoordinaten des Punktes und der Geraden in der Ebene.
- 22, - 94. Die Punkte der Ebene mit ganzzahligen Coordinaten oder das geometrische Netz der harmonischen Gruppen.
- 23, a, b, c; p. 101. Die Coordinaten des Theilpunktes in der Reihe und des Theilstrahles im Büschel.
- 24, p. 104. Die Coordinatenbestimmung von Punkt und Ebene im Raum. (Verbundene projectivische Coordinaten.) Axonometrisch.
- 25, - 118. Zum Beweis der Incidenzbedingung für Punkt und Ebene.
- 26, - 124. Prismatische verbundene Coordinaten des Punktes und der Ebene.
- 27, - 125. Die Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten im Raum.
- 28, - 127. Die projectivischen verbundenen Keilcoordinaten.
- 29, - 149. Construction einer Geraden im Raum aus ihren projectivischen Coordinaten bei gegebenem F.-System. Axonometrisch.
- 30, - 204. Darstellung eines imaginären Punktes einer reellen Geraden aus seinen Cartesischen Coordinaten.
- 31, a, b; p. 237. Das Theilverhältniss des Punktes in der Reihe und das Doppelverhältniss der Geraden im Tetraeder.
- 32, p. 263. Osculierender Kegelschnitt zu einem gegebenen in einem gegebenen Punkt A durch zwei reelle Punkte C und D.
- 33, - 263. Construction der zweiten Schnittsehne s von zwei Kegelschnitten aus den gemeinsamen (A, B) und je drei weiteren Punkten C, D, E und C^*, D^*, E^*.
- 34, - 269. Zur Projectivität der beiden Regelschaaren eines Hyperboloides. Axonometrisch.
- 35, - 281. Die Projectivität von Strahlbüschel und Kegelschnitt.
- 36, - 331. Die zweitheilige (circulare) Curve dritter Ordnung als Bild der Durchdringung von vier Kegeln zweiten Grades aus einem ihrer Punkte.
Tafel, - 355 f. Die Ableitung der conjugierten Punktepaare und der Steiner'schen Vierseite der zweitheiligen Curve dritter Ordnung aus dem Flächenbüschel zweiten Grades.
Fig. 37, - 362. Die Involution der Hyperboloide des Büschels im Fall einer gemeinsamen Mantellinie aus dem Bilde der Raumcurve dritter Ordnung aus einem ihrer Punkte.
- 38, - 416. Zur allgemeinen Transformation der projectivischen Punktcoordinaten in der Ebene.
- 39, - 418. Zur allgemeinen Transformation der projectivischen Liniencoordinaten in der Ebene.
- 40, - 466. Construction der entsprechenden insbesondere der sich selbst entsprechenden Elemente von zwei vereinigten collinearen Ebenen.
- 41, - 475. Die Affinität vereinigter Ebenen aus entsprechenden Dreiecken, insbesondere ihre sich selbst entsprechenden Elemente.
- 42, - 477. Die Aehnlichkeit vereinigter Ebenen; ähnliche Lagen.
- 43, - — Die Congruenz vereinigter Ebenen bei gleichem und ungleichem Sinn.
- 44, - 483. Die entsprechenden rechtwinkligen Dreikante collinearer Bündel bei perspectivischer Lage und die Strahlen und Ebenen mit entsprechend gleichen Büscheln von Ebenen und Strahlen.

Fig. 45, p. 495. Vereinigte reciproke Ebenen; Mittelpunkte und involutorisch entsprechende Elemente derselben; Pol- und Polarkegelschnitt.

- 46, a, b; p. 499. Das Polarsystem in der Ebene mit reeller und mit nicht reeller Directrix; Polardreieck und Elementenpaar.

- 47, a, b, c, d; p. 503. Die vier Polarsysteme aus derselben Reciprocität zweier Ebenen und ihre Directrixen.

- 48, p. 515. Zur Construction der Geraden s_{ik} und der Punkte T_{ik} für zwei vereinigte Polarsysteme.

- 49, - 531. Die Erzeugung einer gegebenen Fläche zweiten Grades aus reciproken Bündeln.

- 50, - 537. Collineare Bündel an verschiedenen Scheiteln; Regelschaar aus entsprechenden Büscheln derselben.

- 51, - 547. Die Developpable dritter Classe aus zwei collinearen Ebenen und ihre Rückkehrcurve dritter Ordnung; drei Schmiegungsebenen mit ihren Curvenpunkten und Mantellinien nebst ihren Spurkegelschnitten mit der Developpablen; zum Identitätsbeweis. Axonometrisch.

- 52, - 553. Die Raumcurve vierter Ordnung mit stationärem Punkt; ihre Tangentenfläche mit dem Doppelkegelschnitt. Zur analytischen Behandlung. Axonometrisch.

- 53, - 565. Construction der Elemente der Schraubung zwischen zwei Lagen eines starren Systems. Centralprojectivische Darstellung aus zwei entsprechenden Würfeln, von denen der eine das Centrum zur Ecke und der andere die Bildebene zur Fläche hat.

Berichtigungen und Zusätze

zum ersten und zweiten Bande.

Zu Bd. I, § 10, B. Einen rechten Winkel aus dem einen Schenkel SQ' und dem Bilde des andern zu bestimmen.

§ 11, B. 6. Für ein Rhombendodekaeder sind die Bilder aller Ecken aus denen der Endpunkte seiner zwei zu einander normalen und zur Tafel parallelen Hauptdiagonalen abzuleiten. Verwendung zu stereoskopischen Bildern. (§ 12, 4.)

§ 29, B. 6. Nach § 21 folgt, dass die Segmente einer Geraden zwischen der Hyperbel und zwischen ihren Asymptoten dieselbe Mitte haben.

§ 33, B. 10. Die Elimination von n zwischen den Gleichungen der Geraden aus A, B in x nach Paaren entsprechender Punkte der Involution von der Potenz $\pm n^2$ in y oder zwischen

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{n b_1} = 1, \quad -\frac{x}{a_1} \pm \frac{n y}{b_1} = 1 \text{ giebt } a_1^2 y^2 = \pm b_1^2 (a_1^2 - x^2).$$

Parallelen zu CD schneiden AC, BC resp. AC, BD in Punkten auf entsprechenden Strahlenpaaren aus B, A für Ellipse oder Hyperbel resp., wenn im letztern Fall C, D das symmetrische Paar der Involution in y ist.

§ 36, B. 1. Die gleichseitige Hyperbel ist in Bezug auf diesen Kreis zu sich selbst polarreciprok im Sinne von § 34; jeder Punkt entspricht der Tangente des zu ihm in Bezug auf die Hauptaxe orthogonal-symmetrischen Punktes, also die Scheitel ihren Tangenten etc.; speciell auch die Brennpunkte ihren Directrixen.

B. 8. Für die Directrix als Axe y und den Brennpunkt G mit der Abscisse g in x folgt aus $e^2 . (\overline{P,g})^2 = \overline{PG}^2$ die Gleichung des Kegelschnittes

$$e^2 x^2 = (x - g)^2 + y^2 \text{ oder } x^2 (e^2 - 1) + 2gx = y^2 + g^2.$$

Mittelst der Hauptscheitelabscissen α, β aus $g - \alpha = e\alpha$, $\beta - g = e\beta$ findet man für die Halbaxenquadrate

$$a^2 = \frac{e^2 g^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{e^2 g^2}{1 - e^2}.$$

Somit entsteht der Kreis für $e = 0$, die Doppelgerade y für $e = \infty$; $e^2 = 2$ giebt die gleichseitige Hyperbel, $e = 1$ die Parabel, $e^2 = \frac{1}{2}$ eine interessante specielle Ellipse.

B. 13. Die Fusspunkte der Perpendikel von den Brennpunkten auf die Asymptoten liegen in den Directrixen, der Kreis über der Brennpunktsdistanz als Durchmesser enthält die Schnitte der Asymptoten mit den Hauptscheiteltangenten.

B. 14. Für x, x_1 als ein rechtwinkliges Strahlenpaar aus dem Brennpunkt G und X_1, X als ihre Schnitte mit der entsprechenden Directrix g liefern die Geraden nach den (von G und g harmonisch getrennten) Hauptscheiteln AX, BX_1 und AX_1, BX

zwei Punkte P, P_1 des Kegelschnittes auf einer Focalsehne, und die Scheiteltangenten a, b bestimmen mit x, x_1 die zugehörigen Tangenten. Die Figur liefert elementar die Relation: Der e fache Directrixabstand ist dem Radius vector gleich.

§ 39, B. 9. Es sind die Bestimmungen der gleichen entsprechenden Strecken, Linien- und Ebenen-Winkel und die Bildung entsprechend gleicher Dreiecke und Tetraeder zu erörtern.

§ 54, B. 12. Für b und a als Längen der kleinen und der grossen Halbaxe ist $b = a \cos \alpha$; oder der Winkel der Kreisebene zur Projectionsebene ist dem Winkel gleich, unter dem die lineare Excentricität am Endpunkt der kleinen Axe erscheint.

§ 60. Die Ermittelung des Abstandes NO aus dem Spurendreieck der Bildebenenparallele durch einen beliebigen Punkt (Fig. 131, 134, 95) giebt nach § 54 ein einfaches Mittel zur Bestimmung der wahren Grössen oder zur Umklappung ebener Figuren in der orthogonalen Axonometrie. Man wird für eine beliebige Ebene um ihren Schnitt mit der Bildebene als Drehungsaxe die Parallele an dieser durch einen ihrer Axenschnittpunkte umlegen, indem man die Differenz der Abstände NO für die gewählte Bildebene und für ihre Parallele durch jenen Axenschnittpunkt bestimmt. Man construiert nun z. B. den Winkel zweier Ebenen aus ihrer axonometrischen Darstellung genau nach dem Verfahren von § 54, 3; vergl. Fig. 118 — etc.

Zu Bd. II, § 1, p. 7 als B. 9. Wenn ein Punkt einer Curve Symmetriecentrum für dieselbe ist, so ist er bei ungerader Ordnungszahl ein einfacher Wendepunkt derselben und bei gerader Ordnung Wendepunkt in zwei Aesten.

pag. 11, Zeile 13 von oben lies § 60, 6.

- 12, Zeile 13 von oben lies $\mathfrak{S}_1$ statt s.

Zu § 6 als B. 16. Collineation $\Delta = +1$ findet zwischen $\mathbf{L}'$ und $\mathbf{E}'$ statt, wenn M' und also auch t' und t_∞' in s' liegt. Ist insbesondere M' die Richtung von s' und S_t der Durchstosspunkt der von M in der Verschwindungsebene ausgehenden Parallelen zu s, so erhält man sofort q' und r' und kann zu jeder Geraden l' die entsprechende e' bestimmen. Man hat flächengleiche Affinität zwischen den Figuren der Leit- und Schnitt-Ebene für alle Lagen von M in der Verschwindungslinie der projicierenden Ebene von s.

pag. 154. Jede Hilfsebene $\mathbf{H}$ liefert als Schnittpunkt der Geraden $(h, p)M^*$ und $(h, p^*)M$ einen Punkt der Geraden g.

- 155, Zeile 3 von oben füge hinzu: Die Spuren der Ebenen MM^*N und MM^*N^* sind das gemeinsame Paar der Involutionen harmonischer Polaren um S in den beiden Spurkegelschnitten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$. Die Paare von zu ihnen harmonischen Strahlen sind Spuren zusammengehöriger Hülfsebenen und also auch abgesehen von ihrer Realität erhältlich.

- 181, Zeile 3 von oben lies M^*A^* statt M^*B^*. Zu Zeile 8 füge bei: ihre Verbindungslinie d ist die Umrissmantellinie M^*A^*. Welche Besonderheit tritt ein, wenn man die zweiten Umrisse M^*B^*, MF in einer andern Hülfsebene liegend wählt?

Zu § 26, 1 nach Zeile 4: Rotationscylinder von ungleichen Radien mit sich rechtwinklig schneidenden Axen — wir denken sie als Axen x und z resp. Der Aufriss der Durchdringung ist eine gleichseitige Hyperbel mit der Axe des Cylinders vom kleineren Radius r als Scheitelaxe; die Grenzlagen der Hilfsebenen liefern die Scheitel T_1, T_2, die Schnitte der Umrisserzeugenden sind vier Punkte $A_1 \ldots$ derselben; die Scheiteltangenten p_1, o_2

werden als die Parallelen zur Axe von R erhalten, die die Schnittpunkte seines um die Axe von r umgelegten Normalschnittkreises mit den Umrisslinien dieses Cylinders verbinden. Sind dann die Strahlen T_1A und T_2A durch a_1, a_2 bezeichnet und ist o_1, p_2 der Scheitelstrahl T_1T_2, so ist offenbar

$$\tan(a_1, p_1) = \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{r}, \qquad \tan(a_2, p_2) = \frac{r}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}$$

und somit $\angle(a_1, p_1) = \angle(a_2, p_2)$ oder die erzeugenden Büschel sind gleichwinklig und von entgegengesetztem Sinn.

Auch folgt aus $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = R^2$ durch Elimination von y^2 sofort $z^2 - x^2 = R^2 - r^2$. Die homogene Verbindung $R^2x^2 + (R^2 - r^2)y^2 = r^2z^2$ giebt den doppelt projicierenden Kegel aus dem Schnittpunkt der Axen, erzeugt aus orthogonalen Ebenenpaaren (siehe I, § 11, 5 und II, § 36, 12 f.) durch die in $y = 0$ liegenden Mantellinien $R^2x^2 = r^2z^2$ und aus gleichwinkligen Büscheln um die Mantellinien in $mx = z$.

Darnach ist in § 77 die Frage gegeben nach Durchdringungen von Rotationshyperboloiden mit rechtwinklig schneidenden Axen von analoger Beschaffenheit.

Zur allgemeinen Durchdringung von Kegeln zweiten Grades ist zu bemerken, dass man stets durch Wahl der Axe eine der Ebenen des Quadrupels zur projicierenden Ebene machen und sich dadurch die Vortheile der Bestimmung aus einer Doppelcurve für die Tangenten der Durchdringung sichern kann.

Im Fall der Durchdringung und bei reellen Grenzlagen $\mathbf{H}_o$, $\mathbf{H}_\infty$ der Hilfsebenen liefern die zugehörigen Punkte der Durchdringung A_0, B_0 und resp. C_0, D_0 durch ihre Verbindungsgeraden A_0C_0, B_0D_0 und A_0D_0, B_0C_0 die zwei neuen Ecken des Quadrupels.

pag. 213, 12, Zeile 3 lies concentrischen.
- 223, 4, Zeile 5 lies $J_1 M =$.
- 240, 22, Zeile 11 lies jenen und; § 33 erste Zeile lies § 31, 3.
- 341, B. 7a. Wenn eine Fläche höherer Ordnung einen ihrer Punkte zum Symmetriecentrum hat, so dass auf allen Geraden durch denselben die Schnittpunkte mit ihr paarweise äquidistant von ihm liegen, so ist die Fläche mit sich selbst in involutorischer Centralcollineation für diesen Punkt als Centrum und die unendlich ferne Ebene als Collineationsebene; ein centrisch collineares Modell derselben ist eine Fläche von derselben Ordnung und Classe von der Eigenschaft, dass die Schnittpunkte auf allen Strahlen durch das Bild jenes Centrums Involutionen bilden, die den einen Doppelpunkt in ihm und den andern auf der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ des Modells haben, d. h. sie ist mit sich involutorisch collinear für jenen als Centrum und diese als Collineationsebene; etc. Für die Bedeutung ihres Schnittes in der Ebene $\mathbf{Q}_1$ vergl. I, p. 150 unten.
- 398, B. 3a. Durch einen höchsten oder tiefsten Punkt der topographischen Fläche (§ 28) geht ein Büschel ihrer Falllinien und jede derselben hat in ihm einen Wendepunkt, weil die daselbst die Fläche in einem ihrer Scheitel osculierende Fläche zweiten Grades concentrische ähnliche Ellipsen als Niveaulinien liefert und somit der gemeinsame Mittelpunkt ein Symmetriecentrum und folglich ein Wendepunkt ihrer Falllinien sein muss. Die Axen dieser Ellipsen sind die Projectionen von Linien kleinsten und grössten Gefälles.

Für einen Sattelpunkt d. h. einen Punkt mit horizontaler Tangentialebene und reellen Haupttangenten ist die anschmiegende Fläche zweiten Grades ein einfaches Hyperboloid mit diesen als Erzeugenden und die nach oben und unten unendlich nahen Niveaulinien sind conjugierte Hyperbeln mit ihnen als Asymptoten; ihre Axen sind Elemente von zwei Linien grössten und kleinsten Gefälles. Jene wie diese Falllinien sind auch Elemente der Gerinnlinie und resp. der Rückenlinie oder des Thalweges und der Wasserscheide in der Terrainfläche.

Im Allgemeinen sind die Linien des grössten und des kleinsten Gefälles die Verbindungslinien der Wendepunkte der Falllinien; jene diejenigen, wo die beiderseits benachbarten Falllinien dem Punkte ihre hohlen Seiten, und diese die, wo sie ihm ihre erhabenen Seiten zuwenden.

Man vergl. die Ausführungen von Wiener „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ Bd. 2, p. 394.

Zum dritten Bande.

pag. 12, Zeile 2 von unten lies desselben.
- 23, Zeile 4 von oben lies § 18, 5.
- 39, Zeile 10 von oben lies die harmonischen der Paare und Zeile 11 schalte nach Trägers ein: mit diesen.
- 45, Zeile 14 von oben lies $(u^2 - 2u + 2)$.
- 80, Zeile 5 von unten lies gebrochenen negativen.
- 92, letzte Zeile lies A_1P statt A_2P.
- 102, Zeile 11 von unten lies im Nenner von η_2 A_1B_3.
- 108, Zeile 16 von oben lies § 15.
- 109, B. 1, Zeile 5 lies E_{kj}.
- 246, letzte Zeile füge hinzu § 69 f.
- 253 füge vor Zeile 7 von unten hinzu: Mit $b^2 = -ad$ fallen die Doppelelemente zusammen in $\lambda_{1,2} = b:a$ und die Gleichung der Involution giebt in der mit a multiplicierten Form

$$a^2\lambda\lambda_1 - ab(\lambda + \lambda_1) - ad = 0$$

die Auflöung $\lambda_1 = b:a$, nach der die entsprechenden aller Elemente mit den Doppelelementen zusammenfallen. Es ist die parabolische Involution von I, p. 91 und weiterhin § 32, 10; § 33, 5.
- 257, Zeile 16 von unten lies $(\mu - \nu)$.
- 300 und 301 steht dreimal **P** wo es P sein sollte.
- 343, Zeile 15 von unten lies vierfach berührenden.
- 378, Zeile 11 von unten lies dasselbe.
- 407, Zeile 3 von oben lies $(2n + 1)$.
- 414. Zu B. 3 füge hinzu: Entsprechen sich auch die Einheitpunkte, so werden die a_{ii} gleich Eins und wir haben Coordinatengleichheit entsprechender Elemente; ebenso für die Reciprocität, wenn die F.-Elemente A_i und $\mathbf{A}_i^{*'}$ sowie auch die E.-Elemente E und $\mathbf{E}^{*'}$ einander direct entsprechen. Die Auftragung derselben projectivischen Coordinatenwerthe nach verschiedenen fundamentalen Gruppen liefert entsprechende Elemente collinearer oder reciproker Figuren, je nachdem sie in beiden als x_i oder ξ_i oder in der einen als x_i und in der andern als ξ_i gedacht sind.
- 434, Zeile 9 von oben lies Mittelpunkt.
- 445, Zeile 7 von oben lies auf S'.
- 446, 448, 450 lies in der Ueberschrift C statt B; auf 561 lies 80.
- 449, Zeile 13 von unten lies gleichseitige.
- 456, Zeile 5 von oben lies mit der.
- 471, Zeile 8 von oben lies aus der.
- 477, lies Fig. 43 statt Fig. 3.
- 495, Fig. 45. Der oberste Punkt OP' statt OP.
- 515, - 48. Am Scheitel des Strahlenbüschels über $ABCA^*B^*C^*$ fehlt der Buchstabe X.
- 527, Zeile 1 oben lies Tangenten.
- 537, Fig. 50. Der Scheitelpunkt rechts ist S', nicht S.
- 562, Zeile 4 von oben lies diese durch.
- 592, Zeile 12 von unten lies $\alpha_{21}\alpha_{12}(\alpha_{13} + \alpha_{31})x_2x_1$ statt $= \alpha_{21}\alpha_{12}(\alpha_{12}\alpha_{31})x_2x_1$.

Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.

Dritter Theil.

Construierende und analytische Geometrie der Lage.

A. Die Grundlagen der Geometrie, die imaginären Elemente, die Coordinaten und Parameter.

1. Ein Rückblick auf das im ersten und zweiten Bande dieses Werkes durchmessene Gebiet der darstellenden Geometrie im gebräuchlichen Wortsinne lässt hervortreten, dass die graphische Untersuchungsmethode und Behandlungsweise in zweierlei Sinn zur Entwickelung gekommen ist. Zuerst gleichzeitig mit ihrer Begründung in der Methodenlehre als eine strenge Methode der Untersuchung der Eigenschaften räumlicher Gebilde, in Zurückführung derselben auf gewisse einfache Elementargebilde (vergl. I, Abschn. A., Ueberblick p. 108 f.), welche mit grosser Natürlichkeit und Bestimmtheit gerade durch diese hervortraten und die wir dann als erfolgreich verwendbar in der Theorie der Curven und Kegel zweiten Grades im ersten Bande (Abschn. B) und sodann in der Theorie der Flächen zweiten Grades und noch in der der windschiefen Regelflächen im zweiten Bande (Abschnitte B und C^a) befunden haben.

Wir haben aber schon da nicht so vollständig wie in der Theorie der Kegelschnitte die consequente Ableitung aus einem geometrischen Grundgesetz zu unserer Aufgabe gemacht; wir haben vielmehr unbedenklich einerseits Begriffe und Vorstellungen wie die von Ordnung und Classe der Curven und Flächen zu Hilfe genommen, die wesentlich aus analytischem

Boden entsprungen sind (II, §§ 1, 4, 19—22 f., 27, 29 f., 50—52, 55 f., 60), und wir haben anderseits überall die graphische Behandlungsweise ihrer Natur gemäss auch dann angewandt, wenn z. B. Curven für sich oder als erzeugende Curven von Flächen nicht durch ein bekanntes des mathematischen Ausdruckes fähiges Gesetz, sondern nur de facto, durch ihre Bilder u. s. w. bestimmt waren (II, §§ 3 f., 17 f., 28; besonders aber in dessen letztem Abschnitt von den Rotations- und Schraubungs-Flächen). Es ist klar, dass dies insbesondere mit den praktischen Zwecken zusammenhängt, denen die darstellende Geometrie in erster Linie ihren Ursprung und ebenso ihre Pflege in der Gegenwart verdankt. Man könnte vom praktischen Standpunkte aus sogar geneigt sein, auf Alles das zu verzichten, was über die Grundsätze und die Ausübung der graphischen Behandlungsweise in dem so bezeichneten Sinne hinausgeht, wenn man nicht z. B. fände, dass das tiefere wissenschaftliche Eingehen allein strenge Constructionen ermöglicht, wie sie in der graphischen Behandlung der Kegelschnitte, der Flächen zweiten Grades und ihrer Durchdringungscurven, etc. so nothwendig sind; Constructionen, die die Genauigkeit und Schärfe, also den praktischen Werth der Arbeit, sehr erhöhen. Anderseits muss man, wie wenig man sich auch von nur sogenannt praktischen, beschränkten Gesichtspunkten leiten lasse, im Laufe der Entwickelung an einem so ausgedehnten und durch die Tradition so bestimmt vorgeschriebenen Material doch an zahlreichen Fragen vorübergehen, die wohl aufzuwerfen wären und deren gründliche Erörterung und Erledigung vom Standpunkte einer systematischen und strengen Behandlung sehr wünschenswerth wären. Eine solche Erörterung hat wohl hier und da nicht unterlassen werden können, ohne selbst die Förderung des Hauptzweckes unserer Untersuchungen zu beeinträchtigen, die Entwickelung und Durchbildung des räumlichen Anschauungsvermögens an der Hand der graphischen Methode bis zu einem solchen Grade, dass die sichtbare Construction schliesslich entbehrlich wird, weil der Gedanke und die geistige Anschauung mit Sicherheit den räumlichen Constructionen folgen und sie ausführen.

In diesem Sinne besonders ist die Wiederaufnahme der systematischen Entwickelung erforderlich, welche wir in der Methodenlehre (I, Abschn. A und B, und § 44 f.) theils ausführten, theils nur skizzierten; d. h. die Weiterentwickelung der Geometrie der Lage, von der der Inhalt jener Abschnitte den elementaren Haupttheil bildet; und die auch in ihren weiteren Entwickelungen bezeichnet werden darf als die rein wissenschaftliche Fortsetzung der darstellenden Geometrie. Denn beiden ist der Grundgedanke der Untersuchung, der der Vergleichung, gemeinsam: der Vergleichung des Bildes mit dem Original in der Darstellung, der Vergleichung der projectivisch verwandten Figuren in der reinen Geometrie.

Wir sahen überdies schon früher (vergl. I, §§ 21, 31 f., (36[b]) f.), dass die Beschränkung auf das ersichtlich Construierbare weder zweckmässig noch auch nur zulässig ist, wenn nicht das Gleichartige in scheinbar Disparates zerfallen soll, und wenn man nicht das Unwesentliche zum entscheidenden Hauptmoment machen will; wir werden also in einer solchen ergänzenden Untersuchung auf die nicht reellen Elemente besondere Rücksicht zu nehmen haben.

Weil aber der wissenschaftliche Werth einer Untersuchung vor Allem an der Sicherheit ihrer Voraussetzungen hängt, so haben wir uns zu erinnern, dass die Lehren der Elementargeometrie und der Trigonometrie, die wir bei der Entwickelung der Elemente der Geometrie der Lage im ersten Bande benutzten (§§ 10, 13, 15 f., 18 u. s. w.), sich selbst zumeist als Specialfälle projectivischer Beziehungen erwiesen haben; wie die Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Figuren als specielle Fälle ihrer Collineation, wie die Begriffe von Winkelgleichheit und von Rechtwinkligkeit als solche der Projectivität und Involution im Strahlen- und Ebenen-Büschel u. s. w. Und wir müssen daraus schliessen, dass eine Feststellung und Begründung der fundamentalen Begriffe und Wahrheiten unseres Wissenschaftsgebietes **ohne** Voraussetzung und Benutzung jener Hilfsmittel nothwendig ist. Und wir müssten eben dies vor allem Andern vollständig durchführen, weil es die Grundlagen des Ganzen betrifft, — wenn es sich nicht hier wie auch in andern Gebieten der

Wissenschaft verhielte, dass eine solche Untersuchung, wenn sie vollständig sein soll, nicht den Anfang oder die Mitte, sondern nur den Schlussstein des Baues bilden, und dass man zu ihr nur durch einen stufenweisen Aufbau gelangen kann. Wir versagen uns daher hier die reine Entwickelung der projectivischen Geometrie aus den fundamentalen Anschauungen der geraden Linie und der Ebene, und den Nachweis, wie aus derselben das Maass und eine Geometrie des Maasses entspringt; wenigstens insofern als diess auch erfordern würde, die perspectivische Raumansicht aufzugeben, oder genauer gesagt über das Unendlichferne des Raumes keinerlei Voraussetzungen zu machen, weil das Unmessbare offenbar nur auf Grund der Einsicht in die Art und Weise der Messbarkeit definiert werden kann. Aber indem wir an der perspectivischen Raumansicht festhalten (I, Einleitung p. 4 f.), wollen wir doch die Grundbegriffe in den folgenden Paragraphen einer neuen Untersuchung und Sichtung unterwerfen, bei welcher von Voraussetzungen aus Ergebnissen der Elementargeometrie kein Gebrauch gemacht wird.

2. In den Projections- oder Abbildungs-Methoden fanden wir die beiden Operationen der Scheinbildung und der Schnittbildung mit einander verbunden (I, Einleitung p. 3, Abschn. A, Ueberblick p. 108 f.), aus dem projicierenden Schein des Objects schneidet die Tafelebene das Bild. Insbesondere ausgehend von der Anschauung einer Geraden als Verbindungslinie einer stetigen Folge oder einer Reihe von Punkten $A, B, \ldots$ oder als Schnittlinie einer stetigen Folge oder eines Büschels von Ebenen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ erhalten wir als den Schein der ersteren aus einem Punkte und als den Schnitt des letzteren mit einer Ebene die stetige Folge der Strahlen oder Geraden $a, b, \ldots$ durch einen Punkt in einer Ebene oder das Strahlbüschel. Als Schnitt des Ebenenbüschels mit einer Geraden entsteht wieder die Punktreihe und als Schein der Punktreihe aus einer Geraden das Ebenenbüschel, sodass die drei Grund- oder Elementar-Gebilde erster Stufe, die Punktreihe, das Ebenenbüschel und das Strahlbüschel, durch den Prozess der Schnitt- und Schein-Bildung aus einander hervorgehen. Man sieht daraus, dass sie unter Voraussetzung der perspectivischen Raumansicht gleich viele, nämlich

einfach unendlich viele reelle Elemente haben, und daher auch, dass eine eindeutige Zuordnung oder Beziehung der reellen Elemente des einen zu den reellen Elementen eines gleichartigen oder ungleichartigen zweiten möglich ist, wie wir sie in der Projectivität kennen lernten. Jedem der einfach unendlich vielen wir wollen sagen der u reellen Elemente des einen Gebildes kann ein und nur ein Element des andern entsprechend gemacht oder zugeordnet werden, sodass kein Element des einen oder des andern weder ausser der Zuordnung bleibt, noch auch mehr als einmal in derselben auftritt. Der Vorgang der Projection bewirkt eine solche Zuordnung.

Die Ebene enthält in jeder reellen Geraden eine Punktreihe und um jeden reellen Punkt ein Strahlbüschel; in ihrem Schein aus einem Punkte liefert jede Reihe ein Strahlbüschel und jedes Strahlbüschel ein Ebenenbüschel, sodass das projicierende Bündel zugleich ein Strahlen- und Ebenen-Bündel ist. Die Ebene und das Bündel sind die Elementargebilde zweiter Stufe kraft ihrer gleichartigen Zusammensetzung aus Elementargebilden erster Stufe. Sie enthalten daher gleichviele reelle Elemente, nämlich jenes Punkte resp. Gerade und dieses Gerade resp. Ebenen; zwischen zwei solchen Gebilden ist daher immer auch eine eindeutige Zuordnung ihrer reellen Elemente möglich. Zur Zählung der reellen Punkte resp. Geraden einer Ebene denken wir die von einem Punkte in ihr ausgehenden Geraden als Punktreihen, resp. die in einer ihrer Geraden liegenden Punkte als Strahlenbüschel in ihr und erhalten u mal je u Elemente bei u maliger Zählung des Anfangs-Elementes im einen wie im andern Falle und somit $u^2 - u + 1$ oder $1 + u(u - 1)$ und $u + (u - 1)^2$ als symbolischen Ausdruck der Anzahl der reellen Elemente der Ebene und des Bündels. Die Elementargebilde zweiter Stufe sind Gebilde von zweifach unendlicher Mächtigkeit.

Das Elementargebilde dritter Stufe ist der Raum als Inbegriff seiner reellen Punkte oder seiner reellen Ebenen, und er enthält in beiderlei Sinn gleichviele Elemente. Denn denken wir die u Ebenen eines Büschels und zählen ihre d. h. die in ihnen liegenden Punkte, oder die u Punkte einer Reihe und zählen die durch sie gehenden Ebenen, unter Abrechnung der wiederholten Zählung der u Punkte der Scheitelkante oder

der u Ebenen durch die Gerade der Reihe, so erhalten wir $u(u^2-u+1) - u(u-1)$ reelle Elemente oder $u(u^2-2u+2)$. Wir finden denselben Ausdruck, wenn wir die Punkte aller Geraden durch einen Punkt oder die Ebenen aller Geraden in einer Ebene zählen, aus $1 + (u-1)(u^2-u+1)$. Derselbe ist auch gleich $u + (u-1)^2 + (u-1)^3$. Der Raum ist als Punkt- und als Ebenen-Gebilde von dreifach unendlicher Mächtigkeit oder eine dreifach unendliche Mannichfaltigkeit.

In Folge dessen können auch die reellen Elemente, Punkte oder Ebenen, zweier Räume eindeutig auf einander bezogen werden, wie dies in der speciellen Form der centrischen Collineation in I, Abschn. C und in II § 43 und in der andern Specialform der Polarreciprocität bei den Flächen zweiten Grades in II, § 39 f. uns bereits bekannt worden ist und sogleich allgemein weiter entwickelt werden wird.

Endlich bilden alle reellen Geraden des Raumes ein Elementargebilde vierter Stufe, wie man sieht, wenn man die Punkte einer Ebene als Strahlenbündel resp. die Ebenen durch einen Punkt als Strahlenebenen betrachtet; man erhält in beiden Fällen $[1 + u(u-1)][2 + u(u-2)]$ oder

$$(u^2-u+1)^2 - (u-1)(u^2-u+1)$$

d. i. auch $$(u^2-2u+2)(u^2-u+1)$$

und $$u + 2(u-1)^2 + (u-1)^3 + (u-1)^4$$

als die symbolische vierfach unendliche Anzahl der reellen Geraden des Raumes. Eine eindeutige Zuordnung der reellen Geraden entsprechender Räume findet bei den vorerwähnten Beziehungen der centrischen Collineation und der Polarreciprocität von selbst statt.

Wie diese Elementargebilde allen geometrischen Begriffsbildungen und Untersuchungen zum Grunde liegen, sei nun an der Erinnerung eines Beispiels aus den Untersuchungen des Bandes II, der Lehre von den Charakteren einer Curve (a. a. O. § 22 f.) hervorgehoben. Von der Erzeugung der Curve als stetige Reihe ihrer Punkte aus (Element ds) zur Vorstellung ihrer Tangenten (Element $d\theta$) und Schmiegungsebenen (Element $d\eta$) und also ihrer entwickelbaren Fläche kommend, lässt man die Reihe ihrer Charaktere aus der Ueberlegung ihrer Beziehungen zu den Elementargebilden entspringen.

Von der ersten Stufe liefern die Punktreihe und das Ebenenbüschel in der Zahl der Punkte, die auf Tangenten der Curve liegen, und der Ebenen, die durch solche gehen, den mit r und als Rang bezeichneten Charakter des Systems; das Strahlbüschel durch die unter seinen Strahlen, welche einen Punkt der Curve enthalten, und diejenigen, die in einer Schmiegungsebene derselben liegen, die Ordnung m und die Classe n des Systems. Unter den Gebilden zweiter Stufe fügt die Ebene als Punktort zu den ihr angehörigen Punkten der Curve (m) die Punkte in ihr hinzu, in welchen sich je zwei nicht benachbarte Tangenten der Curve begegnen oder die der Doppelcurve der entwickelbaren Fläche angehören, Anzahl x; und als Ort ihrer Geraden sondert sie aus den unendlich vielen, die in Schmiegungsebenen liegen und die zugehörige Spur der entwickelbaren Fläche bilden, diejenigen aus, welche in je zwei Schmiegungsebenen zugleich enthalten oder Doppeltangenten dieser Spur sind, Anzahl g; und der Punkt als Strahlenbündel hebt unter den unendlich vielen, die durch Punkte der Curve gehen oder Erzeugende ihres projicierenden Kegels sind, die hervor, welche je zwei ihrer Punkte abbilden, die Doppelerzeugenden des projicierenden Kegels, Anzahl h; der Punkt als Ebenenbündel stellt neben die durch ihn gehenden Schmiegungsebenen (Anzahl n) die unter seinen Ebenen, welche je zwei Tangenten der Curve enthalten und also zur doppeltberührenden Developpabeln der Curve gehören, Anzahl y. Mit Hinzufügung der singulären Elemente eines solchen Gebildes, die im Allgemeinen auftreten müssen — Ausnahme die Curve dritter Ordnung — stationärer Punkt, stationäre Schmiegungsebene und stationäre Tangente — Anzahlen β, α, θ —, Schmiegungsebene, welche die Curve anderwärts berührt, und Tangente, welche sie anderwärts schneidet, und derjenigen einfachen, welche auftreten können: Schmiegungsebene, welche die Curve anderwärts zum zweitenmal osculiert, Curvenpunkt, durch den noch drei andere benachbarte Schmiegungsebenen gehen oder der in zwei Aesten der Curve liegt, und Tangente, welche die Curve anderwärts zweimal trifft oder insbesondere sie nochmals berührt — hat man die für die Untersuchung nothwendigen Anschauungen gebildet. Und wir können noch hinzufügen, dass die Entwickelung der Developpabeln ($d\eta = 0$),

die Bildung des Richtungskegels der Curve ($ds = 0$) und die Rectification oder die Ueberführung der Curve in eine gerade Reihe und der Developpabeln in das zugehörige Ebenenbüschel ($d\theta = 0$) die einzigen Operationen sind, welche demselben Gedankengang entspringen (a. a. O. § 2, p. 12 f.).

1) Wie viele Gerade schneiden eine feste Gerade? Da $(u^2 - u + 1)$ die Zahl der Geraden durch einen Punkt ist, so gehen durch jeden Punkt der festen Geraden ausser ihr selbst $u(u - 1)$ Gerade und die fragliche Zahl ist $u^2(u - 1)$, weil die Gerade u Punkte enthält.

2) Ist die feste Gerade unendlich fern und fragt man nach der Zahl der sie schneidenden, welche nicht in der unendlich fernen Ebene liegen, so sind von der vorigen Zahl noch die $u(u - 1)$ andern Geraden der unendlich fernen Ebene abzuziehen, d. h. die gesuchte Anzahl ist $u(u - 1)^2$.

3) Zu einer festen Geraden sind parallel, ohne in der unendlich fernen Ebene zu liegen, $u(u - 2)$ andere Gerade.

4) Die Zahl der Transversalen zu zwei windschiefen Geraden ist u^2, weil aus jedem Punkte der einen u derselben nach den Punkten der andern gehen. Zu drei windschiefen Geraden erhält man u Transversalen, weil durch jeden Punkt der einen eine solche Transversale nach den beiden andern geht.

5) Ueber einer geraden Punktreihe bildet man von jeder sie nicht schneidenden Geraden aus ein Ebenenbüschel, also insgesammt $(u - 1)^4 + 1$. Desgleichen über einer geraden Punktreihe aus jedem ihr nicht angehörigen Punkte ein Strahlbüschel, d. h. insgesammt deren $(u - 1)^3 + (u - 1)^2$ oder $u(u - 1)^2$. Nach einem Strahlbüschel gehen aus allen Punkten des Raumes, die nicht in seiner Ebene liegen, projicierende Ebenenbüschel, d. h. insgesammt $(u - 1)^3$.

6) Einem Kegelschnitt legen wir u reelle Punkte und reelle Tangenten bei, weil von jedem Element eines bei der Erzeugung mitwirkenden Elementargebildes erster Stufe ein Punkt oder eine Tangente desselben erzeugt wird. Ebenso viele Erzeugende resp. Tangentialebenen hat ein Kegel zweiten Grades, und, wie wir in 4) sahen, ebenso viele Gerade enthält jede Regelschaar eines einfachen Hyperboloids.

7) Die Zahl der Geraden, die einen Kegelschnitt nur einmal schneiden, die also durch einen Punkt derselben gehen, ohne in seiner Ebene zu liegen, ist $u(u - 1)^2$.

3. Die durchaus eindeutige Beziehung der Elementargebilde gleicher Stufe auf einander, welche durch den Prozess der Projection hervorgebracht wird, bezeichneten wir als Projecti-

vität und die specielle Lage der bezogenen Gebilde bei der Projection als die perspectivische Lage derselben, sodass nach einer Lagenveränderung des einen Gebildes im Allgemeinen nur die als Projectivität zu bezeichnende eindeutige Beziehung beider, nicht aber die perspectivische Lage erhalten bleibt. Für Gebilde erster und zweiter Stufe haben wir auch — mit der schon erwähnten Voraussetzung elementargeometrischer Hilfssätze — die Allgemeinheit der in der perspectivischen Lage erzeugten eindeutigen Beziehung nachgewiesen (I, §§ 17, 23), sodass wir sagen konnten, es seien diejenigen Gebilde erster und zweiter Stufe projectivisch, welche in Folge einer Lagenveränderung des einen perspectivisch werden können. Wir werden für diese Gebilde zeigen, wie die Bewegung hier entbehrlich gemacht werden kann, deren Einführung ganz ähnliche Bedenken gegen sich hat, wie die Benutzung der Elementargeometrie. Wir zeigen nämlich wieder (I, § 16, 7), aber ohne solche Voraussetzungen, dass zwei gleichartige projectivische Elementargebilde erster Stufe identisch sind, wenn drei Elemente des einen mit den entsprechenden Elementen des andern zusammenfallen; und dass bei zwei ungleichartigen projectivischen Elementargebilden erster Stufe alle Elemente des einen in den entsprechenden Elementen des andern liegen resp. durch sie gehen, wenn diess mit drei Elementen und ihren entsprechenden der Fall ist — perspectivische Lage der Gebilde. Damit wird die Construction der projectivischen Elementargebilde erster Stufe aus drei Paaren entsprechender Elemente (I, § 17 f.) sowohl für die drei Fälle der gleichartigen wie für die drei Fälle der ungleichartigen Gebilde begründet; also mit den Symbolen **R**, **E** und **B** für gerade Punktreihen, Ebenenbüschel und ebene Strahlbüschel resp. für die Beziehungen **RR**, **EE**, **BB** und die Beziehungen **RE**, **EB**, **BR**.

Sodann entstehen mit Elementargebilden zweiter Stufe, nämlich Punktebenen **PE**, Strahlenebenen **SE**, Strahlenbündeln **SB** und Ebenenbündeln **EB**, vier projectivische Beziehungen gleichartiger Gebilde oder Collineationen (I, § 22), nämlich **PE**, **PE**; **SE**, **SE**; **SB**, **SB**; **EB**, **EB**. Und in drei zusammengehörigen Paaren sechs solche von ungleichartigen Elementargebilden oder Reciprocitäten, nämlich

PE, SE; SE, SB; SB, PE; PE, EB; SE, EB; SB, EB. Immer entspricht einem Elemente des einen Gebildes ein und nur ein Element des andern, und den Elementen eines Gebildes erster Stufe in jenem entsprechen die Elemente eines Gebildes erster Stufe in diesem nach der Projectivität der Elementargebilde erster Stufe. Man construiert daher aus vier Elementen des einen und den vier entsprechenden Elementen des andern Gebildes alle übrigen entsprechenden Paare von Elementen derselben, also z. B. für **PE, SE** aus vier Punkten A, B, C, D der ersten Ebene und den vier entsprechenden Strahlen a', b', c', d' der zweiten zum Punkte P die entsprechende Gerade p', indem man aus der Projectivität von $(A.BCDP)$ und $(a'.b'c'd'p')$ den Punkt $a'p'$ und aus der von $(B.ACDP)$ und $(b'.a'c'd'p')$ den Punkt $b'p'$ bestimmt, welche beide dann p' als ihre Verbindungsgerade liefern. Die Construction führt zum Ziel, so lange keine drei der gegebenen Punkte resp. Strahlen einem Elementargebilde erster Stufe angehören. (Vergl. I, § 23.)

Wieder folgen die Sätze von der Identität und von der perspectivischen Lage zweier Gebilde zweiter Stufe. Gleichartige projectivische Elementargebilde zweiter Stufe sind identisch, wenn vier Elemente des einen, von denen keine drei demselben Gebilde erster Stufe angehören, zusammenfallen mit den entsprechenden vier Elementen des andern. Zwei gleichartige Elementargebilde zweiter Stufe liegen perspectivisch, wenn vier Elemente des einen, von denen nicht drei einem Elementargebilde erster Stufe angehören, mit den vier entsprechenden Elementen des andern in denselben vier Elementen eines dritten Elementargebildes zweiter Stufe liegen. Beide Ebenen haben dann einen und denselben Schein aus einem Punkte resp. beide Bündel denselben Schnitt mit einer Ebene, oder mit andern Worten: sie sind Schnitte desselben Bündels resp. Scheine derselben Ebene. Dann ist das beiden Elementargebilden zweiter Stufe gemeinsame Gebilde erster Stufe, die Punktreihe in der gemeinsamen Geraden der Ebenen resp. das Ebenenbüschel durch den gemeinsamen Strahl der Bündel, beiden Gebilden entsprechend gemein, d. h. alle seine Elemente fallen mit ihren entsprechenden zusammen oder entsprechen sich selbst. Und umgekehrt bedingt die Existenz dieses sich selbst entsprechenden Elementargebildes erster Stufe

die perspectivische Lage der gleichartigen projectivischen Elementargebilde zweiter Stufe, zu denen es gehört.

Diese Sätze gelten auch in dem Grenzfalle noch, wo die Ebenen der Systeme resp. die Scheitel der Bündel sich decken; sie lauten dann: Zwei vereinigte collineare Ebenen sind perspectivisch, wenn sie eine gerade Punktreihe und ebenso wenn sie ein Strahlbüschel entsprechend gemein haben; und zwei concentrische collineare Bündel sind perspectivisch, wenn sie ein Strahlbüschel, und sie sind es auch, wenn sie ein Ebenenbüschel entsprechend gemein haben. In jedem Falle folgt aus dem ersten auch das zweite, zusammen die Charaktere der Centralcollineation in der Ebene und im Bündel. (Vergl. I, §§ 14, 19, 11, 12; Ueberblick zu Abschn. A, p. 110.)

Es ist evident, dass das reciproke Elementargebilde zweiter Stufe in der Ebene zu der perspectivischen Vereinigung von zwei collinearen Ebenen wieder eine solche centrische Collineation in der Ebene giebt; und ebenso das Reciproke perspectivisch vereinigter collinearer Bündel im Bündel wieder eine solche Vereinigung perspectivischer collinearer Bündel. Die entsprechend gemeinsame Reihe und das entsprechend gemeinsame Ebenenbüschel gehen über in das entsprechend gemeinsame Strahlbüschel und umgekehrt. Und bei dem projectivisch-reciproken Uebergange von der Ebene zum Bündel entspringt aus der centrisch collinearen Vereinigung ebener Systeme die der entsprechenden Bündel und umgekehrt; die entsprechend gemeinsame Reihe liefert das entsprechend gemeinsame Ebenenbüschel und das entsprechend gemeinsame Strahlbüschel dort das entsprechend gemeinsame Strahlbüschel hier, während in der perspectivischen Lage jene Reihe das Strahlbüschel und dieses Strahlbüschel das entsprechend gemeinsame Ebenenbüschel der Bündel hervorbringen.

Endlich mit den Elementargebilden dritter Stufe, dem Punktraum **PR** und dem Ebenenraum **ER** erhalten wir die Collineation in zwei Formen (I, § 44) **PR**, **PR** und **ER**, **ER** und dazu die Reciprocität **PR**, **ER**; die letztere bestimmbar aus fünf Punkten A, B, C, D, E und den zu ihnen der Reihe nach entsprechenden Ebenen $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{E}'$, wenn keine vier der ersten oder der letzten Elemente demselben Elementargebilde erster Stufe angehören. Man findet

zum Punkte P die entsprechende Ebene $\mathfrak{P}'$, indem man aus den Projectivitäten der Ebenenbüschel und Punktreihen

$$(AB\,.\,CDEP) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\,.\,\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'\mathfrak{P}'),$$

sodann etwa $(BC\,.\,ADEP)$, $(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\,.\,\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'\mathfrak{P}')$ und endlich $(CA\,.\,BDEP)$, $(\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\,.\,\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'\mathfrak{P}')$ die Punkte $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'$ ermittelt, welche die Ebene $\mathfrak{P}'$ bestimmen.

Denn — um bei dem gewählten Beispiel zu bleiben — die Strahlenbündel vom Scheitel A und vom Scheitel B sind nach den gemachten Festsetzungen resp. den Strahlenebenen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ in der Art reciprok, dass den Strahlen AB, AC, AD, AE die Strahlen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'$ der ersten und den Strahlen BA, BC, BD, BE die Strahlen $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ der letzten entsprechen, somit auch dem Ebenenbüschel $(AB.CDE..)$ die gerade Punktreihe $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'.\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'..)$. Den Strahlen AP und BP, die in diesen Bündeln nach einem beliebigen Punkte P des Raumes gehen, entsprechen Strahlen $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{B}'\mathfrak{P}'$ in den entsprechenden ebenen Systemen, die in der zu P entsprechenden Ebene $\mathfrak{P}'$ liegen, weil der Ebene ABP ein den letzteren Strahlen gemeinsamer Punkt $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{P}'$ entsprechen muss.

Den Ebenen Ag und Bg der Bündel, die eine beliebige Gerade des ungestrichenen Raumes enthalten, entsprechen bestimmte Punkte $\mathfrak{A}'g'$ und $\mathfrak{B}'g'$ der entsprechenden ebenen Systeme, welche in der entsprechenden Geraden g' des gestrichenen Raumes liegen. Und endlich werden durch eine beliebige Ebene Σ des ungestrichenen Raumes die Bündel aus A und B perspectivisch auf einander bezogen, sodass ihnen also das Ebenenbüschel AB entsprechend gemein ist; somit liefern die entsprechenden perspectivischen ebenen Systeme $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$, die die Reihe $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ entsprechend gemein haben, als ihren gemeinsamen Schein das Bündel vom Scheitel S' des gestrichenen Raumes, der jener Ebene Σ entspricht. Und ganz analog für collineare Räume im Allgemeinen, für welche aber der directe Beweis auch erspart werden kann auf Grund des nach den Definitionen offenbaren Satzes: Zwei Systeme, welche zu einem dritten Systeme zugleich reciprok sind, sodass ihre Elementenpaare A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E denselben Elementen $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{E}^*$ derselben entsprechen, sind zu einander collinear mit A, A'; B, B'; etc. als Paaren

entsprechender Elemente. Ebenso sind zwei Systeme zu einander collinear, wenn sie zu dem nämlichen dritten Systeme collinear sind.

Auch folgen wieder die Sätze von der Identität und von der perspectivischen Lage collinearer Räume. Wenn in zwei collinearen räumlichen Systemen fünf Punkte oder Ebenen, von denen nicht vier in einerlei Elementargebilde zweiter Stufe liegen, mit ihren entsprechenden zusammenfallen, so thun dies alle entsprechenden Elemente, oder die Systeme sind identisch.

Haben zwei collineare räumliche Systeme vier und somit alle Elemente eines Elementargebildes zweiter Stufe entsprechend gemein, also ein ebenes System resp. ein Bündel, so liegen sie perspectivisch und haben noch ein zweites Elementargebilde zweiter Stufe, nämlich ein Bündel resp. ein ebenes System entsprechend gemein. Es ist der Fall der centrischen Collineation räumlicher Systeme oder der Relief-Darstellung, den wir oben erwähnten. Es leuchtet aber ein, dass zwei collineare Räume auch ein Elementargebilde nur erster Stufe entsprechend gemein haben können — eine Besonderheit, von der erst weiterhin (Abschn. C unten) näher die Rede sein soll.

Zunächst eröffnet uns die Betrachtung der allgemeinen und der centrischen Collineation den Blick auf die collinearen Umformungen zu allen Figuren und erinnert an die Beispiele von solchen, denen wir in den früheren Entwickelungen begegnet sind. (Vergl. II, p. 116, 161, 336 f., 533.)

Und die Construction reciproker räumlicher Systeme zeigt uns, dass zu jeder Figur in unendlich vielen Arten eine andere construiert werden kann, deren Eigenschaften sich aus denen der ersten ergeben, indem den Punkten, Geraden und Ebenen der einen die Ebenen, Geraden und Punkte der anderen entsprechen unter Uebertragung aller projectivischen Relationen aus der einen in die andere; sodass aus jedem auf die erste Figur bezüglichen Satze über solche Relationen und aus seinem Beweise ein entsprechender, wie man sagt, reciproker oder dualer, auf die zweite Figur bezüglicher Satz nebst seinem Beweise entspringt. Es ist das Gesetz oder Princip der Reciprocität oder der Dualität, welches damit bewiesen ist, nachdem wir es früher in den Elementen der

Geometrie (vergl. I, Abschn. A, Ueberblick; p. 113, 117, 351 f.) aufgezeigt haben und seinen Consequenzen in den Untersuchungen der darstellenden Geometrie der Curven und Flächen vielfach begegnet sind. Man vergleiche II, § 2 die Dualität der Curven und der entwickelbaren Flächen, p. 13 den dualen Charakter der drei graphischen Hauptoperationen, die mit denselben vorzunehmen sind: Entwickelung, Richtungskegelbildung und Rectification; insbesondere bei den Flächen zweiten Grades § 47; bei der darstellend geometrischen Behandlung der krummen Flächen überhaupt § 66, speciell p. 474; und bei den windschiefen Regelflächen § 50 u. s. w., am vollständigsten wieder bei den Regelflächen zweiten Grades § 35 f.

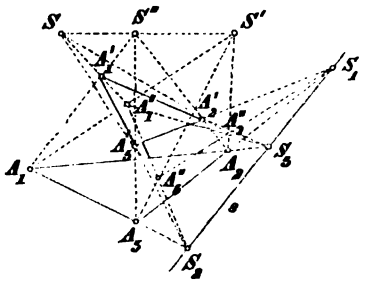
Die Dualität und Reciprocität innerhalb der ebenen Systeme und ebenso von Bündel zu Bündel haben wir in I, p. 115 allgemein, sodann bei der Theorie der Kegelschnitte (vergl. §§ 27 und 28, sodann § 29) und der Kegel zweiten Grades (vergl. Abschn. B, Ueberblick p. 229 f.) kennen gelernt und werden ihr sogleich wieder begegnen. Die fundamentalen Beziehungen der centrischen Collineation im Gebilde zweiter wie in dem dritter Stufe sind, wie für die erste schon bemerkt ist, in sich selbst dual. (Vergl. I, § 14 und § 57.)

4. Zur Begründung des Begriffes der Projectivität der Elementargebilde erster Stufe gehen wir aus von dem direct aus den Elementar-Anschauungen abzuleitenden Satz über perspectivische Dreiecke: Wenn drei Punktepaare A_1, A_1'; A_2, A_2'; A_3, A_3', die Ecken zweier Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$, in Strahlen aus einem Punkte S'' liegen, so begegnen sich die entsprechenden Verbindungslinien oder Seiten derselben in drei Punkten einer Geraden s und umgekehrt: wenn die Seiten zweier Dreiecke in Paaren durch drei Punkte einer Geraden gehen, so liegen ihre drei Paare entsprechender Ecken derselben in Strahlen aus einem Punkte.

Es ist schon in I, § 19, 11 bemerkt worden, dass für die Lage der Dreiecke in verschiedenen Ebenen der Satz unmittelbar evident ist, weil sie dann zwei ebene Querschnitte desselben Dreikants sind; der Punkt S'' ist die Spitze des Dreikants, die Gerade s die gemeinsame Gerade der beiden Schnittebenen. Für die Lage der Dreiecke in derselben Ebene kann

man nun einmal die Figur als eine Projection der vorigen ansehen und erkennt, dass der Satz die Formeigenschaften derselben ausdrückt, welche für alle bildlichen Projectionen (I, Einleitung) bestehen müssen; man kann aber auch den Beweis führen durch Rückgang zum Fall der allgemeinen Lage und es treten dann die elementaren Grundlagen desselben mit besonderer Deutlichkeit hervor. Setzen wir nämlich voraus,

Fig. 1.



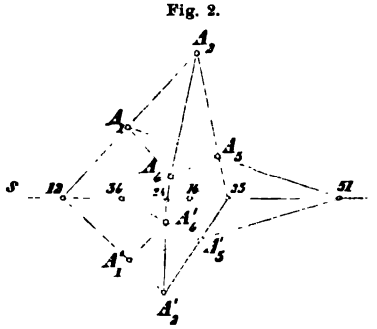
dass die Geraden A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' durch einen Punkt S'' ihrer gemeinsamen Ebene gehen (Fig. 1), um zu beweisen, dass die Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 der Paare von Geraden A_2A_3, $A_2'A_3'$; A_3A_1, $A_3'A_1'$; A_1A_2, $A_1'A_2'$ in einer Geraden s liegen, so ziehen wir nach einem beliebig im Raume gewählten Punkte S die Geraden SA_1', SA_2', SA_3' und nach einem Punkte S' der Geraden SS'' die Geraden $S'A_1$, $S'A_2$, $S'A_3$. Diese schneiden die vorigen der Reihe nach in den Ecken A_1'', A_2'', A_3'' eines neuen zu den beiden ersten Dreiecken zugleich nämlich resp. für S' und S als Centren perspectivischen Dreiecks. Da nun die Geraden A_1A_2, $A_1'A_2'$, $A_1''A_2''$ sich paarweis schneiden, ohne in einer Ebene zu liegen, so müssen sie nach I, p. 113 Defin. 3 rechts durch einen Punkt S_3 gehen; ebenso A_2A_3, $A_2'A_3'$, $A_2''A_3''$ durch einen Punkt S_1 und A_3A_1, $A_3'A_1'$, $A_3''A_1''$ durch einen Punkt S_2. Und diese drei Punkte müssen in einer Geraden s liegen, nämlich in der Durchschnittslinie der Ebenen $A_1A_2A_3$ und $A_1''A_2''A_3''$.

Wenn umgekehrt die Punkte A_1A_2, $A_1'A_2'$; A_2A_3, $A_2'A_3'$; A_3A_1, $A_3'A_1'$ in einer Geraden s liegen, so projicieren wir $A_1'A_2'A_3'$ aus einem Punkte S im Raume auf eine durch s gehende Ebene in $A_1''A_2''A_3''$; dann liegen A_1A_1'', A_2A_2'', A_3A_3'' paarweis in einer Ebene, jedoch nicht alle in derselben Ebene, und sie haben daher einen Punkt S' gemein. In Folge dessen aber gehen A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' sämtlich durch den Schnittpunkt S'' der Geraden SS' mit der Ebene $A_1A_2A_3$. Die Beweise erfordern also nur die Kenntniss der angeführten Definitionen von Punkt und Ebene.

Die analogen Sätze: Wenn drei Paare von Ebenen, die Flächen zweier Trieder, durch Gerade in einer Ebene gehen, so liegen die entsprechenden Schnittlinien oder die Paare der Triederkanten in drei Ebenen eines Büschels; und umgekehrt, wenn drei Paare von Geraden, die Kanten zweier Trieder, in Ebenen eines Büschels liegen, so gehen die entsprechenden Verbindungsebenen durch drei Gerade in einer Ebene — sind ebenso direct anschaulich evident, wie der Satz von den Dreiecken bei räumlicher Lage derselben. Man liest den Ausdruck der bezüglichen Anschauungen aus dem der hierbei gebrauchten ab durch die dualistische Vertauschung der Worte Punkt und Ebene u. s. w. Diese Sätze stehen zur Central-Collineation zweier Bündel in demselben Verhältniss, wie die Sätze von den perspectivischen Dreiecken zur centrischen Collineation vereinigter Ebenen; die Scheine desselben Dreiseits aus zwei verschiedenen Punkten und die Schnitte desselben Dreikants mit zwei verschiedenen Ebenen zur centrischen Collineation vereinigter Bündel resp. vereinigter Ebenen. In der Figur der einen Gruppe hat man auch die der andern.

Die Sätze beider Gruppen werden in der Construction centralprojectivischer resp. centrisch collinearer ebener Systeme oder centralprojectivischer resp. central collinearer Bündel aus drei Paaren entsprechender Elemente auf zwei Systeme von vier Punkten oder Geraden in je einer oder in derselben Ebene und auf zwei Systeme von vier Ebenen oder Geraden durch

Fig. 2.



je einen oder durch denselben Punkt übertragen. Wir sagen z. B. Wenn zwei ebene Vierecke $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $A_1' A_2' A_3' A_4'$ so liegen, dass ihre Seitenpaare $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$; $A_2 A_3$, $A_2' A_3'$; $A_3 A_1$, $A_3' A_1'$; $A_1 A_4$, $A_1' A_4'$; $A_2 A_4$, $A_2' A_4'$ sich in fünf Punkten S_{12}, S_{23}, S_{31}, S_{14}, S_{24} einer Geraden s schneiden, so geht auch das sechste Paar ihrer entsprechenden Seiten $A_3 A_4$, $A_3' A_4'$ durch einen Punkt S_{34} in

dieser Geraden (Fig. 2; die S sind unterdrückt und nur ihre Indices angegeben) und die entsprechenden Eckenpaare liegen auf Geraden durch einen Punkt. Dual entsprechend von zwei vollständigen Vierseiten: Wenn zwei ebene Vierseite so liegen, dass fünf ihrer Eckenpaare in Strahlen aus einem Punkte enthalten sind, so liegt auch ihr sechstes Paar entsprechender Ecken in einem Strahl aus diesem Punkte und die vier Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen in einer Geraden; es sind Centrum und Axe ihrer centrischen Collineation, wenn sie in derselben Ebene gedacht sind — ihr Perspectivcentrum und der Schnitt ihrer Ebenen, wenn in verschiedenen Ebenen. Nur der erste Fall bedarf des Beweises, den wir unten geben, er ist zugleich der Fall der Anwendung.

Sodann im Bündel: Wenn zwei vierflächige Ecken $\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$, $\mathbf{A_1'A_2'A_3'A_4'}$ so liegen, dass fünf Paare ihrer entsprechenden Kanten in Ebenen eines Büschels enthalten sind, so liegt auch das sechste Kantenpaar in einer Ebene dieses Büschels — und dual entsprechend von zwei vierkantigen Ecken $a_1a_2a_3a_4$, $a_1'a_2'a_3'a_4'$.

Beide Sätze sind anschaulich evident für Ecken aus verschiedenen Scheiteln über demselben ebenen Vierseit resp. Viereck; auf die vorigen zurückkommend für Ecken von demselben Scheitel, natürlich über perspectivischen Vierecken resp. Vierseiten.

Aus den Voraussetzungen des ersten Satzes folgt aber (Fig. 2), dass die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ und ebenso $A_1A_2A_4$, $A_1'A_2'A_4'$ für s als Axe und einen Punkt S als Centrum perspectivisch liegen. In Folge dessen geht auch A_4A_4' durch S und somit sind auch die Dreiecke $A_2A_3A_4$, $A_2'A_3'A_4'$ für dasselbe Centrum und, weil die Schnittpunkte von A_2A_3, $A_2'A_3'$ und A_2A_4, $A_2'A_4'$ in s liegen, auch für dieselbe Axe perspectivisch; d. h. es begegnen sich auch A_3A_4 und $A_3'A_4'$ in einem Punkte S_{34} von s. Und für den Satz vom Vierseit folgt aus dem Ausdruck der Voraussetzung der perspectivischen Lage der Dreiseite $a_1a_2a_3$, $a_1'a_2'a_3'$ und der Dreiseite $a_1a_2a_4$, $a_1'a_2'a_4'$ die perspectivische Lage der Dreiseite $a_2a_3a_4$, $a_2'a_3'a_4'$ und damit die Richtigkeit der Behauptung; zu den fünf durch a_1a_2, $a_1'a_2'$; etc. gehenden Strahlen s_{12}, s_{23}, s_{31}, s_{14}, s_{24} durch

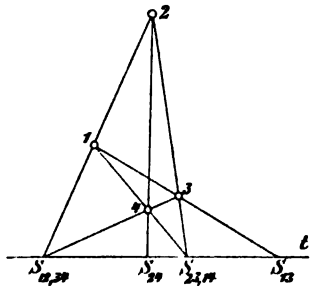
S tritt der sechste s_{34}, der die Punkte $a_3 a_4$, $a_3' a_4'$ mit einander verbindet.

Nach den früheren Entwickelungen (I, § 20, 14. 15) erkennen wir hier schon die Linealconstruction des sechsten Elements der Involution im Elementargebilde erster Stufe, oder die Bestimmung aller Paare derselben aus zwei gegebenen Paaren. Zu den zwei Paaren von Punkten in der Reihe S_{23}, S_{14} und S_{31}, S_{24} liefert das Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$, von welchem zwei Paare der Gegenseiten $A_2 A_3, A_1 A_4$ und $A_3 A_1, A_2 A_4$ durch diese gehen, während die eine Seite $A_1 A_2$ ihres dritten Paares den Punkt S_{12} enthält, durch die andere Seite des dritten Paares $A_3 A_4$ den ihm in der Involution entsprechenden Punkt S_{34} der Reihe; der Satz vom Viereck sagt, dass man durch jedes den Bedingungen entsprechende Viereck denselben Punkt S_{34} erhält. Man kann die Construction als die Auffindung der Ecke A_4 des Vierecks zu drei Ecken $A_1 A_2 A_3$ in den Schnitten von willkürlichen Geraden durch S_{14}, S_{23}, S_{31} formulieren, wie a. a. O. Und zu zwei Paaren von Strahlen eines Büschels s_{23}, s_{14}; s_{31}, s_{24} liefert das Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$, von welchem zwei Paare der Gegenecken $a_2 a_3$, $a_1 a_4$ und $a_3 a_1$, $a_2 a_4$ in diesen liegen, während die eine Ecke $a_1 a_2$ ihres dritten Paares in s_{12} enthalten ist, durch die andere Ecke des dritten Paares $a_3 a_4$ den zu diesem im involutorischen Strahlbüschel entsprechenden Strahl s_{34} u. s. w. wie a. a. O. Endlich liefern die Sätze von den vierflächigen resp. vierkantigen Ecken die Construction der Involution im Ebenenbüschel und eine zweite Form von der Construction der Involution im Strahlbüschel, und man sieht dieselben auf die vorigen zurückkommen.

Man erkennt, dass die vorliegende Entwickelung aus den Definitionen unter Beschränkung auf die Ebene nicht möglich ist, und wird es wesentlich finden, dass es die Beziehung der Involution ist, auf die sie führt; jene Lehre, welche in der Form der Polarsysteme, der Nullsysteme etc. die meisten technischen Anwendungen vermittelt (Abschn. C) und welche auch die Geometrie des Maasses mit der reinen projectivischen Geometrie verbindet und daher in den Constructionen der darstellenden Geometrie von Anfang an als besonders wichtig hervortritt, besonders auch durch den speciellen Fall, den wir in § 5 behandeln.

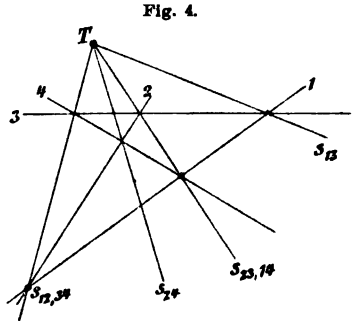
5. Wenn insbesondere S_{12}, S_{34} und ebenso S_{23}, S_{14} in je einen Punkt zusammenfallen (I, § 20, 15), so ist für alle Vierecke, deren Seitenpaare A_1A_3, $A_1'A_3'$ sich in S_{13} auf der geraden Verbindungslinie dieser Punkte schneiden, auch der Schnitt S_{24} von A_2A_4, $A_2'A_4'$ in dieser fixiert (Fig. 3, wo das Viereck 1234 ist); er ist der vierte harmonische zu S_{13} in Bezug auf $S_{12,34}$ und $S_{23,14}$, weil der Satz: In einer Diagonale eines vollständigen Vierecks bilden die zwei Diagonalpunkte mit ihren Schnitten mit dem nicht durch sie gehenden Paar der Gegenseiten eine harmonische Reihe (vgl. I, § 16, 13 links) mit der vorigen Construction das Nämliche besagt.

Fig. 3.



Und wenn s_{12}, s_{34} und ebenso s_{23}, s_{14} in je einen Strahl zusammenfallen (Fig. 4 mit dem Vierseit 1234), so ist für alle Vierseite, deren Eckenpaare a_1a_3, $a_1'a_3'$ sich in s_{13} aus dem Schnittpunkt dieser Strahlen befinden, auch die Verbindungsgerade s_{24} von a_2a_4 mit $a_2'a_4'$ ein Strahl durch diesen, nämlich der vierte harmonische zu s_{13} in Bezug auf $s_{12,34}$ und $s_{23,14}$. Denn der Satz: In einem Diagonalpunkt eines vollständigen Vierseits bilden die zwei durch ihn gehenden Diagonalen mit den Strahlen nach den nicht auf diesen liegenden beiden Gegenecken ein harmonisches Büschel (nur der Form nach verschieden von I, § 16, 13 rechts) ist nur ein anderer Ausdruck der Figur des vorigen.

Fig. 4.



Die übrigen Sätze liefern ebenso specialisiert die Construction des harmonischen Ebenenbüschels und eine zweite Form für die Construction des harmonischen Strahlbüschels; aber beide kommen auf das vorige zurück.

Man kann zusammenfassend sagen, dass es zu jedem von drei Elementen eines Elementargebildes erster Stufe immer ein und nur ein viertes ihm conjugiertes zu den beiden andern harmonisches Element desselben giebt, welches wir nach den vorigen Constructionen finden. Die Construction in der Reihe lehrt, dass für $S_{12,34}$ und $S_{23,14}$ als feste Punkte die conjugierten S_{24}, S_{31} sich in entgegengesetztem Sinne bewegen müssen, sodass sie also gleichzeitig von dem einen jener Punkte ausgehen und zugleich in dem andern ankommen, wobei der eine die endliche Strecke zwischen ihnen und der andere die unbegrenzte durchläuft, in solcher Art, dass dieser im unendlich fernen Punkte dann ist, wenn jener in der Mitte der Strecke sich befindet. Sie lehrt ebenso, dass bei Festhaltung von zwei nicht conjugierten Punkten wie S_{24}, $S_{23,14}$ die Punkte S_{31}, $S_{12,34}$ sich nothwendig in gleichem Sinne bewegen, in der Art, dass beide gleichzeitig von $S_{23,14}$ auf die zu S_{24} entgegengesetzte Seite ausgehen und $S_{12,34}$ den unendlich fernen Punkt in dem Moment erreicht, wo S_{31} in dem zu S_{24} symmetrischen Punkte in Bezug auf $S_{23,14}$ ankommt; und der erste auf der andern Seite aus dem Unendlichen zurückkehrend in dem zu $S_{23,14}$ symmetrischen in Bezug auf S_{24} ankommt, wenn der zweite S_{31} den unendlich fernen Punkt erreicht hat; alsdann erreichen beide gleichzeitig S_{24} und nun durchlaufen beide mit S_{31} voran die endliche Strecke nach $S_{23,14}$, wo sie gleichzeitig ankommen. Ganz Gleiches gilt für die harmonischen Büschel.

Insbesondere folgt aus der Betrachtung dieser Bewegung von zwei conjugierten Elementen der harmonischen Gruppe für zwei Paare A, B und C, D von Punkten in derselben Geraden, die einander nicht trennen — und ebenso für solche Elementenpaare desselben Büschels — die reelle Existenz eines gemeinsamen harmonischen Paares, die wir auf ganz anderem Wege schon kennen gelernt haben und bei wichtigen Gelegenheiten hervortreten sahen. (Vergl. I, § 31, 15 f.; II, §§ 25 und 45.) Denken wir die Elemente A, B, C, D im Gebilde in einerlei Bewegungssinn einander folgend, was der Voraussetzung entspricht, so genügt es, ein Element X aus der Mitte zwischen A und B gegen B hin sich bewegen zu lassen und seine harmonisch

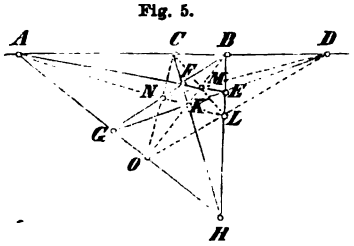
conjugierten X_1, X_2 in Bezug auf AB und CD zu betrachten; nach dem Vorigen rückt X_1 aus dem Unendlichen auf der Seite von CD in derselben Zeit bis gegen B herauf (wo es mit X sich vereinigt), während welcher X_2 aus einer zwischen C und D, aber näher bei C gelegenen Anfangslage etwas näher gegen C hin sich bewegt; es muss also zwischen beiden Elementen ein Einholen des X_2 durch das Element X_1 und nachmaliges Vorauseilen stattfinden. Das Element, in welchem beide zusammentreffen, und die zugehörige Lage von X bilden das fragliche gemeinsame harmonische Paar und es ist aus der Betrachtung zugleich evident, dass es nur ein derartiges Paar giebt; und kein reelles, wenn AB und CD sich trennen.

Bildet man aber ferner die Construction des vierten harmonischen Strahls zu s_{13} in Bezug auf die Strahlen $s_{12,34}$ und $s_{14,23}$ im Büschel, bei der man die Schnittpunkte der Geraden 1, 3 aus einem Punkte von s_{13} mit jenen durch Gerade 2, 4 verbindet, um in ihrem Schnittpunkte einen Punkt des Strahls s_{24} zu erhalten, so sieht man, dass sie zugleich die Constructionsfigur des vierten harmonischen Punktes zu 13 in 1 oder 4 zu ihren respectiven Schnitten mit $s_{14,23}$ und $s_{12,34}$ ist und erkennt, dass der Zusammenhang beider Constructionen durch den Satz ausgesprochen wird: Der Schnitt eines harmonischen Strahlbüschels mit einer Geraden ist eine harmonische Reihe und der Schein einer harmonischen Reihe aus einem Punkte ist ein harmonisches Strahlbüschel. Diese Sätze gestatten aber nach dem vorher erörterten Zusammenhang der Figur zur Construction des harmonischen Ebenenbüschels mit dem vorigen die noch vollständigere und dabei kürzere Fassung: Durch Schnitt- und Schein-Bildung gehen aus einer harmonischen Gruppe in einem Elementargebilde erster Stufe nur wieder harmonische Gruppen in solchen Gebilden hervor.

Endlich zeigen wir noch, dass für $ABCD$ als eine harmonische Gruppe (Fig. 5), in welcher die Paare AB, CD conjugiert sind oder einander trennen, auch $BACD$, $ABDC$, $BADC$ solche harmonische Gruppen sind — natürlich aus dem zur Construction der ersten benutzten Viereck $EFGH$; nicht minder aber auch die Gruppen $CDAB$, $CDBA$, $DCAB$ und $DCBA$. Aber diese aus dem Viereck $LMNO$, welches für K

als den Schnittpunkt der Geraden DEG und CFH durch die Schnittpunkte der Geraden AK, BK mit den von B, A resp. ausgehenden Gegenseiten des Vierecks $EFGH$ bestimmt wird. Dass die Geraden LM, NO durch C und dass ebenso MN, LO durch D gehen, zeigt der Fundamentalsatz von der harmonischen Gruppe angewandt auf die Vierecke $LEMK$, $NGOK$, $MFNK$ und $OHLK$ respective. Die harmonische Gruppe erlaubt also acht die Harmonie nicht störende Anordnungen ihrer Elemente.

Fig. 5.



6. Denkt man nun in einem Elementargebilde erster Stufe irgend drei Elemente A, B, C, so construiert man aus ihnen als harmonisch conjugiert zu A, B, C in Bezug auf BC, CA, AB resp. drei neue Elemente D, E, F; bildet man dann die vierten harmonischen zu jedem der sechs Elemente in Bezug auf die aus den jeweilen fünf übrigen zu bildenden zehn Paare, so erhält man jede der drei schon vorhandenen harmonischen Gruppen viermal und überdiess 48 neue Elemente in den übrigen harmonischen Gruppen, sodass man nun 54 Elemente des Gebildes hat, zwischen denen bereits 51 harmonische Gruppen bestehen. Verfährt man also mit ihnen auf gleiche Weise, so entstehen $27 . 53 . 52$ harmonische Gruppen, unter denen die 51 vorigen vierfach erscheinen, d. h. 74208 neue Gruppen mit ebenso vielen neuen Elementen. Es ist klar, dass sich auf dem Wege der harmonischen Gruppenbildung das Gebilde rasch in seinem ganzen Gebiet mit Elementen überdeckt. Es giebt kein Elementenpaar des Gebildes, noch so nahe beisammen, zwischen welchen nicht so, durch die Construction des vierten harmonischen, andere Elemente gefunden werden; und umgekehrt von der Erfüllung eines solchen Intervalles ist die Ueberdeckung des ganzen übrigen Gebietes des Gebildes mit Elementen aus der Construction die nothwendige Folge. Wir sagen daher, dass man durch die harmonische Zuordnung von drei gegebenen Elementen des Gebildes zu allen übrigen Elementen desselben müsse gelangen können, nämlich zu allen

rationalen direct durch Construction und zu den übrigen, also den irrationalen, durch Grenzübergang von Constructionsfolgen — wofür man vergl. I, § 23, 4 und unten § 17, 4. Wenn also in zwei gleichartigen aufeinander liegenden Gebilden von drei Elementen A, B, C und den sich mit ihnen deckenden Elementen A', B', C' aus in gleicher Folge die Construction harmonischer Elemente des ersten und des zweiten vollzogen wird, so decken sich alle erhaltenen Elemente der Reihe nach und es wird das nämliche Gebilde mit allen seinen rationalen Elementen erzeugt. Und wenn in zwei verschiedenen gleichartigen oder ungleichartigen Elementargebilden erster Stufe von drei Elementen A, B, C des einen und drei als ihnen entsprechend festgesetzten Elementen A', B', C' des andern aus nach derselben Reihenfolge in beiden Gebilden die Construction der harmonischen Gruppen ausgeführt wird, sodass die Elemente D, E, F... des einen und die Elemente D', E', F'... des andern einander durch die gleiche Ordnung in der Folge der Operationen entsprechen, so müssen, wenn man die Elemente des einen Gebildes in dem bestimmten Bewegungssinne etwa ABC ordnet, also nach den obigen Festsetzungen in der Folge $AFBDCE$ unter Heranziehung der ersten Gruppe von Construierten allein, auch die entsprechenden Elemente $A'F'B'D'C'E'$ in dem bestimmten Sinne $A'B'C'$ auf einander folgen und alle rationalen Elemente beider Gebilde müssen sich so einordnen. Aber auch die irrationalen. Denn wollte man annehmen, dass die Uebereinstimmung des Sinnes der Bewegung oder Aufeinanderfolge für die irrationalen Elemente in Folge des Ueberganges durch Näherungswerthe zu einer Grenze Ausnahmen erleiden könnte, so hiesse diess zulassen, dass zwei Paaren von solchen Elementen des einen Gebildes, die einander nicht trennen, wie etwa vw, xy im andern Gebilde zwei Paare von Elementen $v'w'$, $x'y'$ entsprechen könnten, die einander trennen; und es würde daraus folgen, dass dem reellen gemeinsamen harmonischen Paar von jenen das nicht reelle gemeinsame harmonische Paar von diesen entspreche. Wird also verlangt, dass den reellen Elementen des einen Gebildes ausnahmslos reelle Elemente des andern entsprechen sollen, wie man es gern als selbstverständlich betrachtet, so muss die Uebereinstimmung des Sinnes

der Aufeinanderfolge auch für die entsprechenden irrationalen Elemente beider Gebilde durchweg stattfinden.

Nach diesen Ueberlegungen können wir die Projectivität der Elementargebilde erster Stufe für ihre reellen Elemente in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der darstellend geometrischen Entwickelung und doch ebenso unabhängig von elementargeometrischen Kenntnissen wie von den Vorgängen der Bewegung in doppelter Weise definiren; wir können sagen, projectivische Elementargebilde erster Stufe sind solche, in denen jeder harmonischen Gruppe des einen eine harmonische Gruppe des andern entspricht; und sie sind solche, von denen das eine durch eine endliche Reihe von Schnitt- und Schein-Bildungen aus dem andern abgeleitet werden kann. Wenn bei dem Vorgange der Schnitt- und Schein-Bildung die ausnahmslose Uebertragung und Uebereinstimmung des Sinnes der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente selbstverständlich ist (I, § 17), sowohl für rationale wie für irrationale Elemente, so wissen wir nun, dass das auch ein Ergebniss der andern Erklärung ist, sobald wir fordern, dass reellen Elementen ausnahmslos wieder reelle Elemente entsprechen. Im Uebrigen wird die Identität beider Definitionen durch das auch vorher einspruchsfrei entwickelte Ergebniss gegeben, dass durch Schnitt- und Schein-Bildung aus harmonischen Gruppen nur wieder harmonische Gruppen entspringen.

Die so definierten Paare von Elementargebilden erster Stufe nennen wir reell projectivisch; wir werden aber bald zeigen, dass durch die reelle Zuordnung der Elemente auch die imaginären Elemente der Gebilde einander nach derselben Projectivität zugeordnet sind.

Wir ziehen aus diesen Erklärungen die nächsten wichtigen Folgerungen.

Drei Elemente bestimmen durch ihre Aufeinanderfolge den Sinn innerhalb des Elementargebildes erster Stufe, dem sie angehören. Reell projectivische Gebilde derselben Art sind völlig identisch, d. h. alle ihre Paare entsprechender Elemente fallen zusammen, wenn sie drei Elementenpaare zusammenfallend oder drei Elemente entsprechend gemein haben — der oben schon durch Con-

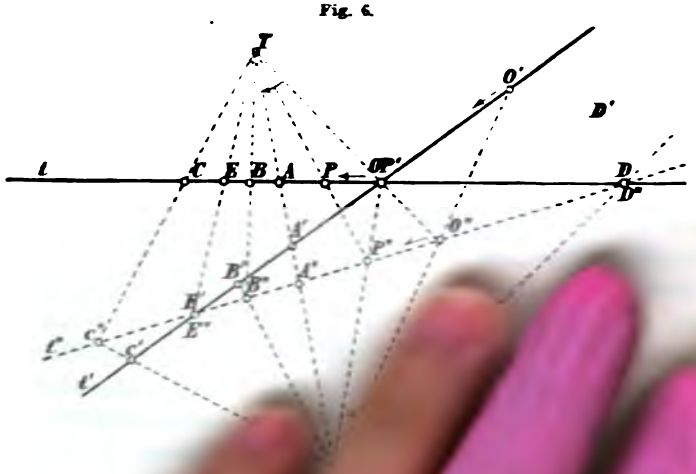
struction harmonischer Gruppen erörterte Fall. Es folgt daraus, dass zwei vereinigt liegende aber nicht identische reell projectivische Elementargebilde erster Stufe nicht mehr als zwei zusammenfallende Elementenpaare oder zwei sich selbst entsprechende Elemente haben können. Ebenso ergiebt sich für ungleichartige reell projectivische Elementargebilde erster Stufe, dass das eine ein Schnitt oder Schein des andern ist, d. h. dass sämtliche entsprechende Elementenpaare in einander oder incident liegen, wenn drei Elemente des einen in den entsprechenden drei Elementen des andern gelegen sind; sowie dass ohne diese incidente oder perspectivische Lage nicht mehr als zwei Elemente des einen in den entsprechenden Elementen des andern liegen können.

Und es folgt, dass zwei gleichartige projectivische Elementargebilde erster Stufe zu einander perspectivisch liegen, d. h. Schnitte oder Scheine desselben dritten Gebildes sind, wenn sie ein Element entsprechend gemein haben. Denn zwei andere entsprechende Elementenpaare bestimmen zwei Elemente jenes dritten, welche mit dem gemeinsamen Element beider die drei zur Identität der aus dem ersten und zweiten Gebilde entspringenden Schnitte oder Scheine nothwendigen Elemente liefern. So z. B. in den Strahlbüscheln $T.abo$ und $T'.a'b'o'$ derselben Ebene, wenn o und o' in dem gemeinsamen Strahl TT' der Büschel vereinigt sind; die Strahlenpaare a, a' und b, b' erzeugen als ihre Schnitte zwei Punkte der perspectivischen Axe s, welche mit ihrem Schnittpunkt O mit o die drei Elemente liefern, welche den Schnitten von s mit den Büscheln T, T' entsprechend gemein sind und daher auf Grund ihrer Projectivität die vollständige Identität dieser Schnitte bedingen. Und so mit Vertauschung der kleinen und grossen Buchstaben in den projectivischen Reihen mit sich selbst entsprechendem Schnittpunkt oder in zwei projectivischen Ebenenbüscheln, welche die Verbindungsebene ihrer Scheitelkanten entsprechend gemein haben, und in zwei projectivischen Strahlbüscheln von demselben Scheitel, aber in verschiedenen Ebenen, die jedoch die Schnittlinie derselben zum entsprechend gemeinsamen Strahl haben. (Die Zeichnung der entsprechenden Figuren ist sehr zu empfehlen,

den gemeinsamen Strahlbüschel-Schnitt der Ebenenbüschel und den gemeinsamen Ebenenbüschel-Schein der Strahlbüschel.) Auf den Fall projectivischer Reihen in windschiefen Geraden und projectivischer Ebenenbüschel aus windschiefen Geraden, als Schnitte und Scheine desselben dritten Elementargebildes erster Stufe führt uns sogleich die wichtigste Anwendung dieser Ergebnisse. Denn dieselbe besteht in der **Construction projectivischer Elementargebilde erster Stufe von allgemeiner Lage aus drei Paaren entsprechender Elemente**, da diese immer geschehen kann durch **Vermittelung eines dritten Elementargebildes erster Stufe, welches zu den beiden gegebenen zugleich perspectivisch liegt.**

Die Anwendung dieses Grundgedankens liefert uns für **zwei projectivische Reihen** t, t' in derselben Ebene aus den Paaren A, A'; B, B'; C, C' die Construction des § 17 in I, nach welcher man aus zwei willkürlich in der Verbindungslinie eines Paares AA' z. B. gewählten Scheiteln T, T' die Reihen A, B, C und A', B', C' resp. projiciert (Fig. 6)

Fig. 6.

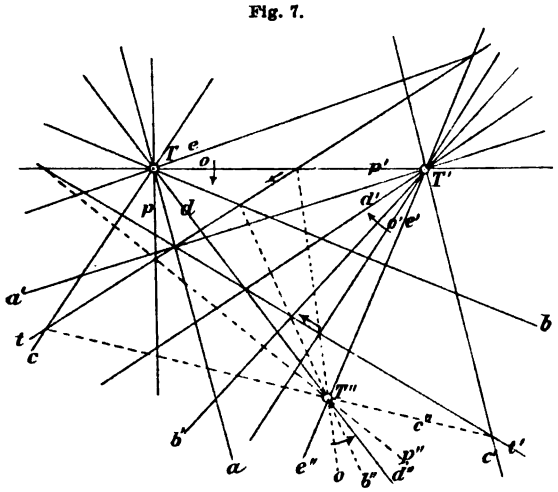


und die zu beid
geraden von T
bildet; jeder
T resp. T'

Punkten X und X' schneiden. Die Figur giebt die aus den Schnittpunkten von tt'' und $t't''$ entspringenden Paare D, D' und E, E', sowie die entsprechenden O', P zum gemeinsamen Punkt OP' der Reihen.

Wir erhalten ebenso für projectivische Büschel $T.abc$, $T'.a'b'c'$ in derselben Ebene auf zwei willkürlichen Transversalen t, t' aus dem Schnittpunkte eines Paares z. B. a, a' perspectivische Reihen und in dem Büschel aus ihrem Perspectivcentrum T'' ein drittes zu beiden gegebenen perspectivisches Büchel, so dass jeder Strahl x'' desselben zwei entsprechende Strahlen x, x' der T, T' liefert. (I, § 18.) Die Fig. 7 zeigt die Construction der aus den Verbindungsgeraden

Fig. 7.



von TT'' und $T'T''$ entspringenden Paare d, d' und e, e', sowie die der entsprechenden o', p zum gemeinsamen Strahl op' der Büschel.

Wir haben in I, § 18, 3 und § 21, 7 gezeigt, dass jeder Punkt der Ebene der Büschel durch diess Verfahren in zwei Arten zum Perspectivcentrum T'' gemacht werden kann, und die aus der Wahl von t in a', b' oder c' und von t' in a, b, c resp. hervorgehende bequeme Specialität ist gebührend betont worden; natürlich gilt das Analoge für die Reihen und ihre Perspectivaxe t''. Wir wollen auch weiterhin die aus der Wahl

von T' in einem Punkte der Reihe t und von T in dem entsprechenden Punkte von t' entspringende, durch drei Punkte bestimmte Perspectivaxe, die Verbindungsgerade der Punkte O', P, die dem gemeinsamen Punkte OP' entsprechen, die Perspectivaxe der Reihen nennen; und ebenso das aus t' in a, b oder c und t in a', b' oder c' entspringende Perspectivcentrum, den Schnittpunkt der Strahlen o', p, die dem gemeinsamen Strahl entsprechen, das Perspectivcentrum der projectivischen Büschel nennen.

Hat man zwei projectivische Ebenenbüschel

$$(t\,.\,\mathbf{ABC}\ldots),\quad (t'.\,\mathbf{A'B'C'}\ldots)$$

mit sich schneidenden Scheitelkanten, so wird man durch die Schnittlinie von zwei entsprechenden Ebenen $\mathbf{AA'}$ etwa Ebenen $\mathbf{T}$, $\mathbf{T'}$ legen, welche $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und resp. $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$ in entsprechenden Strahlenpaaren zweier projectivischer Strahlbüschel schneiden, die denselben Scheitel tt' und den Schnittstrahl ihrer Ebenen entsprechend gemein haben, also Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels t'' sein müssen. Zum Zwecke der Construction wird man aber etwa die gegebenen Büschel mit einer Projectionsebene schneiden d. i. ihre Spurenbüschel bilden und man erkennt sofort, dass die Ausführung der bezeichneten Operationen zurückkommt auf die Construction entsprechender Strahlen dieser Spurenbüschel, d. h. auf den vorher besprochenen Fall.

Und so führt man in der Regel nach den Methoden der darstellenden Geometrie die Construction der projectivischen Elementargebilde erster Stufe auf die ersterwähnten Fälle resp. auf einen derselben zurück. Ist eine Reihe und ein Strahlbüschel zu vervollständigen, so construiert man mit der Projection der Reihe und mit der Reihe der Durchstosspunkte des Büschels auf irgend einer Ebene nach der Methode für projectivische Reihen derselben Ebene. Für ein Strahlbüschel und ein Ebenenbüschel dient die Projection des ersten und das Spurenbüschel des letzteren in irgend einer Ebene nach der Methode für projectivische Büschel in derselben Ebene; oder wir nehmen die Reihe der Durchstosspunkte für die Strahlen des ersten und die Reihe der Axenschnittpunkte für die Ebenen des zweiten und vervollständigen sie nach der Construction für projectivische Reihen in derselben Ebene. Bei

allen diesen Zurückführungen bedienen wir uns mit mehr oder weniger Wiederholungen des Satzes oder der Definition, dass eine beliebige Reihe von Schnitt- und Schein-Bildungen von irgend einem Elementargebilde erster Stufe aus immer zu einem ihm projectivischen Elementargebilde führen und der selbstverständlichen Folge, dass zwei Elementargebilde erster Stufe, die durch Schnitt- und Schein-Bildungen aus zwei projectivischen Elementargebilden erster Stufe abgeleitet worden, selbst zu einander projectivisch sein müssen. (Man vergl. z. B. II, §§ 36, 53.)

Für zwei projectivische Reihen aus A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 auf windschiefen Geraden t_1, t_2 liefert jede gemeinsame Transversale der drei Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 als Scheitelkante durch die Verbindungsebenen mit ihnen ein Ebenenbüschel, das zu beiden Reihen zugleich perspectivisch ist und das daher beliebig viele weitere Paare entsprechender Punkte der Reihen zu bestimmen erlaubt. Man zieht es zumeist vor, mit den Projectionen der Reihen zu operieren wie vorher besprochen ist. Analog für zwei projectivische Ebenenbüschel aus $\mathbf{A_1B_1C_1}$ und $\mathbf{A_2B_2C_2}$ mit windschiefen Scheitelkanten; auf jeder zu den Geraden $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{B_1B_2}$, $\mathbf{C_1C_2}$ gemeinsamen Transversale erzeugen sie identische Reihen, und mittelst einer solchen Transversale lassen sich daher alle ihre Paare bestimmen. Statt dessen operiert man mit den Spurenbüscheln oder den Axenschnittpunktreihen der Ebenenbüschel wie oben. Es ist nützlich, die Zusammenhänge beider Constructionsformen näher zu bedenken.

1) Um zwei projectivische Reihen in derselben Geraden g aus den bestimmenden Gruppen A, B, C; A', B', C' zu construieren, wird man aus einem Punkte S ausserhalb derselben die Reihe $A'B'C'$ auf eine willkürliche S nicht enthaltende Gerade der Ebene Sg in $A''B''C''$ projicieren; man wird dann mittelst der perspectivischen Axe von ABC, $A''B''C''$ die entsprechenden Elemente X, X'' dieser letzteren ermitteln und aus jedem X'' durch den Strahl SX'' das zugehörige Element X' erhalten. (Vergl. I, § 20, 15.) Man erläutere die analoge Behandlung von projectivischen Strahlbüscheln in derselben Ebene und an demselben Scheitel und die von projectivischen Ebenenbüscheln an derselben Scheitelkante.

2) Zwei in g vereinigte projectivische Reihen sind durch die Paare AA', BB' und den sich selbst entsprechenden Punkt F_1

bestimmt; man construiere zu X den entsprechenden Punkt X' und den zweiten sich selbst entsprechenden Punkt F_2.

Man wird die Reihe $A'B'$ aus einem Punkte S ausserhalb auf eine diesen nicht enthaltende, aber durch F_1F_1' gehende Gerade in der Ebene Sg projicieren in A'', B'' und F_1'' in F_1; das Perspectivcentrum S' der Reihen ABF_1, $A''B''F_1$ liefert dann durch $S'X$ zu X den Punkt X'', und der Strahl SX'' bestimmt X'. Ebenso, nur in umgekehrter Folge der Benutzung von SS', erhält man Y zu Y'; der Schnittpunkt der Geraden SS' mit g ist der zweite Doppelpunkt F_2. Wie erhält man die Gegenpunkte Q', R der Reihen?

3) Man construiere in g vereinigte projectivische Reihen aus den Doppelpunkten F_1, F_2 und einem Paare A, A' derselben.

Man wird aus einem Punkte S die Reihe A', F_2 auf eine durch F_1 gehende Gerade in der Ebene Sg nach A'', F_2'' projicieren und S' im Schnitt der Geraden SF_2 und AA'' finden; dann ergiebt sich aus X durch $S'X$ der Punkt X'' und mittelst SX'' auf g der Punkt X'; ebenso aus Y' durch SY' der Punkt Y'' und durch $S'Y''$ der Punkt Y.

4) Aus vereinigten Doppelpunkten F_1F_2 und dem Paare AA' ergiebt sich für zwei Centra S, S' in einer durch F_1F_2 gehenden Geraden und die Gerade aus F_1F_2 nach dem Schnittpunkt A'' von SA' mit $S'A$ die Construction der Paare so: Man verbindet X mit S', erhält dadurch X'' in F_1A'' und in der Geraden SX'' den Punkt X'; aus Y' durch $Y'S$ ebenso Y'' und durch $S'Y''$ in g den Punkt Y.

Wenn speciell die Doppelpunkte im Unendlichen von g vereinigt sind, so erhält man durch dasselbe Constructionsverfahren gleiche Reihen von einerlei Sinn aus einem entsprechenden Paar.

5) Man erläutere die analogen Constructionen für ineinander liegende projectivische Büschel.

7. Weil projectivische Elementargebilde erster Stufe durch drei Paare bestimmt sind und von irgend einem vierten Paare nur das eine Element willkürlich gewählt werden kann, während das andere dann aus ihm bestimmt ist, so besteht zwischen zwei entsprechenden Gruppen von vier Elementen eine Relation; im Falle der Realität dieser Elemente und auf Grundlage der Elementargeometrie erhielten wir für dieselbe und somit als Ausdruck der Projectivität die Uebereinstimmung der gleichgebildeten Doppelverhältnisse, also z. B. $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$. Nun sagen wir mit von Staudt ganz allgemein, unter der Festsetzung, dass vier Elemente eines Elementargebildes erster Stufe als ein Wurf bezeichnet werden

sollen, die Projectivität von zwei Würfen werde durch eine Relation ausgedrückt, die wir unter Einführung des Zeichens $\curlywedge$ für das Wort projectivisch in der Form schreiben können

$$(ABCD) \curlywedge (A'B'C'D').$$

Wir nennen mit von Staudt die so verbundenen Würfe von gleicher Art.

Offenbar liefern vier Elemente A, B, C, D vierundzwanzig durch die Aufeinanderfolge der Elemente unterschiedene Würfe; von denselben sind aber je vier zu einander projectivisch oder von gleicher Art, nämlich z. B.

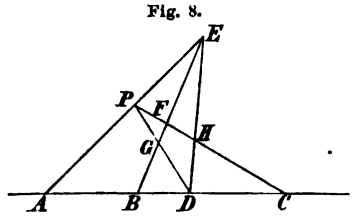
$$(ABCD) \curlywedge (BADC) \curlywedge (CDAB) \curlywedge (DCBA);$$

wir sagen, der Werth und die Art eines Wurfes wird durch die Vertauschung zwischen seinen Elementen in den Paaren — dem ersten und zweiten Paar AB, CD — desselben und ebenso durch die Vertauschung der Paare mit einander nicht geändert.

Unter Beschränkung auf reelle Elemente kann dies durch Bildung der zugehörigen Doppelverhältnisse sogleich bestätigt werden; wir machen uns aber unabhängig von den in diesem Vorgange enthaltenen Voraussetzungen, indem wir den Process der Schnitt- und Schein-Bildung auf die Frage anwenden. Zieht man — wir entwickeln für vier Punkte $ABCD$ einer Geraden — durch D eine Gerade und projiciert von einem beliebigen Punkte P auf sie die Gruppe $ABCD$ nach $EFGD$, diese aber von A oder B auf die Gerade CG in $PHGC$ resp. H^*PGC, und die letzteren beiden resp. von F oder E auf AB zurück, so erhält man in beiden Fällen $BADC$ und hat damit die erste der oben geschriebenen Projectivitäten bewiesen.

Und zieht man eine Gerade durch B (Fig. 8), um A, C, D aus einem beliebigen Punkte P der Ebene in E, F, G auf sie zu projicieren, die Reihe $EBFG$ aber ebenso aus D auf PC in $HCFP$ und diese aus E zurück auf die ursprüngliche Gerade zu projicieren, so hat man den Nachweis geführt, dass auch $(ABCD) \curlywedge (DCBA)$ ist. Beides zusammen begründet den ausgesprochenen Satz.

Fig. 8.



Sind die vier Elemente reell und bilden sie eine Folge in der Ordnung ihrer Aufschreibung, so sagt man, der Wurf sei ein ordentlicher; man sieht, dass vier Elemente acht ordentliche Würfe, nämlich mit jedem von ihnen als Anfangselement in beiderlei Bewegungssinn, liefern; und dass diese sich in zwei Gruppen von vier gleichwerthigen Würfen theilen, wieder je zwei aus dem einen und dem andern Sinn der Folge.

Ist insbesondere die vorgelegte Gruppe harmonisch, so treten durch die Symmetrie der Construction in Bezug auf die conjugierten Elementenpaare A, B und wiederum C, D zu den vorigen vier gleichwerthigen Gruppen die vier andern

$$BACD, \quad ABDC, \quad CDBA, \quad DCAB$$

hinzu und man erhält die in § 5 direct abgeleiteten Resultate wieder. (Vergl. I, § 16, 9 f.)

Wir erinnern uns nun daran, dass die Construction projectivischer Reihen und Strahlbüschel in einerlei Ebene die Kegelschnitte als Enveloppen der Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare und als Orte der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare liefert, mit ihrer fundamentalen Eigenschaft von der Projectivität der Büschel, die aus Punkten $T_1, T_2, \ldots$ ihrer Peripherie über der Reihe $A, B, C, \ldots$ seiner Punkte gebildet werden, unter einander und mit den Reihen, die auf irgend welchen ihrer Tangenten $t_1, t_2, \ldots$ durch die zu den Punkten jener Reihe gehörigen Tangenten $a, b, c, \ldots$ entstehen. (Vergl. I, § 28, 10.) Ferner daran, dass analog aus zwei projectivischen Strahlbüscheln mit demselben Scheitel und in verschiedenen Ebenen als Enveloppen der Verbindungsebenen entsprechender Strahlenpaare und aus projectivischen Ebenenbüscheln mit sich schneidenden Scheitelkanten als Orte der Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare die Kegel zweiten Grades mit ihrer fundamentalen Eigenschaft entstehen von der Projectivität der Ebenenbüschel, die aus beliebigen Mantellinien $t_1, t_2, \ldots$ nach der Gesammtheit aller ihrer Mantellinien $a, b, c, \ldots$ gelegt werden, unter sich und mit den Strahlbüscheln, in welchen beliebige ihrer Tangentialebenen $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots$ von den zu jenen Mantellinien $a, b, c, \ldots$ gehörigen Tangentialebenen $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ geschnitten werden. Endlich an die Entstehung einer Regelschaar des einfachen

Hyperboloids durch die Construction der Transversalen zu drei windschiefen Geraden d. h. ebensowohl als der Gesammtheit der Verbindungslinien der entsprechenden Punktepaare zweier projectivischen Reihen auf windschiefen Geraden, wie als die Gesammtheit der Schnittlinien der entsprechenden Ebenenpaare der zwei projectivischen Ebenenbüschel um dieselben Geraden, welche jede derselben mit der Punktereihe der andern verbinden; und an die fundamentale darin enthaltene Doppeleigenschaft des einfachen Hyperboloids, wornach die sämmtlichen Erzeugenden der einen Schaar mit beliebigen Erzeugenden der andern Schaar sowohl projectivische Reihen der Schnittpunkte als auch mit diesen und unter sich projectivische Büschel der Verbindungsebenen bestimmen. (II, § 36 Schluss.) Und wir stellen diese jetzt streng — d. h. ohne jene nach der nun gefundenen Begründung der Projectivität für Elementargebilde erster Stufe nicht mehr erforderlichen Voraussetzungen der Elementargeometrie — begründeten Ergebnisse mit anderen wichtigen Constructionen von früher und mit dem Vorigen zusammen, um den hier zu verfolgenden Weg der Weiterentwickelung zu beleuchten.

Wir haben die Schnittpunkte einer Geraden und die Tangenten aus einem Punkte seiner Ebene mit dem Kegelschnitt construiert und ebenso die Schnittpunkte einer Geraden und die Tangentialebenen aus einem Punkte mit einem Kegel zweiten Grades, sowie endlich die Schnittpunkte und Tangentialebenen einer Geraden mit dem einfachen Hyperboloid; wir wissen, dass es deren zwei in jedem Falle giebt, die entweder reell und verschieden oder reell vereinigt oder conjugiert imaginär sind. Denken wir im letzteren Falle einen dieser Punkte des Kegelschnittes, so sind nothwendig die nicht reellen Geraden, die ihn mit zwei reellen Punkten T_1, T_2 seiner Peripherie verbinden, entsprechende Strahlen der von ihnen ausgehenden projectivischen, den Kegelschnitt erzeugenden Strahlbüschel; so liefert auch einer der conjugiert imaginären Schnittpunkte mit einem Kegel zweiten Grades mit zwei beliebigen Mantellinien desselben ein Paar entsprechender imaginärer Ebenen in den von ihnen ausgehenden den Kegel erzeugenden projectivischen Ebenenbüscheln; und ebenso einer der conjugiert imaginären Schnittpunkte mit dem Hyperboloid durch

Verbindung mit zwei beliebigen Erzeugenden seiner einen Regelschaar zwei entsprechende imaginäre Ebenen der projectivischen Ebenenbüschel, welche dasselbe durch seine andere Regelschaar erzeugen. Dagegen wird eine jener conjugiert imaginären Tangenten des Kegelschnittes mit irgend zwei reellen Tangenten desselben imaginäre Schnittpunkte hervorbringen, die in den reell projectivischen Reihen auf diesen, die ihn erzeugen, einander entsprechen; eine der conjugiert imaginären Tangentialebenen eines Kegels vom zweiten Grade wird auf zwei beliebigen reellen Tangentialebenen desselben imaginäre Strahlen der zugehörigen erzeugenden projectivischen Strahlbüschel ausschneiden; und eine aus einem Paar conjugiert imaginärer Tangentialebenen des einfachen Hyperboloids wird zwei reelle Erzeugende desselben von der nämlichen Schaar in Punkten schneiden, deren imaginäre Verbindungsgerade die jener Tangentialebene angehörige imaginäre Erzeugende der andern Schaar ist, so dass man durch die Wiederholung dieser Operation für zwei Erzeugende dieser andern Schaar auch die der Tangentialebene angehörige Erzeugende der ersten und damit den Berührungspunkt der Tangentialebene mit der Fläche erhält.

Das ist die logisch nothwendige Interpretation jener Constructionsergebnisse und die vorigen Entwickelungen haben auf die Durchführung derselben vorbereitet.

Wir erinnern uns aber auch, dass jene conjugiert imaginären Punkte-, Tangenten- und Tangentialebenen-Paare als Doppelelemente der Involutionen harmonischer Pole, resp. harmonischer Polaren und Polarebenen gefunden und für die Constructionen am besten benutzbar geworden sind. Und von der Theorie der Involution aus, nachdem wir dieselbe ganz allgemein und ohne Beschränkung auf die Realität der Elemente begründet haben werden, werden wir auch den vorher besprochenen Constructionen vorstellbaren Inhalt und volle Deutlichkeit geben. Offenbar wird die Trennung der imaginären Elemente aus ihren conjugierten Paaren das Haupterforderniss dazu sein.

8. Eine solche Vereinigung von zwei gleichartigen projectivischen Elementargebilden erster Stufe, bei welcher die Elemente einander vertauschbar entsprechen, d. h. wo jedes

Element dasselbe entsprechende Element besitzt, gleichviel ob man es dem ersten oder zweiten der vereinigten Gebilde zuzählt, wird Involution im Gebilde erster Stufe oder dies Gebilde wird ein involutorisches Elementargebilde erster Stufe genannt. Und es gilt der Satz, dass das vertauschbare Entsprechen eines einzigen Elementenpaares der vereinigten Gebilde das vertauschbare Entsprechen aller anderen bedingt oder nach sich zieht. Wir haben diesen Satz zuerst aus der centrischen Collineation ebener Systeme von der Charakteristik $\Delta = -1$ (I, § 20) und sodann aus der Betrachtung der Doppelverhältnisse (I, § 20, 9), in beiden Fällen unter Voraussetzung der Realität der betrachteten Elemente geführt. Er ist jetzt ohne diese Voraussetzung nur auf Grund von allgemein gültigen Sätzen zu wiederholen, und es bedarf dazu nur einer Erweiterung des Sinnes der letztcitierten Stelle, nämlich des Ueberganges von der Doppelverhältniss-Gleichheit zur Wurf-Projectivität.

Denn ist in vereinigten projectivischen Reihen z. B. gleichzeitig

$$(ABC..) \barwedge (A'B'C'..) \quad \text{und} \quad (A'BC..) \barwedge (AB'C'..),$$

sodass also die Elemente A, A' einander vertauschbar entsprechen, so ist die Nothwendigkeit des vertauschbaren Entsprechens von B, B' zu erweisen, indem man annimmt, es entspräche dem B' als einem Element des ersten Gebildes ein von B verschiedenes Element $B^{*'}$ im zweiten Gebilde, sodass man hätte

$$(AA'BB') \barwedge (A'AB'B^{*'}).$$

Weil aber immer

$$(AA'BB') \barwedge (A'AB'B)$$

ist, so hätte man nothwendig auch

$$(A'AB'B^{*'}) \barwedge (A'AB'B)$$

und somit ist nach § 6 das Element $B^{*'}$ nothwendig identisch mit B.

Man sieht, dass dieser Beweis von der Möglichkeit der involutorischen Vereinigung zweier projectivischen Gebilde erster Stufe noch keine Constructionsregel für die Herbeiführung dieser Vereinigung aus den getrennten Gebilden enthält.

Aber man findet diese Regeln durch die Heranziehung der Grundbegriffe des Maasses; nämlich durch die Betrachtung des einen unendlich fernen Punktes QR' der geraden Reihen bei irgend einer Aufeinanderlegung derselben, der also bei einer beliebigen Verschiebung der einen auf der andern nicht geändert wird. Die Deckung von Q' mit R, d. h. der beiden ihm entsprechenden Punkte oder also der unendlich grossen Strecken $Q'R'$ und RQ erzeugt daher die Involution. Und ebenso durch die Betrachtung der grössten entsprechend gleichen Winkel d. h. der entsprechenden rechten Winkel (q, r) und (q', r') in den Büscheln; die Deckung von $q'r$ und von qr', deren eine die andere nach sich zieht, wenn die Träger der Büschel vereinigt sind, erzeugt die Involution.

Die Herstellung der Involution aus gegebenen projectivischen Elementargebilden erster Stufe ist also an die perspectivische Raumansicht gebunden und hängt mit der zugehörigen Metrik zusammen.

Nach dem vorigen Beweis werden wir aus zwei gegebenen Paaren ihrer Elemente AA_1, BB_1 zu jedem fünften Element X der Involution das mit diesem ein Paar bildende sechste X_1 finden, indem wir die Elemente B, B_1 resp. in Vertauschung als drittes bestimmendes Paar C_1, C projectivischer Gebilde betrachten, um dann wie in § 6, 1 die Reihe $A_1B_1C_1$ aus der gegebenen Geraden heraus zu projicieren. Legt man hierbei die Hilfsgerade durch A_1, so fällt A_2 auf A_1 und die Perspectivaxe für die Reihen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ist die Verbindungsgerade des angenommenen Scheitels T mit A; man erhält dann X_2 aus X mittelst der Geraden XC_2 und CX_2, die sich in X' auf der bezeichneten Perspectivaxe begegnen und X_1 aus X_2 durch die vom angenommenen Projectionscentrum aus zu ihm gehende Gerade. Nun ist aber $TX'X_2C_2$ ein Viereck, dessen erstes Gegenseitenpaar TX' und C_2X_2 durch A und A_1, das zweite TC_2 und $X'X_2$ durch B und B_1 gehen, während das dritte TX_2, C_2X' die Punkte X und X_1 enthält; d. h. man hat die Construction des § 4, die unter Verweisung auf das Frühere schon dort als die Linealconstruction der Involution bezeichnet wurde. Und analog für die Büschel.

Die Uebertragung auf den Kegelschnitt liefert uns dann in voller Allgemeinheit die Lehre vom Pol und der Polare

derselben. Sind AA_1, BB_1, CC_1 drei Paare der Involution von Punkten auf dem Kegelschnitt, so hat man

$$(CC_1A_1B) \barwedge (C_1CAB_1) \barwedge (CC_1B_1A)$$

und erhält also durch Verbindung der ersten und der letzten Gruppe mit A resp. B perspectivische Büschel, sodass sich die Geradenpaare AC, BC; AC_1, BC_1; AA_1, BB_1 in einer Geraden und somit CC_1, AA_1, BB_1 sich in einem Punkte schneiden — dem Pol der Involution. Ebenso liefern die drei Paare aa_1, bb_1, cc_1 der zugehörigen Involution von Tangenten aus

$$(cc_1a_1b) \barwedge (c_1cab_1) \barwedge (cc_1b_1a)$$

durch Schnitt der ersten und dritten Gruppe mit a, b resp. perspectivische Reihen, sodass sich die Geraden ac, bc; ac_1, bc_1; aa_1, bb_1 in einem Punkte schneiden und somit die Punkte cc_1, aa_1, bb_1 in einer Geraden liegen — der Polare der Involution. Die Construction der Doppelelemente einer Involution (I, §§ 21, 31) und die Construction des gemeinsamen Paares von zwei Involutionen in demselben Träger (I, § 31, 15) entspringen daraus. Zur ersteren gehört auch die in I, § 31, 14 erledigte Ersetzung einer Vereinigung projectivischer Elementargebilde erster Stufe durch eine Involution unter Festhaltung der Doppelelemente, unabhängig von deren Realität. Darauf und auf die Lehre von den harmonischen Polen und Polaren brauchen wir nicht zurückzukommen, weil sie streng begründet und ausführlich auch in ihren Anwendungen entwickelt worden ist.

Wenn die Doppelelemente einer Involution reell sind, so bilden sie mit jedem ihrer Paare eine harmonische Gruppe; denn für G, H als die Doppelelemente und A, A_1 als ein Paar hat man nothwendig

$$(GHAA_1) \barwedge (GHA_1A),$$

was nach § 7 die Harmonie fordert. Das gemeinsam harmonische Paar zu zwei Paaren von Elementen desselben Trägers sind also die Doppelelemente der durch sie bestimmten Involution und zugleich das gemeinsame Paar der beiden durch sie als Doppelelemente bestimmten Involutionen.

In zwei vereinigten projectivischen Elementargebilden erster Stufe mit den Doppelelementen F_1, F_2 und den Paaren AA', BB' ist

$$(F_1 F_2 AB) \barwedge (F_1 F_2 A'B'),$$

und da immer

$$(F_1 F_2 A'B') \barwedge (F_2 F_1 B'A')$$

ist, so ist auch

$$(F_1 F_2 AB) \barwedge (F_2 F_1 B'A'),$$

d. h. $F_1 F_2$, AB', BA' sind drei Paare einer Involution. In Folge dessen ist auch

$$(F_1 F_2 AA') \barwedge (F_2 F_1 B'B) \barwedge (F_1 F_2 BB')$$

d. h. in vereinigten projectivischen Elementargebilden erster Stufe bilden die Doppelelemente mit jedem Paar einen Wurf von unveränderlichem Werth; im Fall reeller Elemente haben wir das constante Doppelverhältniss der Paare mit den Doppelelementen, welches wir als Charakteristik der centrischen Collineationen in der Ebene und im Raum von Wichtigkeit fanden.

Wir haben in der Wiederentdeckung dieser wichtigen Bestandstücke früherer mit Mitteln der Elementargeometrie gemachter Entwickelungen auf dem jetzigen von solchen Voraussetzungen freien Wege zugleich die Gewähr dafür, dass die Elementargeometrie und Trigonometrie mit der projectivischen Geometrie, insbesondere mit der von der perspectivischen Raumansicht ausgehenden, auf demselben Boden und im Einklang stehe. Wir werden daher auch weiterhin (§ 14 f. etc.) auf jene Voraussetzungen wieder zurückgreifen dürfen. Wie schon jetzt die Einführung der Maassbegriffe als auf Grund der Lehre von der Involution stehend erkannt ist, so wollen wir aber noch vorher auch die Lehre von den imaginären Raumelementen aus dem gleichen Grunde entwickeln. (§§ 9—13.)

1) Man construiere die Involution im Strahlbüschel aus einem Doppelelement g und dem Paar aa_1, insbesondere das andere Doppelelement und zeige dabei die harmonische Theilung. Man construiere sie in der Reihe aus beiden Doppelelementen G, H, speciell auch, wenn eines derselben unendlich fern ist.

2) Haben die vereinigten projectivischen Gebilde nur ein sich selbst entsprechendes Element F, so folgt aus

$$(FFAB\ldots) \barwedge (FFA'B'\ldots),$$

dass FF, AB', $A'B$ drei Paare einer Involution sind und somit, dass F das eine Doppelelement derselben sein muss.

3) Wenn die Elemente AB, CD eine harmonische Gruppe bilden und X, X_1 die conjugiert harmonischen eines Elementes X^* in Bezug auf AB, CD resp. sind, so bilden AB, CD, XX_1 drei Paare einer Involution. Denn die Involutionen AA, BB, CD, XX^* und DD, CC, AB, XX^* geben

$$(ABCDX^*) \barwedge (ABDCX), \quad (ABCDX^*) \barwedge (BACDX_1),$$

also auch

$$(ABDCX) \barwedge (BACDX_1).$$

4) In zwei vereinigten projectivischen Elementargebilden erster Stufe bilden die Paare der entsprechenden zu den Elementen des Trägers eine Involution, die mit der Projectivität die Doppelelemente gemein hat. (Vergl. I, § 20, 1.)

5) Alle Involutionen mit reellen Doppelelementen oder alle hyperbolischen Involutionen sind auf symmetrische zurückführbar; alle elliptischen Involutionen ebenso auf die Rechtwinkelinvolution im Strahlbüschel. (I, § 31, 11.)

6) Die metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte sind die Ergebnisse der Hervorhebung dieser Specialitäten d. h. der unendlich fernen Elemente überhaupt und der unendlich fernen imaginären Kreispunkte oder des Absoluten in der Theorie der Involutionen der harmonischen Pole und Polaren bezüglich der Kegelschnitte.

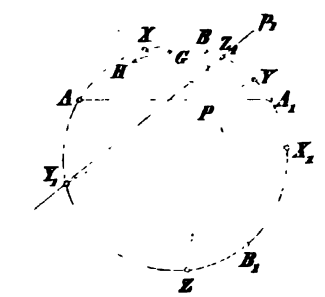
9. Die elliptische Involution in Elementargebilden erster Stufe hat zur Definition und sofort zur construierenden Verwendung von dreierlei imaginären Elementenpaaren geführt, nämlich von Paaren imaginärer Punkte in einer reellen Verbindungsgeraden, von Paaren imaginärer Ebenen durch eine reelle Schnittgerade und von Paaren imaginärer Geraden durch einen reellen Punkt und in einer reellen Ebene. Offenbar schliessen diese Definitionen ein, dass jeder solche imaginäre Punkt in einer reellen Geraden liegt, und dass jede solche imaginäre Ebene durch eine reelle Gerade geht — natürlich nur in einer und durch eine —, sowie dass jede solche imaginäre Gerade einen reellen Punkt enthält und in einer reellen Ebene liegt. Wir wollen die letzteren als imaginäre Gerade erster Art oder als punktiert-planierte imaginäre Gerade bezeichnen, weil wir noch eine andere Art von imaginären Geraden kennen lernen werden. Wir nennen solche durch die nämliche Involution mit sich trennenden Paaren definierte Paare gleichartiger imaginärer Elemente conjugiert

imaginär; solchen ist eine reelle Gerade resp. ein reeller Punkt und eine reelle Ebene gemein.

Wir haben hier die Art und Weise der Unterscheidung der beiden Elemente eines Paares von einander zu erörtern und sodann zu untersuchen, ob noch andere Arten imaginärer Elemente als die drei erwähnten vorhanden sind.

Wir denken die Involution auf einen Hilfskegelschnitt übertragen — wir wollen annehmen als involutorische Zuordnung seiner Punkte — bestimmt durch die Paare A, A_1; B, B_1, sodass ihr Pol AA_1, BB_1 oder P, weil ihre Doppelpunkte G_i, H_i nicht reell sind, im Innern desselben liegt. Ziehen wir dann durch denselben die Verbindungsgerade XX_1 irgend eines Paares und nehmen in ihr durch diese Punkte von ihm getrennt einen beliebigen Punkt P_1 an, so schneidet die Polare p_1 desselben in Bezug auf den Kegelschnitt diesen in zwei reellen Punkten Y_1, Z_1, deren entsprechende in der Involution in den Geraden Y_1P, Z_1P resp. Y und Z sind; und man hat

Fig. 9.



$$(XPX_1P_1) \barwedge (Y_1 \,.\, XPX_1P_1) \barwedge (XYX_1Y_1),$$
$$(XPX_1P_1) \barwedge (Z_1 \,.\, XPX_1P_1) \barwedge (XZX_1Z_1).$$

Wäre P_1 von P durch X und X_1 harmonisch getrennt, so geht p_1 durch P und Y fällt auf Z_1, Z auf Y_1 oder man erhält den speciellen Fall

$$(XPX_1P_1) \barwedge (XYX_1Y_1),$$
$$(XPX_1P_1) \barwedge (XY_1X_1Y).$$

In diesem wie im allgemeinen Fall zeigt die erste Gruppe den einen, die zweite den andern Sinn der Bewegung im Gebilde von X aus. Und es ist eine auszeichnende Eigenschaft der elliptischen Involutionen, dass man von einem Bewegungssinne XYX_1 und von dem entgegengesetzten XZX_1 oder X_1YX derselben sprechen kann; die Involution mit reellen Doppelelementen gestattet dies nicht, das Element Y_1 liegt nicht in dem Bewegungssinn XYX_1 zwischen X_1

und X und ebenso wenig Y_1 in dem Bewegungssinn $X_1 YX$ zwischen X und X_1.

Unsere Entwickelung sagt daher aus, dass in einem gegebenen involutorischen Elementargebilde erster Stufe ohne reelle Doppelelemente zu jedem Paare X, X_1 seiner Elemente ein anderes Paar YY_1 resp. ZZ_1 vorhanden ist, welches mit ihm einen Wurf (XYX_1Y_1) resp. (XZX_1Z_1) mit vorgeschriebenem Bewegungssinn bildet, der einem gegebenen ordentlichen Wurf (§ 7) projectivisch ist; insbesondere auch ein zu XX_1 harmonisches Paar, welches in beiderlei Sinn zählt. Und sie giebt uns die einfachsten Constructionsmittel für diese Paare oder die einfachsten Regeln für die Darstellung der elliptischen Involution durch zwei Paare von vorgeschriebenem Wurfwerth von einem gegebenen Anfangselement aus und mit beiderlei Bewegungssinn, insbesondere für die Darstellungen durch eine harmonische Gruppe oder die harmonische Darstellung. Die Figur enthält die Construction für alle elliptisch involutorischen Strahlbüschel über AA_1, BB_1, die ihre Scheitel auf der Peripherie des Kegelschnittes haben. Sollte man aber die durch trennende Paare AA_1, BB_1 bestimmende involutorische Reihe von dem Element X aus in beiderlei Sinn durch eine harmonische Gruppe darstellen, so würde man für einen die Gerade der Reihe berührenden Kegelschnitt die Polare p der Involution verzeichnen — die denselben nicht trifft —, durch sie zum Punkte X mittelst der von ihm ausgehenden Tangente ξ und der sich mit ihr auf p schneidenden zweiten Tangente ξ_1 den entsprechenden Punkt X_1 ermitteln, zu p in Bezug auf ξ und ξ_1 den vierten harmonischen Strahl p_1 und die Tangenten des Kegelschnittes y, y_1 in den zwei Punkten auf diesem construieren; sie enthalten das Paar Y, Y_1 der Reihe, welches die Aufgabe fordert.

Denken wir uns die die imaginären Doppelelemente G_i, H_i der Involution als zwei verschiedene Elemente des Gebildes von irgend einem Elemente X desselben aus in den einen und den andern Bewegungssinn eingeordnet, so wird ihnen in dem einen Sinn XYX_1 vielleicht die Folge G_iH_i und im andern Sinn XY_1X_1 dann die Folge H_iG_i zukommen; und wir haben

in dem Bewegungssinn, den wir der bestimmenden Involution beilegen, das einfache Mittel, von einem gegebenen reellen Element aus als das zuerst erreichte das eine von dem andern der zwei conjugiert imaginären Elemente zu unterscheiden.

Wir bestimmen somit einen imaginären Punkt in einer reellen Geraden durch eine elliptische Punkt-Involution in derselben und einen bestimmten Sinn der Bewegung, welchen wir ihr beilegen; eine imaginäre Ebene durch eine reelle Gerade durch eine elliptische Ebenen-Involution aus derselben mit bestimmtem Bewegungssinn; eine imaginäre Gerade durch einen reellen Punkt in einer reellen Ebene mittelst einer elliptischen Strahlen-Involution im bezüglichen Büschel unter Beilegung eines bestimmten Bewegungssinnes. In jedem Falle wird die Involution durch zwei Paare bestimmt, für die man den Wurfwerth geben resp. insbesondere die Harmonie festsetzen und von dessen erstem man das eine Element willkürlich wählen kann. In jedem Falle bestimmt dieselbe Involution mit dem entgegengesetzten Bewegungssinn (vom nämlichen Anfangselement aus) das conjugiert imaginäre Element zu dem vorigen — sodass jedes dieser imaginären Elemente nur einem reellen Elementargebilde angehört, zu dem auch das conjugiert imaginäre gehört.

Hiernach liefert die Vereinigung von zwei conjugiert imaginären Elementen ein reelles Element, dem Uebergang der elliptischen Involution in die parabolische entsprechend, in der allen Elementen des Gebildes erster Stufe ein festes Element entspricht, das zugleich die Vereinigung der Doppelelemente repräsentiert.

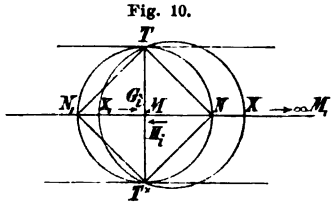
Denken wir in einem gegebenen Elementargebilde erster Stufe die die elliptische Involution in demselben bestimmenden Gruppen (XYX_1Y_1) stets zu einer bestimmten festen Gruppe projectivisch und lassen wir das Anfangselement X, das willkürlich gewählt werden kann, fest sein, so giebt die willkürliche Wahl der Elemente Y und X_1 unter den reellen von X verschiedenen Elementen des Gebildes alle in demselben möglichen Involutionen und damit die Darstellung aller demselben angehörenden imaginären Elementenpaare. Die Anzahl derselben ist somit der Zahl der Combinationen zu zweien unter

den $(u-1)$ von X verschiedenen reellen Elementen des Gebildes gleich, d. h. es giebt in einem Elementargebilde erster Stufe $\frac{1}{2}(u-1)(u-2)$ conjugierte Paare und folglich $(u-1)(u-2)$ oder (u^2-3u+2) einzeln imaginäre und somit unter Inbegriff der reellen überhaupt (u^2-2u+2) oder $(u-1)^2+1$ Elemente.

Es liegen also in jeder reellen Geraden zweifach unendlich viele nicht reelle Punkte, durch jede reelle Gerade gehen zweifach unendlich viele imaginäre Ebenen und in jeder reellen Ebene gehen durch einen reellen Punkt zweifach unendlich viele imaginäre Gerade.

Wenn wir speciell in der geraden Punktreihe den unendlich fernen Punkt als Ausgangspunkt aller Darstellungen wählen, und dieselben durch harmonische Würfe vollziehen, so erhalten wir den Mittelpunkt M der Involution als den dem Anfangspunkt entsprechenden und das zu ihm symmetrisch liegende Paar N, N_1 als Darstellung der Involution. Die Gruppen $\infty N_1 M N$ und $\infty N M N_1$ oder kürzer $N_1 M N$, $N M N_1$, sowie auch $M N N_1$ und $M N_1 N$ repräsentieren die Involution und durch die in ihnen ausgeprägte Unterscheidung des Sinnes die beiden Doppelelemente G_i und H_i derselben, nämlich etwa $M N N_1$ mit dem positiven Sinn das Doppelelement G_i und $M N_1 N$ mit dem negativen Bewegungssinn das Doppelelement H_i. Und analog in den übrigen Fällen; das Paar $M_1 M$, die unendlich grosse Strecke, wird durch das Rechtwinkelpaar des involutorischen Büschels, den Maximalwinkel, vertreten und die zu ihm harmonischen liegen zu seinen Strahlen symmetrisch.

Fig. 10.



Wir verfolgen die Betrachtung der Punkt-Involution weiter. Für M als Mittelpunkt und X, X_1 als ein beliebiges Paar der elliptischen Involution ist bekanntlich

$$MX \cdot MX_1 = -n^2,$$

und man erhält zum constructiven Ausdruck dieser Relation auf dem über XX_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise in der auf XX_1 in M rechtwinkligen Sehne zwei Punkte T, T^* so, dass sie allen derartigen Kreisen YY_1, ZZ_1, ... gemein-

sam sind und dass speciell der aus M durch sie beschriebene Kreis das symmetrische Paar NN_1 der Involution ausschneidet. Man kann in Abkürzung der Beschreibung dieser symmetrisch harmonischen Darstellung sagen, dass der imaginäre Punkt durch eine Strecke NN_1 dargestellt oder bestimmt wird, so wie der ihm conjugierte durch dieselbe Strecke N_1N mit dem entgegengesetzten Sinn; die Strecken von der Länge Null sind dann die reellen Punkte. Analog wird eine imaginäre Ebene durch den Winkel zwischen zwei reellen Ebenen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, ihre conjugierte durch $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}$ und eine imaginäre Gerade im Büschel durch den Winkel zwischen zwei Strahlen nn_1 resp. n_1n dargestellt; die reellen Ebenen und Geraden entsprechen den Winkeln Null.

Drücken wir dann, um wieder nur von der Punktreihe zu sprechen, die Lage der Punkte M, X, X_1 in der Geraden durch ihre Abstände m, x, x_1 von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt O derselben aus, so ist

$$MX = x - m, \quad MX_1 = x_1 - m$$

und die obige Gleichung geht über in

$$(x - m)(x_1 - m) = -n^2.$$

Wir erhalten somit für $x = x_1$ die Bestimmungsgleichung für die Abstände der Doppelpunkte G_i, H_i von O in der Form

$$(x - m)^2 = -n^2$$

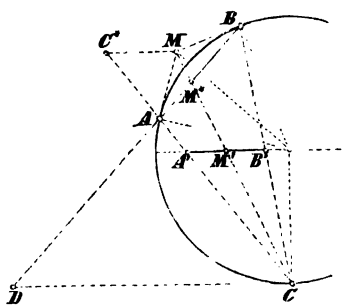
und somit für jene Abstände OG_i und OH_i selbst die Werthe

$$x = m \mp ni \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Die vorhergehende Entwickelung von der geometrischen Darstellung oder Bestimmung der imaginären Punkte der Geraden erscheint somit als die construierende Darstellung der complexen Grössen der Algebra. Zugleich sind die Punkte T, T^* die Scheitel der die Punktinvolution projicierenden rechtwinkligen Strahleninvolutionen und zwar T der Scheitel für die dem Sinne N_1MN folgende etwa von G_i und T^* der Scheitel für die mit demselben Drehungssinn dem Sinne NMN_1 folgende von H_i. Und es sind wegen $OM = m$, $MT = +n$, $MT^* = -n$ zugleich die Punkte T, T^* nach der Argand-Gauss'schen Darstellung der complexen Grössen die

Abbildungen der Zahlen $m+ni$ und $m-ni$ resp. (Wir werden weiterhin geometrisch die Ausdehnung dieser Beziehungen auf zwei und drei Dimensionen finden, die der Cyklographie entspricht.) Diese Darstellung der complexen Zahlen durch die reellen Punkte einer die Gerade der reellen Zahlen enthaltenden Ebene ist aber von der geometrischen Darstellung der imaginären Punkte der Geraden wohl zu unterscheiden, diese letztere ist Geometrie, jene braucht nur die Geometrie zur Versinnlichung algebraischer Grössen. Dabei tritt dies Besondere ein. Wir wissen, dass die Ebene (u^2-u+1) reelle Punkte hat, während die Anzahl der imaginären und der reellen Punkte der Geraden, welche übereinstimmen muss mit der Anzahl der complexen, rein imaginären und reellen Zahlen, gleich (u^2-2u+1) ist, d. h. um $(u-1)$ kleiner als jene. Zur Ausgleichung dieser Differenz genügt die Festsetzung, dass die Ebene der reellen und complexen Zahlen statt einer Geraden mit u Punkten nur einen unendlich fernen Punkt besitze; die Berechtigung zu derselben entnimmt man aus dem Zusammenhang der complexen Zahlen mit der conformen Abbildung der Kugel (vergl. II, § 34); man kann auf Grund derselben sagen, dass die Ebene der complexen Zahlen im Grunde die stereographische Abbildung (der Kugel oder ihre Inversion aus einem in ihr gelegenen Anfangspunkte) ist, die als solche nur einen dem Anfangspunkt entsprechenden unendlich fernen Punkt besitzt*).

*) In II, § 34 p. 262 haben wir die stereographische Abbildung der Kugel auf die Ebene geometrisch entwickelt und wollen bei diesem Anlass den einfachsten algebraischen Ausdruck derselben geben. Sei in nebenstehender Figur (72 a. a. O.) die Bildebene $A'M'B'$ die Ebene der rechtwinkligen Axen der x, y und der x', y' und sei die im Kugelmittelpunkt auf ihr errichtete Normale die Axe der z, sodass das Projectionscentrum C die Coordinaten $(0, 0, 1)$ habe und die Originalkugel durch



$$x^2+y^2+z^2=1$$

ausgedrückt ist. Dann ist der projicierende Strahl eines Punktes x', y' der Bildebene bestimmt durch seinen von $(0, 0)$ nach (x', y') gehenden

Wir wenden uns zur geometrisch construierenden Entwickelung zurück.

10. Man sagt, wie wir aus der Theorie der harmonischen Pole und Polaren wissen (I, § 32 p. 165), von zwei involutorischen Gebilden erster Stufe und ungleicher Art, dass sie perspectivisch liegen, wenn beide in einerlei Sinn durchlaufen werden und wenn die Paare des einen durch Paare des andern gehen oder in solchen liegen. Weil dann auch die Doppelelemente des einen Gebildes durch die Doppelelemente des andern gehen müssen, dürfen wir über das Ineinanderliegen imaginärer Elemente festsetzen: Ein imaginärer Punkt liegt in einer imaginären Ebene, wenn er entweder in ihrer reellen Geraden liegt, oder wenn die ihn bestimmende Punktinvolution perspectivisch ist zu derjenigen Ebeneninvolution, welche die imaginäre Ebene bestimmt. Eine imaginäre Gerade erster Art geht durch einen imaginären

---

Grundriss und seinen von (0, 1) nach $(x, 0)$ gehenden Aufriss $xy' - x'y = 0$, $x + x'(z-1) = 0$ und man erhält $x' = \frac{x}{1-z}$ und $y' = \frac{y}{1-z}$.

Aus beiden folgert man $(x' \pm y'i) = \frac{x \pm yi}{1-z}$. Man sieht, dass dem Kreise in der Bildebene vom Mittelpunkt $(\alpha, 0)$ und vom Radius r $x'^2 + y'^2 - 2\alpha x' + \alpha^2 - r^2 = 0$ der Kreis auf der Kugel entspricht, den die Ebene $z(\alpha^2 - r^2 - 1) + 2\alpha x = \alpha^2 - r^2 + 1$ enthält; der Pol dieser Ebene in Bezug auf die Kugel hat die Coordinaten $\frac{2\alpha}{\alpha^2 - r^2 + 1}$, $\frac{\alpha^2 - r^2 - 1}{\alpha^2 - r^2 + 1}$ und liegt in der Geraden vom Centrum nach dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Ferner erhält man durch Einsetzen der Werthe von x, y aus x', y' in die Gleichung der Kugel $z = \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1}$ und daraus $x = \frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}$, $y = \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}$. Nun sind die Abstandsquadrate des Centrums $(0, 0, 1)$ vom Punkte (x, y, z) und vom entsprechenden Punkte $(x', y', 0)$ in den gestrichenen Coordinaten ausgedrückt $\frac{4}{x'^2 + y'^2 + 1}$ und resp. $(x'^2 + y'^2 + 1)$, sodass ihr Produkt gleich 4 und das Produkt der Abstände der entsprechenden Punktepaare selbst immer gleich 2 ist. D. h. die Ebene x', y' ist das Abbild der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach reciproken Radien für die Potenz 2 oder für eine um C oder $(0, 0, 1)$ beschriebene Directrixkugel vom Radius $\sqrt{2}$ oder durch den in der Ebene xy liegenden Hauptkreis der Originalkugel. Mit Einsetzung von $(z-1)$ für z erkennt man diese Ergebnisse als specielle Fälle der Entwickelungen in II, p. 534 f., 539.

Punkt resp. sie liegt in einer imaginären Ebene, wenn die Involutionen zu einander perspectivisch sind, welche beide bestimmen; die reelle Gerade des Punktes resp. der Ebene liegt dann in der reellen Ebene resp. geht durch den reellen Punkt der Geraden. Und weil in der perspectivischen Lage den elliptischen Involutionen beiderlei Bewegungssinn übereinstimmend zukommt, so folgt unmittelbar, dass das Ineinanderliegen von zwei imaginären Elementen das Ineinanderliegen auch ihrer conjugierten Elemente nach sich zieht.

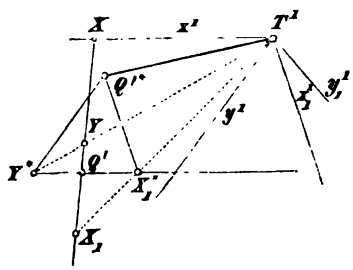
Von diesen Vorbereitungen aus können wir die Theorie der imaginären Raumelemente nach darstellend geometrischer Methode untersuchen und vervollständigen, an der Hand der Constructionsaufgaben, welche über dieselben gestellt werden müssen, um als rechte geometrische Elemente anerkannt werden zu können. Man hat offenbar zuerst die reellen Elemente mit den imaginären und dann diese unter sich gemäss den Definitionen zu verbinden; also erstens einen reellen Punkt a) mit einem imaginären Punkt durch eine Gerade und b) mit einer imaginären Geraden (1. Art) durch eine Ebene zu verbinden, eine reelle Ebene c) mit einer imaginären in einer Geraden und d) mit einer imaginären Geraden (1. Art) in einem Punkt zu schneiden, eine reelle Gerade e) mit einem imaginären Punkt durch eine Ebene zu verbinden, f) mit einer imaginären Ebene in einem Punkt zu schneiden; sodann zweitens einen imaginären Punkt g) mit einer imaginären Geraden durch eine Ebene und h) mit einem andern imaginären Punkt durch eine Gerade zu verbinden, eine imaginäre Ebene i) mit einer imaginären Geraden in einem Punkt und k) mit einer andern imaginären Ebene in einer Geraden zu schneiden. Erst in der Durchführung dieser Aufgaben bewährt man die neuen Elemente als ihren Namen entsprechende geometrische Einheiten und erst durch sie erreicht man die überzeugende Vollständigkeit derselben.

Wir durchgehen hier zunächst die erste Gruppe derselben mit dem kurzen Nachweis, dass ihre Lösungen in den vorher gemachten Feststellungen über die perspectivische Lage enthalten sind.

Der reelle Punkt T in a) bestimmt mit der den imaginären

Punkt definierenden Involutionen in der Reihe t eine Involution im Büschel durch einen Wurf mit bestimmtem Bewegungssinn von einem Anfangselement aus und diese giebt die imaginäre Gerade g_i, welche ihren reellen Scheitel mit dem in jenem Sinne vorliegenden Doppelpunkt G_i der Punktinvolution verbindet. Der reelle Punkt T in b) liefert durch seine Verbindungsebenen mit den Strahlen der Involution, welche den imaginären Strahl g_i definiert, eine Ebeneninvolution, auf welche sich der Bewegungssinn von dieser überträgt und welche die Ebene G_i darstellt, die T mit g_i verbindet. Wenn man die Punkte der Involution, welche die imaginäre Ebene in c) darstellt, mit der reellen Ebene schneidet, so stellt die Involution der Schnittlinien durch den übertragenen Bewegungssinn die gesuchte imaginäre Schnittlinie dar. Die Involution im Strahlbüschel, die den imaginären Strahl in d) repräsentiert, schneidet die Ebene in einer involutorischen Reihe, welche mit dem übertragenen Sinn den gesuchten Schnittpunkt bestimmt. Die Involution von Ebenen aus der reellen Geraden nach der involutorischen Punktreihe des imaginären Punktes giebt ebenso die imaginäre Verbindungsebene in e) und die Involution der Schnittpunkte der reellen Geraden in f) mit der Ebeneninvolution, welche die imaginäre Ebene bestimmt, ihren Schnittpunkt mit jener. Wir empfehlen die zugehörigen Figuren in Centralprojection zu zeichnen, um sich in der Anschauung der so definierten Zusammenhänge zu üben. Die Verbindungsgerade in a) und die Verbindungsebene in b) werden nur dann reell, wenn der reelle Punkt in der reellen Geraden des imaginären und resp. in der reellen Ebene des imaginären Strahles liegt; die Gerade von c) wird reell, wenn die reelle Ebene durch die reelle Gerade der imaginären geht, der Punkt von d), wenn die reelle Ebene durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht; die Ebenen von e) und der Punkt von f) werden reell, wenn die reelle Gerade den reellen Träger des imaginären Punktes resp. der imaginären

Fig. 11.



Ebene schneidet, und jene ist dann die Verbindungsebene, dieser der Schnittpunkt beider.

Die Aufgabe b) wird unbestimmt, wenn der reelle Punkt mit dem Scheitel der Involution des imaginären Strahles, ebenso Aufgabe d), wenn die reelle Ebene mit der Ebene der Involution der imaginären Geraden zusammenfällt; e) und f) werden unbestimmt, wenn die reelle Gerade den imaginären Punkt enthält, resp. in der imaginären Ebene liegt, d. h. wenn sie mit dem reellen Träger des imaginären Elements zusammenfällt.

Wir wenden uns zu den Aufgaben der zweiten Gruppe, bei welchen nun eigentliche Constructionen immerhin sehr einfacher Art erforderlich sind.

Ist für die Aufgabe von der Verbindungsebene der imaginäre Punkt G_i in der reellen Geraden t durch eine elliptische Punktinvolution mit vorgeschriebenem Sinn und die imaginäre Gerade g_i in der reellen Ebene $\mathbf{E}$ durch eine elliptische Strahleninvolution vom Scheitel T ebenso gegeben, so hat man die Darstellungen beider zu einander perspectivisch zu machen, um das verbindende involutorische Ebenenbüschel zu bilden. Diess geschieht, indem man den der Geraden t der Reihe mit der Ebene $\mathbf{E}$ des Büschels gemeinsamen Punkt X aufsucht und die Reihe vom Punkt X aus, sowie das Büschel vom Strahl TX oder x aus durch projectivische Würfe mit dem ihnen zukommenden Bewegungssinn darstellt; sind YX_1Y_1 und yx_1y_1 die folgenden Elemente derselben, so erhalten wir durch die Verbindungsebenen Yy, X_1x_1 und Y_1y_1 oder $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{Y}_1$ eine reelle Gerade s als gemeinsame Schnittlinie, die wir mit X und x überdiess durch die Ebene $\mathbf{X}$ verbinden. Das Ebenenbüschel $\mathbf{XYX}_1\mathbf{Y}_1$ mit dem hierdurch bezeichneten Bewegungssinn ist dann nach der Construction sowohl perspectivisch zur involutorischen Reihe in t, als auch mit dem involutorischen Büschel in $\mathbf{E}$ unter Übereinstimmung der Bewegungssinne, und seine in jenem Sinne zuerst auf $\mathbf{X}$ folgende Doppelebene $\mathbf{G}_i$ enthält somit ebensowohl den Punkt G_i in t als den Strahl g_i in $\mathbf{E}$. Für die graphische Ausführung wird man etwa die Ebene $\mathbf{E}$ zur Projectionsebene wählen und die Gerade t durch ihren Durchstosspunkt und Fluchtpunkt SQ' bestimmen, sodass der Punkt X der Durchstosspunkt S ist; die

Strahlen y, x_1, y_1 sind dann die Spuren der Verbindungsebenen yY, x_1X_1, Y_1y_1 und T ist der Durchstosspunkt ihrer Schnittlinie. In Fig. 11 ist diese Construction ausgeführt, das Strahlbüschel der imaginären Geraden in der Bildebene ist durch den oberen Index 1 ausgezeichnet; Q'^* ist der Fluchtpunkt der Scheitelkante der Ebeneninvolution der gesuchten imaginären Verbindungsebene.

Bei der Aufgabe i) von der Bestimmung des Schnittpunktes einer imaginären Ebene mit einer imaginären Geraden kann ebenfalls die Strahleninvolution der letzteren T' in der Bildebene gedacht werden, sodass die Ebeneninvolution der ersteren an der Scheitelkante vom Fluchtpunkt Q' und dem Durchstosspunkt X liegt. Beide Involutionen werden nun vom Strahl $T'X$ aus als Strahl x' in der Strahleninvolution und als Spur der Ebene $\mathfrak{x}$ in der Ebeneninvolution durch projectivische Würfe in dem zugehörigen Bewegungssinn dargestellt, das Strahlbüschel durch die Gruppe $x'y'x_1'$ etwa und das Ebenenbüschel durch die Gruppe der entsprechenden Spuren $x'yx_1$; beide Büschel sind perspectivisch, die Strahlenpaare y' und y, x_1' und x_1 liefern zwei Punkte Y und X_1 ihrer perspectivischen Axe, zu denen im Schnitt ihrer Verbindungslinie mit x' der Punkt X tritt; die Gruppe XYX_1 mit ihrem Bewegungssinn und projectivisch den gewählten Darstellungen, also z. B. wie diese harmonisch, bestimmt den imaginären Punkt G_i, in welchem sich die Gerade g_i' und die Ebene G_i treffen.

Von den beiden noch übrigen Aufgaben h) und k), Verbindungsgerade von zwei imaginären Punkten, Schnittgerade von zwei imaginären Ebenen, besprechen wir zunächst die mit den vorigen gleichartig zu behandelnden Fälle, wo die reellen Träger der bezüglichen gegebenen involutorischen Reihen resp. Ebenenbüschel sich schneiden. Ist im ersten Fall X ihr gemeinsamer Punkt, so stellen wir beide Involutionen durch projectivische Würfe von X aus mit dem je vorgeschriebenen Bewegungssinn dar und bilden das zu beiden zugleich perspectivische Büschel; sind XYX_1Y_1 und $XY'X_1'Y_1'$ jene Würfe, so ist der gemeinsame Punkt von YY', X_1X_1', Y_1Y_1' der Scheitel T desselben und für y, x_1, y_1 als diese

Strahlen und TX als Anfangsstrahl x ist durch die Gruppe xyx_1y_1 die imaginäre punktiert-planierte Gerade g_i dargestellt, welche jene Punkte G_i und G_i' verbindet. Und für $\mathbf{X}$ als die gemeinsame Ebene der Büschel im zweiten Fall stellt man die zugehörigen Involutionen im vorgeschriebenen Sinn durch projectivische Würfe von Ebenen $\mathbf{XYX_1Y_1}$ und $\mathbf{XY'X_1'Y_1'}$ dar und construiert das zu ihnen zugleich perspectivische Strahlbüschel y aus $\mathbf{YY'}$, x_1 aus $\mathbf{X_1X_1'}$, y_1 aus $\mathbf{Y_1Y_1'}$ mit dem Anfangsstrahl x als Schnitt der Ebenen $\mathbf{X}$ und yx_1y_1. Die Gruppe xyx_1y_1 stellt die imaginäre Schnittlinie der Ebene G_i und G_i' dar, die also auch punktiert und planiert ist.

In analoger Weise erhält man den Schnittpunkt von zwei imaginären Geraden in derselben reellen Ebene; und ebenso wie bei der Aufg. h) die Verbindungsebene von zwei imaginären Strahlen aus demselben reellen Punkt.

11. Die beiden Aufgaben von der Verbindungsgeraden zweier imaginärer Punkte $G_i^{(1)}$, $G_i^{(2)}$ und von der Schnittgeraden zweier imaginärer Ebenen $\mathfrak{G}_i^{(1)}$, $\mathfrak{G}_i^{(2)}$ können aber offenbar weder dieselbe Behandlung finden noch dasselbe Resultat liefern, wenn die reellen Träger $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ der jene Punkte resp. Ebenen bestimmenden Involutionen einander nicht schneiden. Dann giebt es für die Reihen keinen gemeinsamen Punkt X und für die Ebenenbüschel keine gemeinsame Ebene $\mathbf{X}$, von denen aus projectivische und somit perspectivische Darstellungen gemacht werden könnten und es giebt folglich auch kein zu beiden Reihen resp. beiden Ebenenbüscheln zugleich perspectivisches Strahlbüschel und folglich keine punktiert-planiert imaginäre Geraden als Lösung der Aufgaben.

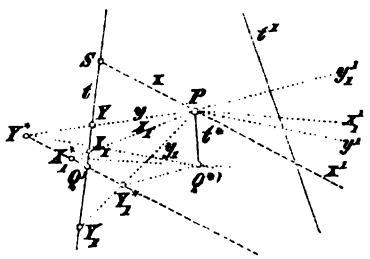
Von diesen beiden Aufgaben kommt immer die eine auf die andere zurück. Denn für die Bestimmung der imaginären Ebenen $\mathfrak{G}_i^{(1)}$, $\mathfrak{G}_i^{(2)}$ durch die Involutionen $\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{Y}^{(1)}\mathbf{X}_1^{(1)}\mathbf{Y}_1^{(1)}$ um $t^{(1)}$ und $\mathbf{X}^{(2)}\mathbf{Y}^{(2)}\mathbf{X}_1^{(2)}\mathbf{Y}_1^{(2)}$ um $t^{(2)}$ erhält man als Schnitt der ersten mit der Geraden $t^{(2)}$ eine Involution von Punkten $X^{(2)}Y^{(2)}X_1^{(2)}Y_1^{(2)}$, welche als mit jener perspectivisch den imaginären Schnittpunkt von $t^{(2)}$ mit $\mathfrak{G}_i^{(1)}$ darstellt; und als Schnitt der zweiten mit $t^{(1)}$ die Involution $X^{(1)}Y^{(1)}X_1^{(1)}Y_1^{(1)}$, welche den imaginären Schnittpunkt von $\mathfrak{G}_i^{(2)}$ mit $t^{(1)}$ repräsentiert. Die Punkte $\mathfrak{G}_i^{(1)}t^{(2)}$, $\mathfrak{G}_i^{(2)}t^{(1)}$ liegen aber beide sowohl in der

Ebene $\mathfrak{G}_i^{(1)}$ als auch in der Ebene $\mathfrak{G}_i^{(2)}$ und somit in der Schnittlinie derselben. Die Schnittlinie zweier imaginärer Ebenen an sich kreuzenden reellen Geraden ist also immer identisch mit der Verbindungslinie der beiden imaginären Punkte auf denselben Geraden, deren Involutionen aus denen der Ebenen durch diese ausgeschnitten werden.

Weil ein zu beiden gegebenen Involutionen zugleich perspectivisches Strahlbüschel nicht gefunden werden kann, so müssen wir sagen, dass die Verbindungslinie $G_i^{(1)} G_i^{(2)}$ und Schnittlinie $\mathfrak{G}_i^{(1)} \mathfrak{G}_i^{(2)}$ weder einen reellen Punkt enthält noch in einer reellen Ebene liegt, dass sie also nur imaginäre Punkte und nur imaginäre Ebenen enthalten kann. Sie ist also wesentlich verschieden von der punktiert-planierten oder der imaginären Geraden erster Art und mag als imaginäre Gerade zweiter Art und als rein imaginäre Gerade bezeichnet werden.

Wir zeigen nun zunächst, dass sie mit jeder reellen Ebene einen imaginären Punkt G_i gemein hat und dass durch jeden reellen Punkt eine imaginäre Ebene $\mathfrak{G}_i$ nach ihr geht. Um die Verbindungsebene eines reellen Punktes P mit der imaginären Verbindungsgeraden $G_i G_i^{(1)}$ der imaginären Punkte G_i in t und $G_i^{(1)}$ in $t^{(1)}$ zu bestimmen, können wir die Ebene $Pt^{(1)}$ als Bildebene denken und t durch Durchstosspunkt S und Fluchtpunkt Q' darstellen. Dann ist (Fig. 12) PS der Strahl x und die mit dem Scheitel P gebildeten Strahlbüschel über den von den Punkten auf t, $t^{(1)}$ in x ausgehenden projectivischen Darstellungen der bezüglichen G_i, $G_i^{(1)}$ resp. bestimmenden Involutionen, also xyx_1y_1 und $xy^1x_1{}^1y_1{}^1$, liegen in der Ebene Pt und der Bildebene resp. und sind, weil ihr gemeinschaftlicher Strahl sich selbst entspricht, perspectivisch. Zieht man durch Q' parallel zur Spur PS die Fluchtlinie der Ebene Pt, so sind V^*, X_1^*, Y_1^* die Fluchtpunkte der Strahlen y, x_1, y_1 und die durch sie zu y^1, $x_1{}^1$, $y_1{}^1$ gezogenen Parallelen die Fluchtlinien der Ebenen yy^1, $x_1x_1{}^1$, $y_1y_1{}^1$, die sich in Q'^*,

Fig. 12.



dem Fluchtpunkt der perspectivischen Axe t^*, schneiden, welche mit x^1, y^1, $x_1{}^1$, $y_1{}^1$ die Ebenen $\mathbf{X}^*\mathbf{Y}^*\mathbf{X}_1{}^*\mathbf{Y}_1{}^*$ derjenigen Involution liefern, die die gesuchte imaginäre Ebene nach Sinn und Lage definiert. Ganz analog kann das Problem von der Schnittlinie imaginärer Ebenen und ihrem Schnittpunkt mit einer reellen Ebene behandelt werden.

Aber wir erhalten eine symmetrische Lösung beider Probleme, wenn wir die reellen Träger $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ der imaginären Elemente in allgemeiner Lage, die schneidende Ebene ihrer rein imaginären Verbindungs- und Schnittlinie als Bildebene und den Punkt, mit dem wir sie verbinden sollen, als Projectionscentrum voraussetzen. (Fig. 13, p. 55.)

Die Geraden $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ seien durch ihre Durchstoss- und Fluchtpunkte $S_1 Q_1'$, $S_2 Q_2'$ gegeben und die imaginären Ebenen $\mathbf{G}_t^{(1)}$, $\mathbf{G}_t^{(2)}$ selbst bestimmt durch die von den Ebenen $t^{(1)} S_2$, $t^{(2)} S_1$ resp. ausgehenden projectivischen Darstellungen, welche die Spuren $x^{(1)}$ oder $S_1 S_2$, $y^{(1)}$, $x_1{}^{(1)}$, $y_1{}^{(1)}$ und $x^{(2)}$ oder $S_2 S_1$, $y^{(2)}$, $x_1{}^{(2)}$, $y_1{}^{(2)}$ fixieren. (In der Figur sind die oberen Indices weggelassen, da die Zugehörigkeit zu dem einen oder andern der beiden Büschel und ebenso der Reihen augenscheinlich ist.)

Die perspectivische Axe t dieser beiden Büschel, die Verbindungslinie der Punkte Y oder $y^{(1)}y^{(2)}$, X_1 oder $x_1{}^{(1)}x_1{}^{(2)}$, Y_1 oder $y_1{}^{(1)}y_1{}^{(2)}$, schneidet $S_1 S_2$ in einem Punkt X und die Gruppe XYX_1Y_1 ist eine zu beiden Büscheln zugleich perspectivische Involution von demselben Sinn, d. h. sie ist die Darstellung des imaginären Punktes, den die reelle Ebene der Zeichnung mit den beiden imaginären Ebenen $\mathbf{G}_t^{(1)}$ und $\mathbf{G}_t^{(2)}$ gemein hat.

Wählen wir dagegen zweitens den gedachten reellen Punkt des Raumes als Projectionscentrum, so nehmen wir die von ihm ausgehende gemeinsame Transversale der beiden Geraden $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, die in der Figur durch den gemeinschaftlichen Punkt A' ihrer beiden Bilder dargestellt wird, und repräsentieren die beiden Involutionen, welche die Punkte $G_t^{(1)}$ und $G_t^{(2)}$ oder, was dasselbe ist, die Ebenen $\mathbf{G}_t^{(2)}$, $\mathbf{G}_t^{(1)}$ darstellen, durch projectivische z. B. harmonische Gruppen von A' aus, wie ABA_1B_1 in der Figur; dann sind die Geraden $B^{(1)}B^{(2)}$, $A_1{}^{(1)}A_1{}^{(2)}$, $B_1{}^{(1)}B_1{}^{(2)}$ — in der Figur fehlen die oberen Indices — Strahlen aus einem Punkt T und bilden von dem nach A' gehenden Strahl a aus die harmonische Darstellung einer durch T gehenden ima-

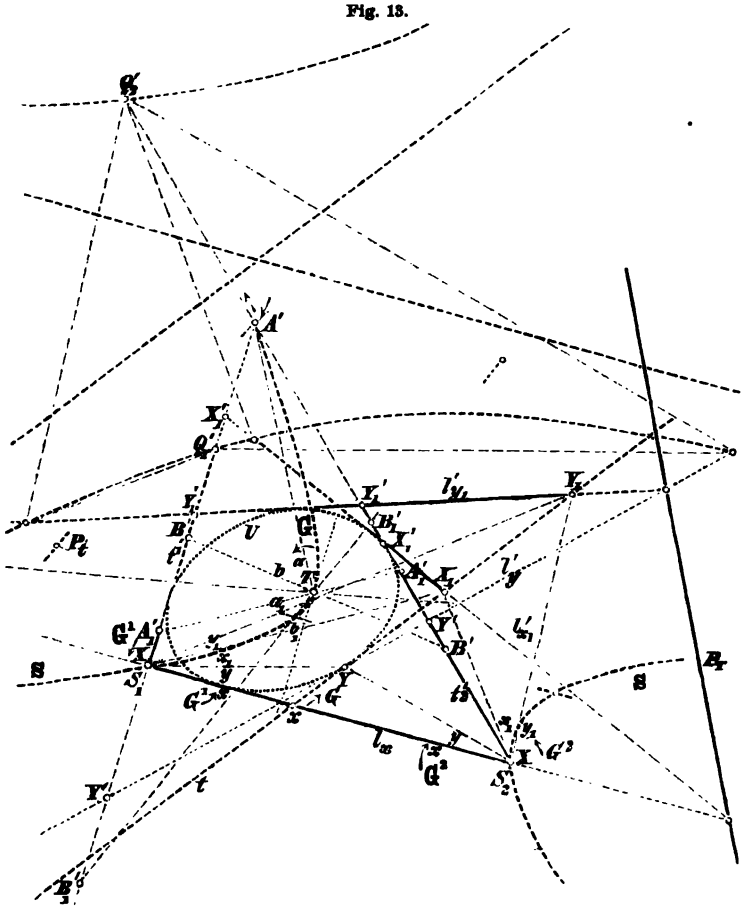
ginären Geraden $a b a_1 b_1$, welche die Spur der projicierenden Ebene $\mathfrak{G}_i$ unserer gegebenen Geraden ist.

Die projicierende Gerade von T ist somit die Scheitelkante eines zu den Involutionen in $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ gleichzeitig perspectivischen Ebenenbüschels und durch jeden Punkt im Raum geht eine solche reelle Gerade. Diess ist aber genau auch die Bedeutung der Geraden t in der Ebene der Zeichnung; denn die Ebenen $t^{(1)}Y$, $t^{(2)}Y$ schneiden nicht blos die Geraden $t^{(2)}$ und $t^{(1)}$ in den Punkten $Y^{(2)}$ und $Y^{(1)}$, sondern auch einander in der durch Y gehenden Verbindungslinie l_y dieser Punkte; desgleichen die Ebenen $t^{(1)}X_1$, $t^{(2)}X_1$ jene in den Punkten $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ und einander in deren durch X_1 gehenden Verbindungslinie l_{x_1}, die Ebenen $t^{(1)}Y_1$, $t^{(2)}Y_1$, jene in $Y_1^{(1)}$, $Y_1^{(2)}$ und sich in einer durch Y_1 gehenden Geraden l_{y_1}. (Siehe Fig. 13, wo diese Punkte projiciert und diese Geraden durch ihre Fluchtpunkte bestimmt sind.) Die Schnittlinie der Ebenen $t^{(1)}X$ und $t^{(2)}X$ ist der Strahl x oder S_1S_2, der insofern mit l_x bezeichnet werden mag. Das Ebenenbüschel $(t \cdot l_x l_y l_{x_1} l_{y_1})$ ist also zu den involutorischen Reihen des $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ gleichzeitig perspectivisch; in jeder Ebene des Raumes liegt eine reelle Gerade, welche die Scheitelkante eines solchen Büschels ist.

Die Geraden l_x, l_y, l_{x_1}, l_{y_1} sind offenbar Erzeugende der zweiten Regelschaar desjenigen einfachen Hyperboloids, welches durch die drei geraden Linien $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ und t bestimmt ist und die Bildebene im Punkt (t, l_x) berührt, da l_x die Erzeugende der Regelschaar l in derselben ist. Die Geraden dieser Regelschaar sind involutorisch gepaart von ihren Schnittpunkten mit den t wie von ihren Verbindungsebenen mit denselben. Durch den der Involution beigefügten Sinn ist die eine ihrer sich selbst entsprechenden Geraden ganz ebenso bestimmt, wie in den involutorischen Reihen und Büscheln das eine der Doppelelemente. Unsere rein imaginäre Gerade ist die Verbindungslinie der drei imaginären Punkte $G_i^{(1)}$, $G_i^{(2)}$, G_i und sie ist ebenso die gemeinsame Schnittlinie der drei imaginären Ebenen $\mathfrak{G}_i^{(1)}$, $\mathfrak{G}_i^{(2)}$, $\mathfrak{G}_i$. Wir sehen, dass die Regelschaar rücksichtlich der Theorie der imaginären Elemente zu den Elementargebilden erster Stufe heranrückt. Die involutorische Zuordnung innerhalb einer solchen Regelschaar definiert zwei Gerade derselben als sich selbst entsprechend, die im Fall der Ellipticität

der Involution durch den Bewegungssinn in der Regelschaar von einem Anfangselement aus unterschieden werden können. Die imaginären Punkte der Regelflächen zweiten Grades ordnen sich in drein imaginären Geraden,

Fig. 13.



wie die reellen in reellen Geraden; jene schneiden die reellen Geraden der andern Schaar nur in imaginären Punkten.

Wenn man statt dessen die Involutionen der Ebenen durch projectivische oder besser speciell harmonische Gruppen $xy^{(1)}x_1^{(1)}y_1^{(1)}$ und $xy^{(2)}x_1^{(2)}y_1^{(2)}$ von den Parallelebenen durch die Träger aus (Fluchtlinie x) darstellt, so erhält man in der

Perspectivaxe t oder XYX_1Y_1 der genannten zugehörigen Fluchtlinienbüschel das Bild der zweiten Geraden t in der unendlich fernen Ebene (x ist das der ersten) auf demjenigen hyperbolischen Paraboloid, welches die reellen Träger und die imaginäre Schnittlinie der imaginären Ebenen enthält. Die von X, Y, X_1, Y_1 als Fluchtpunkten ausgehenden Schnittlinien der zugehörigen Ebenenpaare l_x oder x, l_y oder S_yY, l_{x_1} oder $S_{x_1}X_1$, l_{y_1} oder $S_{y_1}Y_1$ bilden die symmetrisch harmonische Gruppe in der Regelschaar l des Paraboloids, durch welche die gesuchte imaginäre Gerade definiert wird. Diese Gruppe ist somit einzig bestimmt; und weil l_{x_1} als durch die vierten harmonischen der Fluchtpunkte, also durch die Mitten zwischen den Schnitten mit l_y und l_{y_1} auf S_1Q_1' und S_2Q_2' gehend, durch l_y, l_{y_1} mit bestimmt ist, so kann man sagen, dass die betrachtete imaginäre Gerade auf eine einzige Art durch den endlichen Flächenstreifen des zugehörigen hyperbolischen Paraboloids zwischen zwei Mantellinien ihrer Schaar bestimmt sei. In genauer Analogie zu den symmetrisch harmonischen Darstellungen der früher betrachteten imaginären Elemente, die auf Strecken, ebene Winkelstreifen und Keilwinkelräume führten.

Das vorher besprochene die Bildebene berührende Hyperboloid erscheint in der Figur als dargestellt durch seine Spur, das Linienpaar t, l_x, seine Fluchthyperbel, deren unendlich ferne Punkte die Richtungen dieser Geraden sind, und durch seine Umrissellipse U.

Für das andere durch das Projectionscentrum gehende Hyperboloid bilden die Punkte A', T, die Durchstosspunkte der projicierenden Erzeugenden, als Strahlbüschelscheitel den Umriss; die Spur und die Fluchtlinie, von denen aber nur die erste eingezeichnet ist, sind Hyperbeln; diese Spur geht, mit der einen Asymptote schwach gegen die Horizontale geneigt, mit dem linken Ast durch S_1 nach T und aufwärts nach A', mit dem andern durch S_2. Der Pol der Involution der Durchstosspunkte von a, a_1, b, b_1 als Erzeugenden der zweiten Regelschaar ist P_t, der Pol von t in Bezug auf dieselbe Hyperbel $\mathfrak{S}$; die Paare von Geraden durch die Durchstosspunkte von a, a_1; b, b_1 nach den Paaren der Involution in t, also

X, X_1; etc. liefern somit weitere Punkte von ihr. Die zweite oder die Fluchthyperbel geht mit dem einen Ast durch Q_1' und T und mit dem andern durch A' nach Q_2' — beide haben dieselben Asymptotenrichtungen.

Wir betrachten nur das erste der beiden Hyperboloide, das der t und l, weiter, da das zweite genau die dual entsprechenden Resultate liefert. Die Bilder der Geraden l_x, l_{x_1}, l_y, l_{y_1} sind wie die von t, $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ Tangenten seines Umrisskegelschnittes U; sie liefern vermöge ihrer involutorischen Paarung durch Verbindung der Punkte l_x, l_{x_1} und l_y, l_{y_1} eine Gerade als Polare p_T und als Schnittpunkt von $l_x l_y$, $l_{x_1} l_{y_1}$ mit $l_x l_{y_1}$, $l_{x_1} l_y$ den zugehörigen Pol T. Derselbe kann von dem Punkt T der vorigen Betrachtung nicht verschieden sein; denn der Satz von der Involution harmonischer Pole und Polaren am Kegelschnitt (I, § 32) kann wie folgt beschrieben werden: Schneiden wir die Involution harmonischer Polaren um einen Punkt im Innern des Kegelschnitts mit einer beliebigen Tangente desselben und ziehen wir von den Schnittpunkten mit ihren Paaren conjugierter Strahlen die zweiten Tangenten des Kegelschnittes, so ist der Ort ihrer Schnittpunkte die Polare der Involution oder des angenommenen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt; sie ist also von der Wahl der Tangente unabhängig, mit der man die Polarinvolution schneidet. Hat man also eine Involution von Tangenten des Kegelschnittes — wie die Involution l_x, l_{x_1}, l_y, l_{y_1} auf U in unserem Fall — und schneidet man sie mit zwei Tangenten der Curve, wie $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, so muss ein Punkt, der der Scheitel einer zu beiden in ihnen entstandenen involutorischen Punktreihen zugleich perspectivischen Strahleninvolutionen ist, nothwendig der Pol der Involution sein. Diese Eigenschaft hat aber der durch die Construction ermittelte Punkt T rücksichtlich der Involutionen auf $t^{(1)}$, $t_{(2)}$ und überdiess auf t.

Hierbei ist wieder nur im Fall der elliptischen Involution der Sinn von der Wahl der schneidenden Tangente unabhängig.

Durch das Vorige ist bewiesen, dass die Projectionen von drei Punkten $G_i^{(1)}$, $G_i^{(2)}$, G_i unserer imaginären Geraden zweiter Art in einer Geraden liegen und also auch, dass dieselbe durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt ist; die dualistisch ent-

sprechende Betrachtung zeigt, dass sie auch durch irgend zwei ihrer Ebenen bestimmt ist.

Wenn man die beiden bestimmenden imaginären Punkte oder Ebenen durch ihre conjugiert imaginären ersetzt, oder was dasselbe ist, wenn man den Sinn der sie bestimmenden Involutionen und damit den Sinn der involutorischen Regelschaar l mit dem entgegengesetzten Sinn vertauscht, so wird dadurch die conjugierte Gerade zur ersten definiert. Alle Geraden t in den Ebenen des Raumes und alle Geraden CT aus den verschiedenen Punkten des Raumes, welche die erste Gerade liefert, gehören auch der conjugierten an, nur mit Umkehrung des Sinnes ihrer Involutionen. Oder jede reelle Gerade, welche eine imaginäre Gerade zweiter Art trifft, schneidet auch ihre conjugierte. Die gemeinschaftlichen Transversalen von vier reellen Geraden von allgemeiner Lage sind somit — um das in Form einer Anwendung zusammen zu fassen — wenn sie nicht reell sind (und nicht zusammenfallen), zwei conjugiert imaginäre Gerade zweiter Art.

Nach dieser ausführlichen Erörterung ihrer Beziehungen zu den reellen Raumelementen wollen wir auch der Beziehungen der imaginären Geraden zweiter Art zu den imaginären Punkten und Ebenen des Raumes kurz gedenken; wir erwarten, dass sie mit solchen eine imaginäre Ebene resp. einen imaginären Punkt bestimme und können diese einfach construieren. Denken wir im Fall der imaginären Ebene deren reelle Gerade, um in derselben zwei Punkte C_1, C_2 zu wählen und deren Verbindungsebenen mit der rein imaginären Geraden zu ermitteln, deren reelle Träger C_1T_1, C_2T_2 sein mögen; so schneiden diese imaginären Verbindungsebenen die gegebene imaginäre Ebene in imaginären Geraden erster Art, nämlich mit den reellen Punkten C_1 und C_2, und diese schneiden sich in einem Punkt, weil sie in derselben Ebene gelegen sind. Analog im Fall des imaginären Punktes.

Alle die fundamentalen Sätze über die Verbindungen zwischen den drei Elementarformen: Punkt, Ebene und Gerade behalten somit auch für die nun gefundenen nicht reellen Punkte, Ebenen und Geraden ihre Gültigkeit. Demnach sind die Linealcon-

structionen der harmonischen Gruppe, der Involution und der projectivischen Elementargebilde erster Stufe, die ja nichts Anderes fordern, als die Anwendung dieser Verbindungen, auch mit nicht reellen Elementen noch ausführbar. Wir haben jedoch nicht Raum für die specielle Durchbildung solcher Constructionen. Und ebenso: Andere nicht reelle Raumelemente als die bis jetzt betrachteten gehen aus denselben nicht hervor und existieren also nicht.

Weil nun in projectivischen Räumen — um den umfassendsten Fall hervorzuheben — jeder elliptischen Involution im Gebilde erster Stufe des einen Raumes eine ebensolche elliptische Involution des andern entspricht, so ist auch jedem imaginären Element des einen Raumes ein imaginäres Element des andern zugewiesen durch die projectivische Zuordnung der reellen Elemente. Wir bestätigen diess im folgenden Paragraphen noch durch die Zählung der imaginären Elemente in den Gebilden zweiter und dritter Stufe. Im Falle der Collineation ist die Gleichartigkeit auch dieser entsprechenden imaginären Elemente evident; sie findet aber auch im Falle der Reciprocität, der allgemeinen wie der Polarreciprocität in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades, für die Geraden statt, da sowohl die imaginäre Gerade erster als die zweiter Art sich selbst duale Anschauungen sind; dem imaginären Punkt und der imaginären Ebene entsprechen resp. die imaginäre Ebene und der imaginäre Punkt. Die Gruppe der imaginären Elemente zeigt auch wie die der reellen zwei zu einander und zwei — statt eines — zu sich selbst duale. Die Uebereinstimmung des Bewegungssinnes rücksichtlich der imaginären Elemente bedarf aber noch einer besonderen Untersuchung.

12. Nach den vorhergehenden Erörterungen ist die Zählung der Elemente der Gebilde mit Einschluss der nicht reellen möglich und muss die Uebereinstimmung der bezüglichen Anzahlen für die verschiedenen Elementargebilde von einerlei Stufenzahl erwartet werden.

Ein Elementargebilde erster Stufe besitzt, wie wir schon für diejenigen mit reellen Trägern gesehen haben, $u^2 - 2u + 2$ oder $(u - 1)^2 + 1$ Elemente; dieselbe Zahl gilt auch für diejenigen mit imaginären Trägern.

Wir erläutern die Fälle der imaginären Geraden erster

und zweiter Art und empfehlen die Anwendung derselben Principien auf die Strahlbüschel in imaginärer Ebene oder mit imaginärem Scheitel. Die imaginäre Gerade erster Art enthält als Punktreihe betrachtet einen reellen Punkt und wird von jeder reellen Geraden, die in ihrer reellen Ebene liegt und nicht durch diesen geht, in einem imaginären Punkte geschnitten; da die Gesammtzahl der reellen Geraden der Ebene $(u^2 - u + 1)$ ist und da u derselben durch den besagten reellen Punkt gehen, so hat man bei der imaginären Geraden erster Art $(u^2 - 2u + 1)$ imaginäre Punkte und dazu einen reellen Punkt. Die dual entsprechenden Ueberlegungen zeigen, dass durch eine solche Gerade $(u^2 - 2u + 1)$ imaginäre Ebenen gehen neben der einen reellen, die die bestimmende Involution enthält.

Für eine imaginäre Gerade zweiter Art sahen wir, dass eine beliebige reelle Ebene immer eine reelle Gerade enthält, die durch einen Punkt von jener geht; und überdiess, dass durch jeden ihrer ausserhalb dieser Geraden gelegenen reellen Punkte eine reelle Gerade geht, die mit ihr in einer Ebene liegt, also gleichfalls einen Punkt von ihr enthält; diess giebt uns $(u^2 - 2u + 1)$ Punkte der imaginären Geraden zweiter Art; die Zahl ihrer Ebenen ist die nämliche.

Sodann enthalten Gebilde zweiter Stufe mit reellem Träger $(u - 1)^4 + (u - 1)^2 + 1$ Elemente mit Einschluss der imaginären, und ebenso viele enthalten die Gebilde zweiter Stufe mit nicht reellem Träger. Eine reelle Ebene z. B. enthält $(u^2 - u + 1)$ reelle Punkte und in jeder ihrer $(u^2 - u + 1)$ reellen Geraden überdiess $(u^2 - 3u + 2)$ oder $(u - 1)^4 - (u - 1)$ imaginäre Punkte d. h. zusammen $(u^2 - u + 1)(u^2 - 3u + 3)$ Punkte; die vorher angegebene Zahl. Dieselbe ist auch die Anzahl aller Richtungen und Stellungen im Raum. Und für das Punktesystem in einer imaginären Ebene hat man zu den zusammen $(u^2 - 2u + 2)$ Punkten ihrer reellen Geraden die je $(u^2 - 2u + 1)$ imaginären Punkte der $(u^2 - 2u + 1)$ imaginären Geraden zu zählen, die in ihr von jenen aus gezogen werden können, was dieselbe Zahl giebt; man erhält diese imaginären Punkte ausserhalb des Trägers auch als die Schnittpunkte der imaginären Ebene mit den reellen Geraden des Raumes, die ihre reelle Gerade nicht schneiden, nach § 2 und

prüft damit die Bestimmung. Die Zahl der imaginären Geraden erster Art, die sie enthält, ist $(u-1)^3+(u-1)^2$, die der imaginären Geraden zweiter Art $(u-1)^4-(u-1)^3$ — was mit der einen reellen wieder dieselbe Gesammtzahl der Elemente giebt wie oben.

Der Raum enthält ausser den $u(u^2-2u+2)$ reellen Punkten oder Ebenen noch die sämmtlichen imaginären Punkte resp. Ebenen seiner reellen Geraden; da die Anzahl dieser Geraden $(u^2-2u+2)(u^2-u+1)$ ist und jede (u^2-3u+2) imaginäre Punkte oder Ebenen trägt, so erhält man als die Gesammtzahl der Elemente des Punkt- und resp. Ebenen-Raumes

$$u(u^2-2u+2)+(u^2-3u+2)(u^2-2u+2)(u^2-u+1)$$

oder $$(u^2-2u+2)\{(u^2-3u+2)(u^2-u+1)+u\}$$

oder $$(u-1)^6+(u-1)^4+(u-1)^2+1.$$

Die Zahl seiner nicht im Unendlichen gelegenen Punkte ist $(u-1)^6$, wovon $(u-1)^3$ reell sind.

Die Zahl aller Geraden des Raumes bestimmen wir durch die Zählung von einer beliebigen Ebene aus; da durch jeden ihrer $(u^4-4u^3+7u^2-6u+3)$ Punkte ebenso viele Gerade gehen, wobei nur die in der Ebene selbst liegenden Strahlen nicht einmal, sondern (u^2-2u+2) mal gezählt sind, so erhalten wir für die gesuchte Anzahl

$$\{(u-1)^4+(u-1)^2+1\}\{(u-1)^4+1\}$$

d. h. $$(u-1)^8+(u-1)^6+2(u-1)^4+(u-1)^2+1;$$

davon sind

$$(u-1)^7+(u-1)^6+(u-1)^5-(u-1)^3-(u-1)^2-(u-1)$$

imaginäre Gerade erster und

$$(u-1)^8-(u-1)^7-(u-1)^5+(u-1)^4$$

zweiter Art.

Die Elementargebilde gleicher Stufe enthalten also auch unter Berücksichtigung der imaginären gleich viel Elemente; aber ihre Unendlich-Vielfachheit wird dann durch den doppelten Index der Stufe ausgedrückt.

Man kann nun auf die Zählungen in den Beisp. des § 2

zurückkommen, um sie mit Berücksichtigung der imaginären Elemente auszuführen; wie z. B. dass eine rein imaginäre Gerade von $(u-1)^2+1$ Geraden geschnitten wird, während die Gesammtzahl der eine beliebige Gerade schneidenden Geraden durch $(u-1)^2\{(u-1)^2+1\}^2$ ausgedrückt wird. Wir ziehen es vor, einige Constructionen zu besprechen, die nach dem Vorigen nothwendig müssen ausgeführt werden können.

Wenn wir in der Ebene eines Kegelschnitts und von einem seiner reellen Punkte aus eine imaginäre Gerade gezogen denken, die wir also z. B. durch eine harmonische Gruppe (xyx_1y_1) mit dem zugehörigen Bewegungssinn darstellen, so muss die reelle Gerade sich angeben lassen, welche durch ihren imaginären Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt geht; da aber derselbe nichts anderes ist, als der im angegebenen Sinne liegende Doppelpunkt der Punktinvolution XYX_1Y_1 auf dem Kegelschnitt, welche das Büschel xyx_1y_1 auf ihm erzeugt, so liegt er in der Polare dieser Involution oder in der Geraden von XY, X_1Y_1 nach XY_1, X_1Y und ist der im vorgeschriebenen Sinn liegende Doppelpunkt der von xyx_1y_1 auf ihr bezeichneten Involution. Die gefundene reelle Gerade geht hiernach, wie es sein muss, auch durch den Schnittpunkt der zu unserer imaginären Geraden conjugierten mit dem Kegelschnitt. Analog construiert man den reellen Punkt der zweiten imaginären Tangente, welche von einem imaginären Punkt in einer reellen Tangente eines Kegelschnittes noch an diesen geht; ist die den imaginären Punkt bestimmende Involution in der reellen Tangente durch XYX_1Y_1 gegeben, so nehmen wir die zugehörigen reellen zweiten Tangenten des Kegelschnitts ξ, η, ξ_1, η_1 und bestimmen durch die Geraden $\xi\eta$, $\xi_1\eta_1$ und $\xi\eta_1$, $\xi_1\eta$ ihren Pol im Kegelschnitt; er ist der gesuchte reelle Punkt, und der Sinn der von ihm über XYX_1Y_1 gebildeten Involution bestimmt die gesuchte imaginäre Tangente. Es ist nicht schwer, diese Constructionen für die analogen übrigen Aufgaben zu entwickeln. Wir erwähnen noch den Fall des einfachen Hyperboloids, das von imaginären Ebenen durch eine seiner reellen Geraden g in einer imaginären Geraden zweiter Art geschnitten wird; denn die zwei Paare von Ebenen $\mathbf{XYX_1Y_1}$, die jene bestimmen, schneiden zwei Paare von Erzeugenden l_x, l_y, l_{x_1}, l_{y_1}

der zweiten Regelschaar aus, die durch ihre elliptische Involution und den zugehörigen Bewegungssinn jene Gerade direct definieren.

Die Bestimmung der durch einen Punkt gehenden Transversale zu zwei Geraden kann auf imaginäre Gerade erster und zweiter Art leicht übertragen werden, weil es immer möglich ist, die imaginären Ebenen zu bestimmen, welche den Punkt mit der einen und der andern Geraden verbinden, und ihre Durchschnittslinie anzugeben.

Wenn man von einer punktiert-planierten imaginären Geraden das central projicierte Bild mit Durchstoss- und Flucht-Punkt angeben soll, so wird man ihre projicierende Ebene mit der durch sie gehenden reellen Ebene und mit der projicierenden Parallelebene derselben in der Bildebene zum Schnitt bringen.

Um die Spur und Fluchtlinie einer imaginären Ebene und das Bild eines imaginären Punktes zu finden, dient in analoger Weise die reelle Gerade der Ebene resp. des Punktes.

Die Bestimmung des Durchstoss- und Flucht-Punktes einer rein imaginären Geraden ist im Grunde in den Erörterungen des § 11 enthalten. Man erhält aus den Spurenbüscheln der bestimmenden Ebeneninvolutionen durch harmonische Darstellung vom gemeinsamen Strahl $S_1 S_2$ aus jenen und aus den Fluchtlinienbüscheln derselben durch harmonische Darstellung von ihrem gemeinsamen Strahl $Q_1' Q_2'$ aus diesen. Der reelle Träger von jenem ist die zweite Erzeugende in der Bildebene von dem sie berührenden einfachen Hyperboloid der Geraden, der reelle Träger des Fluchtpunktes das Bild der zweiten unendlich fernen Erzeugenden des zu ihr gehörigen hyperbolischen Paraboloids. Das Verhältniss der Darstellungen beider zu dem reellen Punkt T des Bildes der Geraden aus C ist evident.

Darnach erhält man auch die Fluchtlinie der Ebenen, welche zu zwei rein imaginären Geraden parallel sind, wie oben dasselbe für zwei punktiert-planierte; natürlich auch ebenso für zwei imaginäre Gerade, von denen die eine erster und die andere zweiter Art ist.

Soll man die Normale vom Punkte P auf eine gegebene imaginäre Ebene zeichnen, so wird man zuerst den Flucht-

punkt derselben ermitteln durch die projicierenden Normalen zu den Ebenen der sie bestimmenden Involution.

In analoger Weise kann man die Normalebene aus dem Punkt P zu einer gegebenen imaginären Geraden construieren; sodann ferner die Normalebene zu einer reellen Ebene, die durch eine gegebene imaginäre Gerade hindurchgeht; und die gemeinsame Normale zu zwei imaginären Geraden. Aber es muss genügen, die Behandlung dieser Probleme anzudeuten.

Wesentlich ist nur noch die Betrachtung über den Bewegungssinn in imaginären Gebilden, die wir im Folgenden geben.

13. Sind I, II, III, IV vier Elemente — Punkte oder Ebenen, wir setzen aber weiterhin das erste voraus — einer imaginären Geraden zweiter Art, so gehören zu denselben vier reelle Gerade resp. 1, 2, 3, 4 als ihre Träger und diese sind entweder alle in einer und derselben Regelschaar enthalten oder nicht.

Im ersten Falle sagt man, die vier Elemente gehören einer Kette an und der Wurf (I II III IV) sei neutral. Offenbar bestimmen hiernach drei Elemente einer imaginären Geraden zweiter Art stets eine Kette. Weil aber in dem reellen Wurf (1234) entweder die Elemente 12 durch die 34 oder 13 durch 24 oder 14 durch 23 getrennt sein können, so unterscheidet man für den neutralen Wurf (I II III IV) dem entsprechend drei Arten.

Im zweiten Falle denken wir die Regelschaar der Geraden 1, 2, 3 und wissen nach dem Früheren, dass die Gerade 4 dieselbe nicht schneidet und somit ganz auf der einen oder der andern Seite der durch sie erfüllten Fläche liegt. Nun sind die Strahlen der andern Regelschaar a, b, c... dieser Fläche durch die Gerade zweiter Art involutorisch gepaart mit bestimmtem Bewegungssinn und es sei $ab\,a_1\,b_1$ eine Darstellung derselben. Der Punkt IV derselben liegt wie alle ihre Punkte in der imaginären Ebene $(1.ab\,a_1\,b_1)$ und 4 wird von dem Schnittpunkte mit den Ebenen dieses Büschels in dem Sinn der auf ihr liegenden Punktinvolution von IV durchlaufen. Schneiden wir aber 4 mit dem Ebenenbüschel $(a.123)$, so wird dieser Schnitt sie entweder im gleichen oder im entgegengesetzten Sinn durch-

laufen wie der vorige, je nachdem die Gerade 4 auf der einen oder der andern Seite der Fläche der Regelschaar 123 gelegen ist. Denn zuerst ist jene Unterscheidung nicht abhängig von der gewählten Geraden a; ist c eine andere Gerade in der Schaar der Transversalen von 1, 2, 3, so würde, wenn der Schnitt von c mit einer um c im Sinne $(c.123)$ gedrehten Ebene sich im entgegengesetzten Sinne zu dem von $(a.123)$ bewegen könnte, die Fläche von ihr geschnitten, weil die so auf ihr erzeugten projectivischen Punktreihen nach der Entgegensetzung ihres Sinnes reelle Doppelpunkte besitzen müssten. Und sodann liegen zwei Gerade 4 und 4*, die die Fläche nicht schneiden, und von denen die eine 4 von den Büscheln $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ in gleichem Sinne, die andere aber 4* in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, nothwendig auf entgegengesetzten Seiten derselben; denn die Geraden 1 und a schneiden sich und die Durchstosspunkte der Geraden 4 und 4* in ihrer Ebene müssen sowohl durch a als durch 1 von einander getrennt sein.

Man kann daher sagen, dass der Punkt IV der rein imaginären Geraden im Sinne I II III oder im entgegengesetzten Sinne liege, je nachdem die Ebenenbüschel $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ die Gerade 4 im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne beschreiben.

Für den dualistisch entsprechenden Satz über den Bewegungssinn im Wurf der Ebenen ist es von Belang, dass die Punktreihe 4 von den Ebenenbüscheln $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ in gleichem Sinne beschrieben wird, wenn das Ebenenbüschel 4 von den Punktreihen $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ im entgegengesetzten und umgekehrt.

Sind nun I*, II*, III*, IV* vier Ebenen einer imaginären Geraden zweiter Art, und 1, 2, 3, 4 ihre reellen geraden Träger, so muss der Schnittpunkt der conjugierten Geraden zweiter Art mit I* den reellen Träger 1 haben, weil er in I* liegt etc. Ist für $a_1 b_1 \ldots$ als Transversalen der Regelschaar 123 $(aba_1 b_1)$ eine Darstellung der gegebenen Geraden zweiter Art, also auch $(ab_1 a_1 b)$ eine Darstellung ihrer conjugierten, so sind die Punkte, wo die Ebenen I*, II*, III* diese schneiden, durch die Punktinvolutionen $(1.ab_1 a_1 b)$, $(2.ab_1 a_1 b)$, $(3.ab_1 a_1 b)$ dargestellt und das Ebenenbüschel $(1.ab_1 a_1 b)$ schneidet 4 in

einer Darstellung des Schnittpunktes von IV* mit jener conjugierten Geraden.

Gehört nun 4 zur Regelschaar 123, so sind die Würfe der Ebenen (I*...) der Geraden zweiter Art und der entsprechenden Punkte ihrer conjugierten neutral und von derselben Art.

Gehört aber 4 nicht zur Regelschaar 123 und ist IV* im Sinn I* II* III* gelegen, so wird das Büschel 4 von den Reihen $(1.aba_1)$ und $(a.123)$ im nämlichen Sinn beschrieben und die Reihe 4 von den Büscheln $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ im entgegengesetzten Sinn; somit auch 4 von den Büscheln $(a.123)$ und $(1.ab_1a_1)$ im gleichen Sinn; d. h. auch der Schnittpunkt von IV* mit der conjugierten Geraden zweiter Art liegt im Sinn ihrer Schnitte mit den Ebenen I* II* III*. Man kann diesen Anschauungsgehalt für beide Fälle in den Satz zusammenfassen: Wenn vier Punkte einer Geraden zweiter Art in vier Ebenen der conjugierten Geraden liegen, so ist der Wurf der vier Punkte von derselben Art wie der Wurf der vier Ebenen oder zu ihm projectivisch.

Denkt man nun zu vier Punkten I II III IV einer imaginären Geraden zweiter Art mit den reellen Trägern 1, 2, 3, 4 in einem Originalraum die entsprechenden Punkte $I', \ldots$ der entsprechenden Geraden in einem zu ihm collinearen Raum, so sind auch die zu 1, 2, 3, 4 entsprechenden Geraden $1', 2', 3', 4'$ derselben ihre reellen Träger. Und ist aba_1b_1 eine Darstellung der ersten Geraden durch Transversalen der Regelschaar 1, 2, 3, so ist auch $(a'b'a_1'b_1')$ eine Darstellung der andern durch Transversalen von $1', 2', 3'$; ist 1234 oder 1342, 1423 ein ordentlicher Wurf, so ist es auch resp. $1'2'3'4'$ etc. und es gehört somit der Wurf der vier Punkte $I' II' \ldots$ derselben Classe neutraler Würfe an, wie der Wurf der entsprechenden Punkte I... des Originalraums. Wenn aber 4 nicht zur Regelschaar 123 und somit $4'$ nicht zu $1'2'3'$ gehört, so folgt aus der Gleichheit des Sinnes der Beschreibung von 4 durch die Büschel $(a.123)$ und $(1.aba_1)$ auch die des Sinnes der Beschreibung von $4'$ durch $(a'.1'2'3')$ und $(1'.a'b'a_1')$; folglich kann man sagen: Wenn zwei räumliche Systeme reell projectivisch sind wie nach § 6, so entspricht jedem imagi-

nären Element des einen ein imaginäres Element des andern und jedem Wurf aus vier Elementen einer Geraden zweiter Art insbesondere wieder ein Wurf von solchen, der mit jenem projectivisch oder von gleicher Art ist.

Man begründet auch den Satz: Wenn vier reelle oder nicht reelle Punkte oder Ebenen einer reellen oder nicht reellen Geraden mit zwei sie nicht schneidenden imaginären Geraden zweiter Art verbunden resp. geschnitten werden, so sind die entsprechenden Würfe der Verbindungsebenen resp. Schnittpunkte von gleicher Art. Und wenn vier Punkte einer Geraden in vier Ebenen einer zweiten Geraden liegen, so sind beide Würfe von gleicher Art; oder kurz zusammengefasst: Perspectivische Würfe sind projectivisch oder in Bezug auf den Sinn von gleicher Art.

Und damit ist unser Ziel erreicht, weil in projectivischen Systemen zweiter und dritter Stufe die entsprechenden Elementargebilde erster Stufe sich durch eine Reihe von Schnitt- und Schein-Bildungen aus einander ableiten lassen.

Man sieht wohl, dass es auch möglich ist, Projectivitäten der Elementargebilde herzustellen, in welchen den reellen Elementen des einen imaginäre Elemente des andern entsprechen. Man kann auch für diese, wenn man will, wieder den Entwickelungsgang der darstellenden Geometrie verfolgen; man kann also z. B. die Projection einer reellen Ebene auf eine andere reelle Ebene aus einem imaginären Projectionscentrum oder die centrische Collineation ebener Systeme bei imaginärem Centrum studieren etc.; also mit allmählich fortschreitender Ersetzung der reellen Data durch imaginäre von I, § 11 aus. Aber wir haben uns hier auf die reell projectivischen Gebiete zu beschränken, wo den reellen Elementen des einen ausnahmslos reelle Elemente des andern entsprechen.

14. Wenn nun in den früheren Entwickelungen ob auch ohne directen Gebrauch der Coordinatengeometrie doch Begriffe und Vorstellungen algebraisch-analytischer Art mit Erfolg benutzt wurden, so liegt die Berechtigung dazu nur in dem Umstande, dass aus den fundamentalen geometrischen Bestimmungsmethoden der Raumelemente die

algebraisch-analytischen sich direct vollständig und allgemein ergeben, sobald man die algebraische Zahl als Bestimmungsmittel einführt. Wir geben den Nachweis hiervon in der Weise, dass wir zur Entwickelung nur die soeben allgemein begründeten Lehren von der Projectivität der Gebilde erster Stufe, insbesondere von der Projectivität der Würfe derselben benutzen.

Innerhalb der Gebilde erster Stufe machen wir das Doppelverhältniss, welches von jedem vierten Element mit drei festen Elementen des Gebildes bestimmt wird, als eine algebraische Zahl zum Bestimmungsmittel für dieses vierte Element — eben jene zwischen projectivischen Würfen übereinstimmende Function der vier Elemente, in die gleich anfangs wie jetzt zuletzt der wesentliche Inhalt des Begriffes der Projectivität gelegt erschien. Wir gelangen durch Zusammensetzung in ganz entsprechender Weise, wie in der geometrischen Construction von den Gebilden erster zu denen zweiter und dritter Stufe, so nun auch von der algebraischen Bestimmungsweise der Elemente in den Gebilden erster Stufe zu der der Elemente in den Gebilden höherer Stufen, und damit zu der Einsicht, dass zwischen den geometrischen Untersuchungsmitteln, auf welche die graphische Methode uns geführt hat, und den algebraisch-analytischen Methoden der Coordinatengeometrie kein wesentlicher Unterschied besteht.

Aber der Uebergang zur analytischen Methode eröffnet den Weg zur allgemeinen Untersuchung der geometrischen Formen n^{ten} Grades, zu denen wir im stufenweisen Aufbau nicht gelangen könnten; die Art des Uebergangs sichert zugleich die geometrische Anschaulichkeit und die Möglichkeit, die in den ersten Stufen bewährte Untersuchungsweise im Wesentlichen beizubehalten.

Elemente der analytischen Geometrie brauchen wir nicht vorauszusetzen; aber ganz nach Analogie des Verhältnisses, in dem wir die construierende projectivische Geometrie im Vorigen zur Elementargeometrie erkannt haben, werden wir finden, dass die elementaren Coordinaten des Cartesius einen speciellen Fall der projectivischen Coordinaten bilden; die elementare analytische Geometrie zeigt sich als in reicherer Aus-

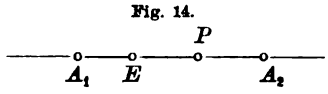
gestaltung in der allgemeinen enthalten. Wenn wir dabei die Verbindung der vorher entwickelten Begriffe über die imaginären Elemente besonders mit der Ausdrucksform der Cartesischen Coordinaten wie schon in § 7 beleuchten, so thun wir für die Einordnung derselben in die analytische Untersuchungsmethode genug, nach der Natur der Beziehung, in welcher wir jene speciellen Coordinaten zu den allgemeinen finden werden.

In einer geradlinigen Punktreihe ist jeder vierte Punkt P durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches er mit drei festen Punkten derselben A_1, A_2, E bildet. Bezeichnen wir die Abstände der Punkte E und P von den Fundamentalpunkten A_2 und A_1 oder allgemeiner die Längen der von ihnen auf zwei beliebige durch A_2 resp. A_1 gezogene Gerade a_1 und a_2 gehenden Perpendikel e_1, p_1 und resp. e_2, p_2, so ist (Fig. 14)

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{A_1 E}{A_2 E} : \frac{A_1 P}{A_2 P} = \frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Nun sind x_1, x_2 zwei algebraische Zahlen, welche die Lage des Punktes P innerhalb der Geraden bestimmen, also die Coordinaten dieses Punktes; man kann sagen, dass sie mit den Abständen des Punktes E von den Fundamentalpunkten A_2, A_1 als Einheiten gemessene Längenzahlen der Abstände des Punktes P von denselben Fundamentalpunkten sind.

Fig. 14.



Für P in E hat man $p_1 = e_1$, $p_2 = e_2$, also $x_1 = x_2 = 1$, und E kann somit als Einheitpunkt des Coordinatensystems in der Reihe bezeichnet werden*). Für P in A_2 ist $x_1 = 0$ und für P in A_1 $x_2 = 0$, so dass diesen Punkten die Grenzwerthe 0 und ∞ als Werthe des Doppelverhältnisses entsprechen.

Durch $x_1 = k x_2$ ist ein Punkt P der Reihe bestimmt, der durch $(A_1 A_2 E P) = k$ aus A_1, A_2, E construiert wird.

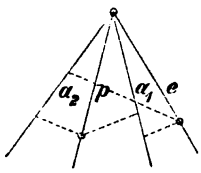
Im ebenen Strahlbüschel ist jeder Strahl p durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches er mit drei festen Strahlen desselben a_1, a_2, e (Fig. 15) bildet. Sind die Längen der Perpendikel auf die F.-Strahlen a_2 und a_1 aus einem Punkte

*) Weiterhin soll F.-Punkt, F.-Gerade, F.-Dreieck etc. für Fundamentalpunkt etc. und E.-Punkt etc. für Einheitpunkt etc. gesetzt werden.

von e durch ε_1, ε_2 und aus einem Punkte von p resp. durch π_1, π_2 ausgedrückt, so ist

$$(a_1 a_2 e p) = \frac{\sin(a_1, e)}{\sin(a_2, e)} : \frac{\sin(a_1, p)}{\sin(a_2, p)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

Fig. 15.



und es sind ξ_1, ξ_2 zwei Zahlen, die die Lage des Strahls p im Büschel bestimmen, d. h. Coordinaten dieses Strahls; man kann sagen, dass sie die mit den Abständen zweier festen Punkte in a_2, a_1 respective von e gemessenen Längenzahlen der Abstände dieser Punkte von p sind.

Im Ebenenbüschel bestimmt man in gleicher Weise die Ebene Π durch die festen Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{E}$ desselben mittelst des Doppelverhältnisses

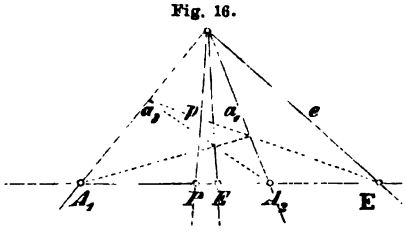
$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E} \Pi) = \frac{\sin(\mathbf{A}_1, \mathbf{E})}{\sin(\mathbf{A}_2, \mathbf{E})} : \frac{\sin(\mathbf{A}_1, \Pi)}{\sin(\mathbf{A}_2, \Pi)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Für p in e oder Π in $\mathbf{E}$ hat man vorher wie jetzt $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$ und kann also den Strahl e, respective die Ebene $\mathbf{E}$ als E.-Strahl und als E.-Ebene für das Coordinatensystem des Büschels bezeichnen. Für p in a_1 und respective in a_2 oder Π in $\mathbf{A}_1$ respective $\mathbf{A}_2$ hat man $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = 0$. Durch die Gleichung $\xi_1 = \varkappa \xi_2$ ist ein Strahl p oder eine Ebene Π des Büschels bestimmt, welche aus a_1, a_2, e oder $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{E}$ construiert werden durch die gegebenen Doppelverhältnisswerthe

$$(a_1 a_2 e p) = \varkappa, \quad (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E} \Pi) = \varkappa.$$

Denken wir die F.-Strahlen a_1, a_2 des Büschels durch die F.-Punkte A_2, A_1 der Reihe respective gelegt und den Einheitpunkt E von dem Einheitstrahl e durch diese und durch jene harmonisch getrennt, also e nach dem vierten harmonischen zu E conjugierten Punkte $\mathbf{E}$ der Reihe $A_1 A_2 E$ gehend (Fig. 16), so gelten unter der ferneren Voraussetzung, dass der Strahl p des Büschels durch den Punkt P der Reihe geht, die Relationen

Fig. 16.



$$(A_1 A_2 EP) = \frac{x_1}{x_2}, \quad (a_1 a_2 ep) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 \mathbf{E} P), \quad (A_1 A_2 \mathbf{E} E) = -1.$$

Das Product der beiden letzteren ist

$$(A_1 A_2 \mathbf{E} E)\,(A_2 A_1 \mathbf{E} P) = (A_1 A_2 PE) = -\frac{\xi_1}{\xi_2}$$

und durch Multiplication desselben mit der ersteren folgt

$$(A_1 A_2 EP)\,(A_1 A_2 PE) = 1 = -\frac{\xi_1 x_1}{\xi_2 x_2} \quad \text{oder} \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$$

als die Relation, welche zwischen den Coordinaten ξ_1 eines Strahles (einer Ebene) im Büschel und denen eines Punktes in der Reihe unter den gemachten Voraussetzungen immer dann und nur dann stattfindet, wenn der Strahl respective die Ebene durch den Punkt geht.

1) Sind ξ_1, ξ_2 Constanten a_1, a_2, so dass sie einen bestimmten festen Strahl bezeichnen, so genügen die Coordinaten jedes seiner Punkte der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

welche man die Gleichung des Strahls nennen wird; die Coefficienten dieser Gleichung sind die Coordinaten des Strahls im Büschel.

2) Sind dagegen x_1, x_2 Constanten α_1, α_2, so dass sie einen bestimmten festen Punkt bezeichnen, so genügen die Coordinaten jedes durch ihn gehenden Strahls der Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0,$$

die man die Gleichung des Punktes nennt und welche seine Coordinaten zu ihren Coefficienten hat.

3) Die gewonnenen Coordinatenbestimmungen werden durch den Uebergang zum Bilde in elementaren Projectionen und durch Uebergang zum Relief nicht gestört.

4) Sind Y und Z von den Coordinaten y_i, z_i zwei Punkte der Reihe mit den F.-Punkten A_1, A_2 und dem E.-Punkt E, so ist für $A_1 A_2 = s$, $A_1 E : A_2 E = \varepsilon$

$$\frac{y_2}{y_1} = (A_2 A_1 EY) = \frac{A_2 E}{A_1 E} : \frac{A_1 Y}{A_2 Y}, \quad A_2 Y = A_1 Y - s$$

und somit

$$A_1 Y = \frac{\varepsilon s y_2}{\varepsilon y_2 - y_1}; \quad \text{ebenso} \quad A_1 Z = -\frac{\varepsilon s z_2}{\varepsilon z_2 - z_1},$$

also die Distanz

$$YZ = A_1 Z - A_1 Y = \varepsilon s \, \frac{(y_2 z_1 - y_1 z_2)}{(E z_2 - z_1)\,(E y_2 - y_1)}.$$

Für $\varepsilon = -1$ oder E als Mitte von $A_1 A_2$ wird dies

$$YZ = s \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{(z_1 + z_2)(y_1 + y_2)};$$

und für A_2 im Unendlichen $A_1 E = 1$, somit $\frac{y_2}{y_1} = A_1 Y$ gleich der Abscisse von Y oder x', etc.

$$YZ = x'' - x'.$$

15. Ein Punkt P in der Ebene wird nun als Schnittpunkt von zwei Geraden und eine Gerade p in der Ebene als Verbindungslinie zweier Punkte derselben bestimmt; wir werden jene Geraden als Strahlen zweier Büschel von festen Scheiteln A_1, A_2 und diese Punkte als Punkte zweier Reihen auf festen Geraden a_1, a_2 angeben mittelst der Doppelverhältnisse, die sie mit drei festen Strahlen resp. drei festen Punkten derselben Büschel und Reihen bestimmen; und dies wird mit der geringsten Zahl von Hülfslinien etc. geschehen, wenn wir die Verbindungslinien der Punkte A_1 und A_2 mit einem dritten willkürlichen Punkte A_3 der Ebene als die ersten F.-Strahlen a_2 und a_1 resp. und die Gerade $A_1 A_2$ als gemeinsamen zweiten F.-Strahl a, der Büschel A_1, A_2 benutzen, und einen vierten Punkt E der Ebene als Schnittpunkt ihrer Einheitstrahlen wählen. Zu besserer Uebersicht trennen wir zunächst die Bestimmung des Punktes P von der der Geraden p, für welche letztere dem Vorigen nur noch eine Gerade e hinzuzufügen ist, die durch ihre Schnittpunkte mit a_1, a_2 die Einheitpunkte der betreffenden Reihen liefert. Wir sagen:

Wenn vier Punkte A_1, A_2, A_3, E in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so bestimmt jeder fünfte Punkt P dieser Ebene an A_1, A_2, A_3 als Scheiteln den vierten Strahl eines Büschels, der durch das Doppelverhältniss desselben aus den drei anderen bestimmt wird. (Fig. 17[a].)

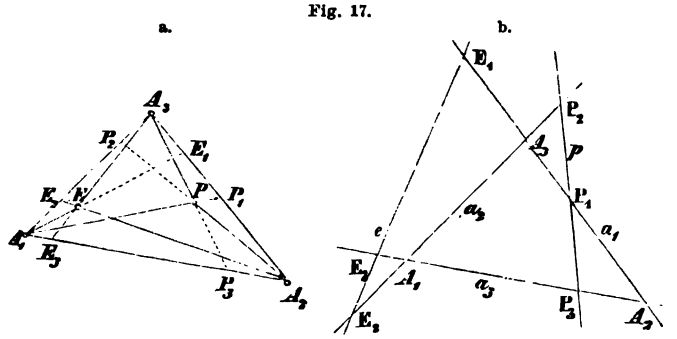
Wenn vier Gerade a_1, a_2, a_3, e in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so bestimmt jede fünfte Gerade p dieser Ebene in a_1, a_2, a_3 als Trägern den vierten Punkt einer Reihe, der durch das Doppelverhältniss derselben aus den drei anderen bestimmt wird. (Fig. 17[b].)

Ganz analog in den Bündeln von Strahlen und Ebenen, wo ein fünfter Strahl in Bezug auf vier andere, die nicht zu drei in einer Ebene liegen, resp. eine fünfte Ebene in Bezug auf vier andere, die nicht zu drei durch einen Strahl gehen, durch die Doppelverhältnisse der Ebenenbüschel, resp. Strahlbüschel bestimmt wird, die mit je einem von den gegebenen Elementen von den jedesmal übrigen erzeugt werden. Nach dem Vorigen bedarf das letztere keiner besondern Entwickelung, die Betrachtung der ebenen Systeme genügt; die Betrachtung im Bündel vollzieht sich an dem Schein der Figur in der Ebene aus seinem Scheitel oder wird durch den Übergang zum Schnitt mit einer beliebigen den Scheitel nicht enthaltenden Ebene auf die in dieser Ebene zurückgeführt. Der Scheitel des Bündels wird dabei cyklographisch (vergl. I, § (7) p. 23f.) oder durch den ihm als Centrum zukommenden Distanzkreis auf der Ebene angegeben.

Wir bezeichnen im Folgenden wie früher durch ein Symbol wie $A_1 . A_2 A_3 E P$ die vier Strahlen $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 E$ und $A_1 P$ des Büschels vom Scheitel A_1 und durch Hinzufügung der Klammern mit $(A_1 . A_2 A_3 E P)$ ihr Doppelverhältniss; ebenso durch das Symbol $a_1 . a_2 a_3 e p$ die vier Punkte $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_1 e$, $a_1 p$ der Reihe in der Geraden a_1 und mit $(a_1 . a_2 a_3 e p)$ ihr Doppelverhältniss.

Dann hat man in Fig. 17[a] im Dreieck $A_1 A_2 A_3$ für P und Fig. 17[b] im Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ für p resp.

Fig. 17.



$(A_1 . A_2 A_3 E P) = (A_2 A_3 E_1 P_1)$, $(a_1 . a_2 a_3 e p) = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1)$,
$(A_2 . A_3 A_1 E P) = (A_3 A_1 E_2 P_2)$, $(a_2 . a_3 a_1 e p) = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2)$,
$(A_3 . A_1 A_2 E P) = (A_1 A_2 E_3 P_3)$. $(a_3 . a_1 a_2 e p) = (A_2 A_1 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3)$.

Sind nun e_1, e_2, e_3 die Abstände des Punktes E und ebenso p_1, p_2, p_3 die des Punktes P von den Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 resp. oder sind allgemeiner e_1, p_1; e_2, p_2; e_3, p_3 die in gleichen Richtungen gemessenen Längen von E und P aus bis zu jenen Geraden, so haben die vorstehenden Doppelverhältnisse, nämlich

$$\frac{A_2E_1}{A_3E_1} : \frac{A_2P_1}{A_3P_1}, \quad \frac{A_3E_2}{A_1E_2} : \frac{A_3P_2}{A_1P_2}, \quad \frac{A_1E_3}{A_2E_3} : \frac{A_1P_3}{A_2P_3},$$

die folgenden Werthe

$$\frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = \frac{x_2}{x_3},$$

$$\frac{e_1}{e_3} : \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = \frac{x_3}{x_1},$$

$$\frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Sind nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Abstände des Strahls e und ebenso π_1, π_2, π_3 die des Strahls p von den Punkten a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 oder A_1, A_2, A_3 resp. oder sind allgemeiner ε_1, π_1; ε_2, π_2; ε_3, π_3 die in zwei bestimmten Richtungen gemessenen Längen von diesen Punkten bis zu e und p, so haben die vorstehenden Doppelverhältnisse, nämlich

$$\frac{A_3\mathbf{E}_1}{A_2\mathbf{E}_1} : \frac{A_3\mathbf{P}_1}{A_2\mathbf{P}_1}, \quad \frac{A_1\mathbf{E}_2}{A_3\mathbf{E}_2} : \frac{A_1\mathbf{P}_2}{A_3\mathbf{P}_2}, \quad \frac{A_2\mathbf{E}_3}{A_1\mathbf{E}_3} : \frac{A_2\mathbf{P}_3}{A_1\mathbf{P}_3},$$

die Werthe

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \frac{\xi_3}{\xi_1},$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Offenbar sind die Zahlen x_1, x_2, x_3 und die Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 gemäss den Entwickelungen über die Gebilde erster Stufe definiert.

Dass das Product der gefundenen Werthe und somit der vorigen Gruppen von Doppelverhältnissen die Einheit ist, giebt Sätze über die Beziehung des Dreiecks der A_i oder a_i zu einem Punkt resp. einer Geraden, wenn man E oder e geeignet wählt (vergl. die Beisp. 1, 2).

Nun sind x_1, x_2, x_3, resp. ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei algebraische Zahlen, welche die Lage von P in seiner Ebene durch A_1, A_2, A_3, E und die Lage der Geraden p durch a_1, a_2, a_3 und e bestimmen, d. h. sie sind die Coordinaten des Punktes P resp. der geraden Linie p der Ebene — und insofern sie durch drei Einheiten e_1, e_2, e_3, resp. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ausgedrückt werden, die trimetrischen Coordinaten eines Punktes

und einer Geraden der Ebene; insofern ihre Verhältnisse durch Projection, Relief und andere projectivische Umformungen nicht geändert werden, nennen wir sie die projectivischen Coordinaten derselben.

Ist P in E, so ergeben sich aus $p_1 = e_1$, etc.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

und E kann somit als der E.-Punkt des Coordinatensystems bezeichnet werden.

Für P in A_2A_3 ist $p_1 = 0$ und also $x_1 = 0$,

$$\frac{x_3}{x_1} = \infty, \quad \frac{x_1}{x_2} = 0,$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = k_1 = (A_2 A_3 E_1 P_1).$$

Ebenso für P in A_3A_1

$$x_2 = 0, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = k_2$$

und für P in A_1A_2

$$x_3 = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = k_3.$$

Für P in A_1 folgt

$$x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_1 = \frac{h_1}{e_1}; \text{ etc.}$$

Ist p in e, so ergeben sich aus $\pi_1 = \varepsilon_1$, etc.

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$$

und e kann als die E.-Gerade des Coordinatensystems bezeichnet werden.

Für p durch a_2a_3 oder A_1 ist $\pi_1 = 0$ und daher $\xi_1 = 0$,

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \infty, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0,$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \varkappa_1 = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1).$$

Ebenso für p durch A_2

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \varkappa_2$$

und für p durch A_3

$$\xi_3 = 0, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \varkappa_3.$$

Für p in a_1 folgt

$$\xi_2 = 0, \; \xi_3 = 0, \; \xi_1 = \frac{h_1}{\varepsilon_1}; \text{ etc.}$$

wenn z. B. h_1 die von der Ecke A_1 ausgehende oder der Seite a_1 des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$ oder $a_1a_2a_3$ entsprechende Höhe desselben und e_1, ε_1 resp. die entsprechenden Höhen des Dreiecks A_2A_3E und Dreiseits a_2a_3e sind.

Die Coordinaten x_i, ξ_i bleiben für die Bestimmung im Strahlen- und Ebenen-Bündel unverändert brauchbar, wenn dieselben auf F.-Elemente bezogen werden, welche die projicierenden der F.-Elemente des ebenen Systems sind; sie sind also projectivische Coordinaten der Elemente der Gebilde zweiter Stufe, nicht nur der ebenen Systeme, sondern auch der Bündel.

Machen wir E zum Schnittpunkt der Halbierungslinien

der Winkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$ oder zum Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so werden die x_i gleiche Vielfache der p_i und für die Festsetzung der Einheit als Radius jenes Kreises ihnen gleich. Der Punkt P wird durch die Verhältnisse seiner senkrechten Abstände von drei festen Geraden der Ebene bestimmt und man kann daher das System der entsprechenden Coordinaten bezeichnen als die Dreilinien-Coordinaten des Punktes.

Nehmen wir dagegen E als Schwerpunkt des Dreiecks an, so sind die e_i die Drittel der entsprechenden Dreieckshöhen und die x_i können als Verhältnisse der Flächenzahlen der Dreiecke A_jA_kP und $A_1A_2A_3$ aufgefasst werden. Man nennt desshalb diese Coordinatenbestimmung für Punkte das System der Flächen-Coordinaten.

Denken wir e als die unendlich ferne Gerade, also zugleich als Verbindungslinie der vierten harmonischen Punkte zu den Seitenmitten in Bezug auf die Ecken, so sind die ε_i gleich gross und die π_i können den Abständen der Geraden von den Ecken des Dreiecks gleichgesetzt werden. Die Gerade p wird durch die Verhältnisse ihrer senkrechten Abstände von drei festen Punkten der Ebene bestimmt und man kann daher das System der entsprechenden Coordinaten bezeichnen als die Dreipunkt-Coordinaten der Geraden.

Weil die Mitten der Dreiecksseiten die in Bezug auf die Ecken conjugiert harmonischen ihrer unendlich fernen Punkte sind, so sagt man, der Schwerpunkt eines Dreiecks und die unendlich ferne Gerade seiner Ebene seien durch dasselbe harmonisch von einander getrennt. In Folge dessen stehen Flächencoordinaten und Dreipunktcoordinaten in einem gewissen Zusammenhang. (Vergl. § 14.) Nach der Unzerstörbarkeit der harmonischen Gruppen durch Projection erweitert sich jener Zusammenhang von Punkt und Gerade, wie unten bei 6).

Wir entwickeln, um die Vortheile solcher speciellen Coordinaten anzudeuten, für Dreilinien-Coordinaten den Ausdruck des Quadrates der Distanz d zwischen zwei Punkten Y und Z.

Sind also die Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes die senkrechten Abstände desselben von den drei Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des F.-Dreiecks $A_1A_2A_3$, und bezeichnen s_1, s_2, s_3

die Längen dieser Seiten und $\triangle$ den Flächeninhalt des Dreiecks, so findet zwischen diesen Maassen des F.-Dreiecks und den Coordinatenlängen immer die Relation statt

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2\triangle.$$

Aus den beiden entsprechenden Gleichungen für die Coordinaten y_i von Y und z_i von Z folgt die Relation zwischen den Differenzen gleichnamiger Coordinaten

$$s_1 (y_1 - z_1) + s_2 (y_2 - z_2) + s_3 (y_3 - z_3) = 0,$$

nach welcher die Quadrate derselben immer durch ihre Produkte ausgedrückt werden können, z. B.

$$(y_3 - z_3)^2 = -\frac{s_1}{s_3}(y_1 - z_1)(y_3 - z_3) - \frac{s_2}{s_3}(y_2 - z_2)(y_3 - z_3).$$

Bilden wir nun mittelst der Perpendikel aus Y und der Parallelen aus Z zu A_1A_2, A_1A_3, die sich resp. in Y_3 und Y_2 schneiden, die beiden Coordinatendifferenzen $YY_3 = y_3 - z_3$ und $YY_2 = y_2 - z_2$, so ist aus dem $\triangle YY_2Y_3$

$$\overline{Y_2Y_3}^2 = (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2 - 2(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)\cos A_1;$$

aus dem Kreisviereck YY_2ZY_3 ergiebt sich aber die Sehne Y_2Y_3 gleich dem Durchmesser d, multipliciert mit dem Sinus ihres Peripheriewinkels, somit

$$d^2 \sin^2 A_1 = \overline{Y_2Y_3}^2$$

und das Distanzquadrat ist daher ausdrückbar in der Form

$$d^2 = \alpha_1 (y_2 - z_2)(y_3 - z_3) + \alpha_2 (y_3 - z_3)(y_1 - z_1) + \alpha_3 (y_1 - z_1)(y_2 - z_2).$$

Da nun für Y in A_2, Z in A_3 einerseits die Coordinaten die Werthe $0, \frac{2\triangle}{s_2}, 0$; $0, 0, \frac{2\triangle}{s_3}$ haben und anderseits das Distanzquadrat gleich s_1^2 wird, so folgt

$$s_1^2 = -\alpha_1 \frac{4\triangle^2}{s_2 s_3} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = -\frac{s_1^2 s_2 s_3}{4\triangle^2}$$

und aus YZ in A_3A_1 und in A_1A_2 resp. ergeben sich analog die Werthe von α_2, α_3 und damit der allgemeine Ausdruck

$$d^2 = -\frac{s_1 s_2 s_3}{4\triangle^2}\{s_1(y_2 - z_2)(y_3 - z_3) + s_2(y_3 - z_3)(y_1 - z_1) + s_3(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)\}.$$

Weil die $2\Delta : s_i$ die Höhen h_i des F.-Dreiecks sind, so ist auch

$$d^2 = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\{s_1^2 h_1 (y_2 - z_2)(y_3 - z_3) + \ldots\} \text{ etc.}$$

1) Für E als Mittelpunkt des in $A_1 A_2 A_3$ eingeschriebenen Kreises ist

$$\frac{\sin A_j A_i E}{\sin A_k A_i E} = -1, \quad \text{also} \quad \frac{x_j}{x_k} = -\frac{\sin A_k A_i P}{\sin A_j A_i P}$$

und das Product der drei Quotienten dieser Art somit

$$\frac{\sin A_3 A_1 P}{\sin A_2 A_1 P} \cdot \frac{\sin A_1 A_2 P}{\sin A_3 A_2 P} \cdot \frac{\sin A_2 A_3 P}{\sin A_1 A_3 P} = -1.$$

2) Ist E der Schnittpunkt der Geraden von den Ecken nach den Mittelpunkten der Gegenseiten des Dreiecks (Schwerpunkt), so ist

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{A_2 E_1}{A_3 E_1} \cdot \frac{A_3 P_1}{A_2 P_1} = -\frac{A_3 P_1}{A_2 P_1}$$

$$= (A_1 \cdot A_2 A_3 E P) = \frac{\sin A_2 A_1 E}{\sin A_3 A_1 E} : \frac{\sin A_2 A_1 P}{\sin A_3 A_1 P} = -\frac{\sin A_3 A_1 P}{\sin A_2 A_1 P} : \frac{A_1 A_2}{A_1 A_3},$$

und mit Rücksicht auf die Werthe der beiden andern Doppelverhältnisse liefert das Product sämmtlicher drei die Relation der Ecktransversalen eines Punktes P

$$\frac{\sin A_3 A_1 P}{\sin A_2 A_1 P} \cdot \frac{\sin A_1 A_2 P}{\sin A_3 A_2 P} \cdot \frac{\sin A_2 A_3 P}{\sin A_1 A_3 P} = -1 = \frac{A_3 P_1}{A_2 P_1} \cdot \frac{A_1 P_2}{A_3 P_2} \cdot \frac{A_2 P_3}{A_1 P_3}.$$

3) Ist e die unendlich ferne Gerade der Ebene, so wird

$$(A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1) = \frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1}$$

und mit Rücksicht auf die Werthe der beiden andern Doppelverhältnisse giebt ihr Product die Relation für die Schnittpunkte einer Geraden

$$\frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1} \cdot \frac{A_3 \mathbf{P}_2}{A_1 \mathbf{P}_2} \cdot \frac{A_1 \mathbf{P}_3}{A_2 \mathbf{P}_3} = 1.$$

Diese und die Relationen in 1) und 2) sind die Hauptsätze der Theorie der Transversalen.

4) Denkt man zu den Punkten $\mathbf{P}_i$ der Geraden in den Seiten des Dreiecks die conjugiert harmonischen P_i in Bezug auf die jedesmaligen Ecken, so folgt wegen

$$\frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1} = -\frac{A_2 P_1}{A_3 P_1}, \text{ etc.}$$

durch Substitution in die letzte Relation unter 3)

$$\frac{A_2P_1 \cdot A_3P_2 \cdot A_1P_3}{A_3P_1 \cdot A_1P_2 \cdot A_2P_3} = -1,$$

die Relation unter 2); d. h. die Geraden A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 schneiden sich in einem Punkt P.

5) Man erhält auch wegen

$$\frac{\sin A_3A_1P}{\sin A_2A_1P} = -\frac{\sin A_3A_1\mathfrak{P}_1}{\sin A_2A_1\mathfrak{P}_1}, \text{ etc.}$$

zur Relation unter 2) die andere Form

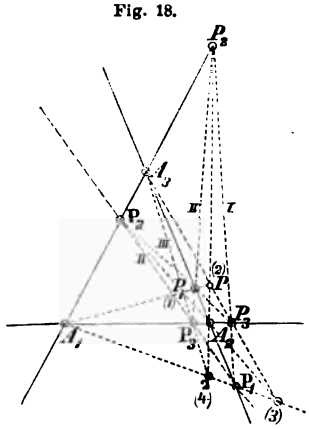
$$\frac{\sin A_3A_1\mathfrak{P}_1}{\sin A_2A_1\mathfrak{P}_1} \cdot \frac{\sin A_1A_2\mathfrak{P}_2}{\sin A_3A_2\mathfrak{P}_2} \cdot \frac{\sin A_2A_3\mathfrak{P}_3}{\sin A_1A_3\mathfrak{P}_3} = 1.$$

Ueberdiess für einen Punkt P und eine beliebige Gerade p durch Division von 3) mit 4)

$$-1 = (A_2A_3\mathfrak{P}_1P_1)\,(A_3A_1\mathfrak{P}_2P_2)\,(A_1A_2\mathfrak{P}_3P_3)$$
$$= (A_1 \cdot A_2A_3\mathfrak{P}_1P_1)\,(A_2 \cdot A_3A_1\mathfrak{P}_2P_2)\,(A_3 \cdot A_1A_2\mathfrak{P}_3P_3).$$

6) Man kann sagen, der Punkt P in 4) und die angenommene Gerade p seien an allen Ecken und auf allen Seiten des Dreiecks der A_i oder a_i von einander harmonisch getrennt, oder die Gerade p sei die Harmonikale des Punktes P in Bezug auf das Dreieck. P ist das Centrum und p die Axe der Collineation der perspectivischen Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $P_1P_2P_3$ oder Dreiseite $a_1a_2a_3$ und $p_1p_2p_3$, wenn man mit p_i die Gerade A_iP_i bezeichnet.

Fig. 18.



Man construiert zu einem Punkt P in Bezug auf ein Dreieck $A_1A_2A_3$ die harmonische Gerade p wie folgt: Ziehe A_1P, A_2P, A_3P bis zu den Gegenseiten in P_1, P_2, P_3; schneide P_1P_2 mit A_1A_2 in $\mathfrak{P}_3$, P_2P_3 mit A_2A_3 in $\mathfrak{P}_1$, so ist $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1$ die harmonische Gerade (Fig. 18).

Es ist zugleich die beste Form der Construction der vierten harmonischen Punkte in den drei Seiten. Man construiert ebenso P aus p, indem man die Ecken des Dreiecks der $\mathfrak{P}_iA_i$ mit den Gegenecken des gegebenen verbindet, als Schnitt dieser drei Geraden. Insofern ist die Construction die vom Bild des Schwerpunktes des Dreiecks mit dem Bild $A_1A_2A_3$ in einer Ebene mit p als Fluchtlinie q' nach I, § 4, 6 (Halbierung von Strecken).

16. Nach den Definitionen haben wir dem E.-Punkt E und ebenso der E.-Geraden e die Coordinaten $+1$ beizulegen, und jeder andere Punkt sowie jede andere Gerade hat Coordinaten, welche nach Grösse oder Zeichen oder nach Grösse und Zeichen davon verschieden sind. Die Construction giebt darüber Auskunft.

Das Verhältniss zweier Coordinaten x_i, z. B.

$$x_2 : x_3 = (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{A_2 E_1}{A_3 E_1} \cdot \frac{A_3 P_1}{A_2 P_1},$$

ist für alle Punkte der Geraden $A_1 E$ der positiven Einheit gleich und nimmt positiv bleibend bis zur Null ab, wenn die Gerade $A_1 P$ sich aus dieser Lage gegen A_3 hin dreht, während es bis zum Unendlichgrossen wächst während der umgekehrten Drehung aus der Lage $A_1 E$ gegen A_2. Jenseits dieser beiden Grenzlagen ist dasselbe Verhältniss negativ und zwar jenseits der ersten zunächst ächt und jenseits der zweiten derselben unächt gebrochen, vom Unendlichen abnehmend; beide Regionen werden gegen einander abgegrenzt durch die dem Verhältnisswerth $x_2 : x_3 = -1$ entsprechende Gerade, welche zu $A_1 E$ in Bezug auf $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ conjugiert harmonisch ist. Der Zusammenhang der Grössenverhältnisse von x_2 und x_3 mit der Lage des zugehörigen Punktes ist damit klargestellt; rücksichtlich der Zeichen lässt der positive Werth des Verhältnisses die positiven wie die negativen Zeichen für beide Coordinaten und der negative Werth den Wechsel der Zeichen derselben zu.

Ebenso liefert das Verhältniss der Coordinaten ξ_i z. B.

$$\xi_2 : \xi_3 = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1) = \frac{A_3 \mathbf{E}_1}{A_2 \mathbf{E}_1} \cdot \frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1}$$

für $\mathbf{P}_1$, vom Werth $+1$ in $\mathbf{E}_1$ ausgehend gegen A_2 hin bis Null abnehmende und gegen A_3 hin bis zum Unendlichen zunehmende positive Werthe; über diese Grenzen hinaus an jene anstossend die ächt gebrochenen, an diese anschliessend die unächt gebrochenen, beide mit dem Werth -1 aneinander grenzend in dem zu $\mathbf{E}_1$ in Bezug auf A_2 und A_3 conjugiert harmonischen Punkt. Die gleiche Bemerkung rücksichtlich der Zeichen gilt. Die Betrachtung des zweiten zur Construction des Elements benutzten Coordinatenverhältnisses, etwa $x_1 : x_3$,

resp. $\xi_1 : \xi_3$ vollendet die Übersicht der Lage nach der Grösse und den Zeichen der Coordinaten.

Das F.-Dreieck $A_1 A_2 A_3$ resp. $a_1 a_2 a_3$ theilt die Ebene in vier oder auch sieben Theile, deren einen wir als das Innere desselben J bezeichnen; die drei andern sind die übrig bleibenden Theilpaare seiner drei Winkelflächen $\angle A_3 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_3 A_1$ und jedes Paar derselben hängt nur durch das Unendlichferne zusammen und besteht aus einer Scheitelwinkelfläche und der zugehörigen Aussenwinkelfläche; nämlich bei A_1 und bei $A_2 A_3$, bei A_2 und bei $A_3 A_1$, bei A_3 und bei $A_1 A_2$ resp. oder kürzer 1 und 23, 2 und 31, 3 und 12. Jeder Punkt der Ebene, der keiner F.-Geraden angehört, liegt in einem bestimmten dieser vier Theile der Ebene, und jede Gerade, die durch keinen F.-Punkt geht, geht nicht hinein in einen dieser vier Theile oder nicht in Hälften von zweien derselben.

Im Fall der Punktcoordinaten x_i haben nun alle mit E in demselben Flächentheil liegenden Punkte drei positive Coordinaten und die Zeichen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 ändern sich beim Überschreiten der F.-Geraden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ resp. Ist also E im Innern J des F.-Dreiecks gelegen, so sind die Zeichen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Reihe nach $- + +$, $+ - -$ in den Flächentheilen 23 und 1; $+ - +$, $- + -$ in 31 und 2 und $+ + -$, $- - +$ in 12 und 3. Liegt dagegen E im Flächentheil 12, so hat man hier die Zeichenfolge $+ + +$ und in 3 dagegen $- - -$; man hat in 23 und 1 die Folgen $- + -$, $+ - +$; in 31 und 2 sodann $+ - -$, $- + +$ und im Innern $+ + -$. Es fehlt jeweilig diejenige Zeichencombination, welche der des Flächentheils J entgegengesetzt ist. Fasst man die beiden Theile einer Winkelfläche, die das Innere von einander trennt, als ein Gebiet, sodass zu dem Innern die drei Gebiete 1 und 23 oder I, 2 und 31 oder II, 3 und 12 oder III hinzutreten, so wird für E im Innern die Zeichenfolge im Gebiet I $\mp \pm \pm$; in II $\pm \mp \pm$ und in III $\pm \pm \mp$, sodass das ungleiche Zeichen der Coordinate zukommt, die den Index des Gebietes hat. Für E im Gebiet III hat das Innere die Gruppe $\pm \pm \mp$, die Gebiete I und II aber resp. $\pm \mp \pm$ und $\mp \pm \pm$.

Wenn sodann im Fall der ξ-Coordinaten die Gerade e nicht durch das Innere des F.-Dreiecks geht, so haben auch

alle andern Geraden der Ebene, die den Flächentheil J nicht durchsetzen, drei positive Coordinaten; man kann dieselben aber in sechs Gruppen theilen, je nachdem sie durch die Theile der Ebene gehen:

1, 12, 2, 23; 2, 23, 3, 31; 3, 31, 1, 12;
1, 13, 3, 32; 2, 21, 1, 13; 3, 32, 2, 21.

Sodann bilden die Geraden, welche so in's Innere des F.-Dreiecks gehen, dass sie die Ecke A_1 abschneiden oder die Seiten A_1A_2, A_1A_3 innerhalb treffen, zwei durch die Zeichengruppe $-++$ charakterisierte Gruppen, die nach den durchsetzten Flächentheilen als 2, 12, J, 13 und 3, 13, J, 12 bezeichnet werden können. Sie gehen weder durch 1 noch durch 23 oder nicht durch das Gebiet I. Die Geraden von den Zeichen $+-+$, welche die Ecke A_2 abschneiden, gehen durch die Flächentheile 3, 23, J, 21; 1, 21, J, 23 resp., d. h. nicht durch das Gebiet II oder 2, 31. Und die Geraden $++-$, welche die Ecke A_3 abschneiden, durch 1, 31, J, 32; 2, 32, J, 31 resp. d. h. nicht durch das Gebiet III oder 3, 12. Immer entspricht das undurchsetzte Gebiet den Coordinaten von ungleichen Zeichen. Analog für jede anders festgesetzte Lage der Einheitlinie.

Man erhält somit für jede Gruppe von drei numerischen Werthen der Coordinaten x_1, x_2, x_3 durch Wechsel der Vorzeichen vier Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 und im Fall der Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 analog vier Gerade p_0, p_1, p_2, p_3. Nehmen wir an, dass dieselben in beiden Fällen der Reihe nach den Zeichengruppen $+++$, $-++$, $+-+$, $++-$ entsprechen, so folgt aus den die Coordinatenverhältnisse repräsentierenden Doppelverhältnissen, dass die vier Punkte dreimal in zwei Paaren auf Geraden aus A_1, A_2, A_3 liegen, welche jeweilen harmonisch getrennt sind durch die benachbarten Dreiecksseiten, nämlich aus A_1 die Paare P_0, P_1 und P_2, P_3; aus A_2 die P_0, P_2 und P_3, P_1 und aus A_3 die P_0, P_3 und die P_1, P_2; oder dass sie ein Viereck mit den F.-Punkten als Diagonalpunkten bilden. Die Mittelpunkte der vier die F.-Geraden berührenden Kreise bilden offenbar eine solche Gruppe von Punkten.

Für die Geraden findet man ebenso, dass sie sich in Paaren 01, 23; 02, 31; 03, 12 auf den F.-Geraden a_1,

a_2, a_3 schneiden, in Punkten, welche jeweilen harmonisch getrennt sind durch die benachbarten F.-Punkte, d. h. dass sie ein Vierseit bilden, welches die F.-Geraden zu Diagonalen hat.

Hätte man dagegen drei algebraische Zahlen, so liefern dieselben durch ihre Permutation die Coordinaten von sechs Punkten resp. Geraden, nämlich (abc), (acb), (bca), (bac), (cab), (cba). Man hat hiernach für die drei ersten Punkte z. B. die Coordinatenverhältnisse

$$a:b=(A_1A_2E_3P_3^{(1)}),\quad b:c=(A_2A_3E_1P_1^{(1)}),\quad c:a=(A_3A_1E_2P_2^{(1)});$$
$$a:c=(A_1A_2E_3P_3^{(2)}),\quad c:b=(A_2A_3E_1P_1^{(2)}),\quad b:a=(A_3A_1E_2P_2^{(2)});$$
$$b:c=(A_1A_2E_3P_3^{(3)}),\quad c:a=(A_2A_3E_1P_1^{(3)}),\quad a:b=(A_3A_1E_2P_2^{(3)})$$

und erkennt daraus die Art der Abhängigkeit, in welcher die folgenden vom ersten Punkt der Gruppe stehen. Man hat für $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die beiden Gleichheiten

$$(A_1A_2E_3P_3^{(1)})=(A_1A_3E_2P_2^{(2)}),\quad (A_3A_1E_2P_2^{(1)})=(A_2A_1E_3P_3^{(2)});$$

die Reihen der ersten $A_1A_2E_3P_3^{(1)}$ und $A_1A_3E_2P_2^{(2)}$ wie die der zweiten sind für den Punkt A_2A_3, E_2E_3 oder $\mathbf{E}_1$ als Centrum perspectivisch zu einander und man erhält also aus $P_3^{(1)}$ und $P_2^{(1)}$ durch die nach $\mathbf{E}_3$ gehenden Geraden sofort $P_2^{(2)}$ und $P_3^{(2)}$ und durch die von ihnen nach A_2 resp. A_3 gehenden den Punkt $P^{(2)}$. Ebenso sind $P^{(3)}$ und $P^{(1)}$ verbunden durch die Relationen

$$(A_2A_3E_1P_1^{(1)})=(A_2A_1P_3^{(3)}E_3),\quad (A_2A_1P_3^{(1)}E_3)=(A_3A_1E_2P_2^{(3)}),$$

also perspectivisch für die Centra A_3A_1, $P_1^{(1)}E_3$ und A_2A_3, $P_3^{(1)}E_2$ resp., sodass man aus diesen durch die Strahlen nach E_1 resp. E_3 die Punkte $P_3^{(3)}$ und $P_2^{(3)}$ resp. erhält, damit aber $P^{(3)}$.

Ebenso ist für die Geraden (abc) oder $p^{(1)}$ und (acb) oder $p^{(2)}$

$$(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3^{(1)})=(A_3A_1\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2^{(2)}),\quad (A_3A_1\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2^{(1)})=(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3^{(2)}),$$

perspectivische Reihen mit dem Centrum A_2A_3, $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ oder E_1; und für $p^{(1)}$ und $p^{(4)}$ oder (bac)

$$(A_3A_2\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1^{(1)})=(A_3A_1\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2^{(4)})\text{ und }(A_1A_3\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2^{(1)})=(A_2A_3\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1^{(4)})$$

perspectivisch für A_2A_1, $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$ oder E_3; für $p^{(2)}$, $p^{(4)}$

$$(A_3A_2\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1^{(2)})=(A_3A_1\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2^{(4)})\text{ und }(A_1A_2\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3^{(2)})=(A_2A_3\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1^{(4)})$$

perspectivisch für A_1A_2, $\mathbf{E}_2\mathbf{P}_1^{(3)}$ und für A_1A_3, $\mathbf{E}_1\mathbf{P}_3^{(2)}$. So bestimmen sich alle Elemente der Gruppen aus einem derselben.

1) Man erörtere die Lagenverhältnisse eines Punktes und einer Geraden, welche dieselben drei algebraischen Zahlen in derselben Ordnung zu ihren Coordinaten haben; man schneide E_3A_3 mit der Verbindungslinie von A_2 mit dem Schnitt von e mit A_3P_3 und ziehe vom Schnittpunkt nach $\mathbf{E}_2$ bis $\mathbf{P}_3$ zu A_1A_2 (§ 4); etc., denn A_1A_2, $E_3\mathbf{E}_3$ und $P_3\mathbf{P}_3$ sind Paare einer Involution. Speciell vorausgesetzt, dass die E.-Linie vom E.-Punkt durch das F.-Dreieck harmonisch getrennt ist. (§ 15, 6.)

2) Welche Abhängigkeit der Lage findet statt für Punkte P, P^*, resp. Gerade p, p^*, die für dieselben F.-Elemente reciproke Coordinaten haben? (Vergl. § 19.) Man hat für die Coordinaten x_i und x_i^* die Relationen

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2,$$

und also z. B.

$$x_2^* : x_1^* = x_1 : x_2 \text{ oder } (A_2A_1E_3P_3^*) = (A_1A_2E_3P_3),$$

eine Involution mit dem Paar A_1A_2 und dem Doppelpunkt E_3 zur Bestimmung von P_3^* aus P_3: Man bestimme also den Schnittpunkt von A_2A_3 mit der Geraden von E_3 nach dem Schnitt von A_1E mit A_3P_3 und ziehe von jenem nach E bis A_1A_2. (§ 4.)

Wäre E der Mittelpunkt des dem F.-Dreieck eingeschriebenen Kreises, so ist nach § 15, 1 aus derselben Verhältnissgleichheit der Coordinaten

$$\sin A_1A_3P^* : \sin A_2A_3P^* = \sin A_2A_3P : \sin A_1A_3P,$$

d. h. die Strahlen A_3P^* und A_3P machen mit A_3E gleiche Winkel von entgegengesetztem Drehungssinn; etc. Zwei entsprechende Punkte P, P^* liegen darnach so, dass sie die reellen Brennpunkte eines dem F.-Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes sind. (Vergl. I, § 36, 5.)

3) In der allgemeinen Beziehung des vorigen Beispiels entsprechen die Punkte von den Coordinaten $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ und $(1, 1, -1)$ oder E, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, die Punkte der Gruppe mit gleichen numerischen Coordinaten, sich selbst, und den Punkten ihrer sechs Verbindungslinien $EE^{(1)}$, $EE^{(2)}$, $EE^{(3)}$, $E^{(1)}E^{(2)}$, $E^{(2)}E^{(3)}$, $E^{(3)}E^{(1)}$ entsprechen andere Punkte derselben Geraden.

Mit $x_1 = 0$ behalten x_2^* und x_3^* das Verhältniss $x_3 : x_2$, obschon sie Null werden, d. h. einem Punkt in A_2A_3 entspricht ein Richtungselement aus A_1, etc.

4) Wie ändern sich die Beziehungen, wenn man die eine oder die andere Coordinatengruppe permutiert? Und wie gestalten sich

die analogen Verhältnisse für Linniencoordinaten? Insbesondere für die Einheitgerade als die unendlich ferne wird die einer gegebenen nach 2) entsprechende Gerade die Verbindungsgerade der zu $\mathbf{P}_i$ symmetrischen $\mathbf{P}_i^*$ in Bezug zu den Mitten der Strecken $A_j A_k$ der F.-Geraden.

17. Wir betrachten aber in der Geometrie des ebenen Systems die Gerade nicht nur als ein durch Coordinaten bestimmtes Element, sondern auch als Reihe, d. h. als Vereinigung einfach unendlich vieler Punkte; und wir betrachten auch den Punkt nicht nur als ein durch seine Coordinaten gegebenes Element, sondern ebenso oft als Büschel, d. h. als Träger einfach unendlich vieler Geraden in der Ebene. Dem ersten entsprechend muss für die Gerade eine Relation zwischen den drei Coordinaten jedes in ihr enthaltenen Punktes bestehen, und das zweite fordert für den Punkt eine Relation zwischen den drei Coordinaten jeder durch ihn gehenden Geraden; denn die Punkte einer bekannten Geraden und die Strahlen eines Büschels von gegebenem Scheitel werden durch eines der Verhältnisse zwischen ihren Coordinaten schon bestimmt. Diese Relationon werden als Gleichungen der Geraden und resp. des Punktes bezeichnet. Zur Entdeckung derselben führt somit die Untersuchung der Frage nach der Abhängigkeit der Coordinaten x_i eines Punktes und der Coordinaten ξ_i einer Geraden, welche ausdrückt, dass jener in dieser liegt oder diese durch jenen geht, oder nach der Bedingung der Incidenz.

Dazu denken wir in Erweiterung der Annahmen des § 14 das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ mit dem Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ in der Art identisch, dass die Ecke A_i des ersten der Schnittpunkt der Seiten a_j, a_k des letzten ist, und dass zugleich die E.-Gerade e auf allen Seiten und an allen Ecken desselben vom E.-Punkt E harmonisch oder allgemein nach bestimmten Doppelverhältnissen getrennt sei (§ 15, 5). Dann ist (Fig. 19, p. 87)

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1), \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2), \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3);$$

und man darf setzen

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = (A_2 A_3 \mathbf{E}_1 E_1), \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = (A_3 A_1 \mathbf{E}_2 E_2), \quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (A_1 A_2 \mathbf{E}_3 E_3),$$

weil nach § 15, 5 für den Punkt E und die Gerade e auch bei

unabhängiger Lage das Product dieser drei Doppelverhältnisse die negative Einheit sein muss.

Man erhält durch Multiplication der entsprechenden Paare der vorigen Gleichungen

$$-\frac{\lambda_2\xi_2}{\lambda_3\xi_3} = (A_3A_2E_1\mathbf{P}_1), \quad -\frac{\lambda_3\xi_3}{\lambda_1\xi_1} = (A_1A_3E_2\mathbf{P}_2),$$

$$-\frac{\lambda_1\xi_1}{\lambda_2\xi_2} = (A_2A_1E_3\mathbf{P}_3).$$

Verbindet man damit

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_1P_1), \quad \frac{x_3}{x_1} = (A_3A_1E_2P_2), \quad \frac{x_1}{x_2} = (A_1A_2E_3P_3),$$

so erhält man durch nochmalige Multiplication der entsprechenden Paare ferner die für jeden Punkt und jede Gerade geltenden Gleichungen

$$-\frac{\lambda_2\xi_2x_2}{\lambda_3\xi_3x_3} = (A_2A_3\mathbf{P}_1P_1), \quad -\frac{\lambda_3\xi_3x_3}{\lambda_1\xi_1x_1} = (A_3A_1\mathbf{P}_2P_2),$$

$$-\frac{\lambda_1\xi_1x_1}{\lambda_2\xi_2x_2} = (A_1A_2\mathbf{P}_3P_3),$$

und bildet daraus drei Gruppen zu zweien wie

$$-\frac{\lambda_2\xi_2x_2}{\lambda_3\xi_3x_3} = (A_2A_3\mathbf{P}_1P_1), \quad -\frac{\lambda_1\xi_1x_1}{\lambda_3\xi_3x_3} = (A_3A_1P_2\mathbf{P}_2).$$

Sobald aber der Punkt P in der Geraden p liegt, oder p durch P geht, liefert jede dieser Gruppen durch Addition die Einheit als Summe; man hat z. B. nach der diesen Fall charakterisierenden perspectivischen Lage der Reihen für das Centrum P

$$(A_3A_1P_2\mathbf{P}_2) = (A_3P_1A_2\mathbf{P}_1) = (A_2\mathbf{P}_1A_3P_1),$$

und die Summe zweier Doppelverhältnisse derselben Gruppe von vier Elementen, die sich wie $(A_2A_3\mathbf{P}_1P_1)$ und $(A_2\mathbf{P}_1A_3P_1)$ nur durch Vertauschung der mittlern Elemente unterscheiden, ist stets Eins. Wir beweisen diess, indem wir die Reihe $A_2A_3P_1\mathbf{P}_1$ so projicieren, dass das Bild von P_1 unendlich fern liegt, d. h. von einem beliebigen Centrum $\mathfrak{C}$ auf eine zu $\mathfrak{C}P_1$ parallele Gerade; die Summe

$$(A_2A_3\mathbf{P}_1P_1) + (A_2\mathbf{P}_1A_3P_1)$$

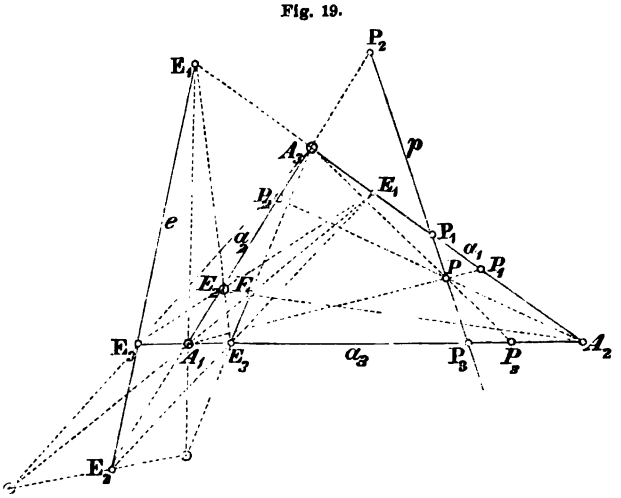
wird dann

$$(A_2' A_3' \mathbf{P}_1' \infty) + (A_2' \mathbf{P}_1' A_3' \infty) = \frac{A_2' \mathbf{P}_1'}{A_3' \mathbf{P}_1'} + \frac{A_2' A_3'}{\mathbf{P}_1' A_3'}$$

$$= \frac{A_2' \mathbf{P}_1' + A_3' A_2'}{A_3' P_1'} = \frac{A_3' \mathbf{P}_1'}{A_3' \mathbf{P}_1'} = 1.$$

Unter den für unsere projectivischen Coordinaten gemachten Voraussetzungen ist also immer für einen Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$

Fig. 19.



und eine Gerade p (ξ_1, ξ_2, ξ_3), wenn jener in dieser liegt und nur dann

$$-\frac{\lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_1 \xi_1 x_1}{\lambda_3 \xi_3 x_3} = 1 \text{ oder } \lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 = 0;$$

insbesondere aber für E und e als harmonisch getrennt durch das Dreiseit $A_1 A_2 A_3$ wegen $-\lambda_2 : \lambda_3 = -1$, etc. oder $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Diese Gleichung kann als Normalform der Bedingung des Ineinanderliegens bezeichnet werden.

Sind die ξ_i constante Grössen a_1, a_2, a_3, so gilt für die Coordinaten x_i aller Punkte der durch sie nach § 15 bestimmten Geraden die Gleichung mit den zwei Unbekannten $x_2 : x_1$, $x_3 : x_1$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

die man als die Gleichung der Geraden (a_1, a_2, a_3) als

Punktreihe in projectivischen Punkt-Coordinaten zu bezeichnen hat. Jede ihrer einfach unendlich vielen Lösungen liefert einen Punkt der Geraden. Ihre Coefficienten sind die projectivischen Coordinaten der Geraden.

Sind die x_i constante Grössen α_1, α_2, α_3, so gilt für die Coordinaten ξ_i aller Strahlen, welche den durch sie nach § 15 bestimmten Punkt enthalten, die Gleichung mit den Unbekannten $\xi_2 : \xi_1$, $\xi_3 : \xi_1$

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

die Gleichung des Punktes als Strahlbüschel in projectivischen Linien-Coordinaten; jede ihrer einfach unendlich vielen Lösungen liefert einen Strahl des Büschels aus ihm; ihre Coefficienten sind die projectivischen Coordinaten des Punktes.

Diese Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ oder der Punkt $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$ wird bei gegebenen F.-Elementen A_1, A_2, A_3, E, e oder unter Voraussetzung der harmonischen Trennung von E und e durch das F.-Dreieck aus diesen und E oder e durch zweimalige Construction des vierten Punktes zu drei gegebenen bei vorgeschriebenem Doppelverhältniss graphisch dargestellt. Man hat z. B. $\frac{a_2}{a_3} = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1)$ und auch wegen

$$-1 = (A_2 A_3 \mathbf{E}_1 E_1), \quad -\frac{a_2}{a_3} = (A_2 A_3 \mathbf{P}_1 E_1);$$

ebenso

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = (A_2 A_3 E_1 P_1) = -(A_2 A_3 \mathbf{E}_1 P_1).$$

Will man hiermit und mit $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = (A_3 A_1 E_2 P_2)$ construieren, so wird man aus einem Projectionscentrum in der Seite $A_1 A_2$ auf eine Gerade durch A_3 und parallel zu $A_1 A_2$ projicieren, wodurch das erste Doppelverhältnis in $\frac{A_3 P_1'}{A_3 E_1'}$, das letzte in $\frac{A_3 E_2'}{A_3 P_2'}$ übergeht.

1) Die E.-Linie e und der E.-Punkt E haben die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

2) Jede Gerade durch den F.-Punkt A_1, etc. hat eine Gleichung von der Form (§ 14, 1)

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Ein Punkt der F.-Linie a_2 hat eine Gleichung von der Form

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_3 \xi_3 = 0.$$

Die Gleichung des F.-Punktes A_1 ist $\xi_1 = 0$.

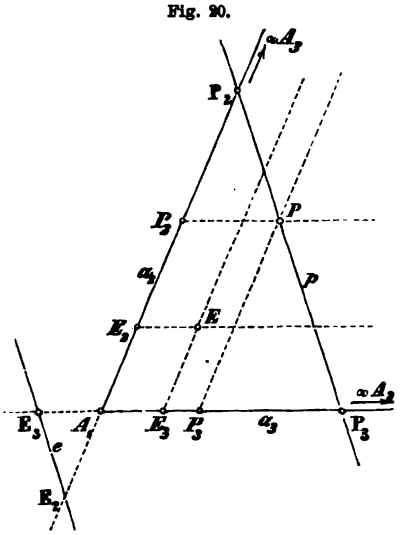
3) Die Strahlen $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$ sind conjugiert harmonisch zu den durch A_1 gehenden F.-Linien. Diess ist ein Specialfall eines allgemeinen Gesetzes. Die Punkte E_1, E_2, E_3 haben die Gleichungen $\xi_2 + \xi_3 = 0$, $\xi_3 + \xi_1 = 0$, $\xi_1 + \xi_2 = 0$; die Strahlen $A_1 \mathbf{E}_1$, $A_2 \mathbf{E}_2$, $A_3 \mathbf{E}_3$ die Gleichungen $x_2 + x_3 = 0$, etc.

4) Wenn liegt die Gerade von gegebenen Coordinaten oder gegebener Gleichung unendlich fern?

Wenn ist der Punkt von gegebenen Coordinaten ein Punkt der unendlich fernen Geraden?

18. Wenn wir eine Seite $A_2 A_3$ oder a_1 des F.-Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ als die unendlich ferne Gerade der Ebene voraussetzen (Fig. 20), so ergiebt sich

Fig. 20.



für die Punktcoordinaten

$$x_1 = p_1 : e_1 = 1;$$

$$\frac{x_2}{x_1} = (\infty A_1 E_3 P_3) = \frac{A_1 P_3}{A_1 E_3} = x_2,$$

$$\frac{x_3}{x_1} = (\infty A_1 E_2 P_2) = \frac{A_1 P_2}{A_1 E_2} = x_3.$$

für die Liniencoordinaten

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1 \infty \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3) = \frac{A_1 \mathbf{E}_3}{A_1 \mathbf{P}_3},$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 \infty \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2) = \frac{A_1 \mathbf{E}_2}{A_1 \mathbf{P}_2};$$

und da wegen

Die Geraden EE_2, PP_2 sind parallel zu A_1A_2, die Geraden EE_3, PP_3 parallel zu A_1A_3 und die Zahlen x_2, x_3 sind die Längenzahlen der mit den Einheiten A_1E_3, A_1E_2 resp. gemessenen Abschnitte A_1P_3 und A_1P_2.

Denkt man endlich

$$A_1E_3 = A_1E_2$$

als die Einheit des Längenmaasses, sodass E in der Halbierungslinie des Winkels der F.-Linien oder Axen liegt, so hat man als Specialfall der projectivischen die Cartesischen Punktcoordinaten,

$$x_2 = x = A_1P_3$$

die Abscisse,

$$x_3 = y = A_1P_2$$

die Ordinate, schief- oder rechtwinklig mit dem Winkel der Axen A_1A_2, A_1A_3.

Die Gleichung der Geraden

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

in solchen Punktcoordinaten ist

$$\xi_1 + \xi_2x + \xi_3y = 0$$

und mit den Bezeichnungen der Plücker'schen Liniencoordinaten entspringt ihre Normalform

$$1 + \xi x + \eta y = 0.$$

$(\infty A_1\mathbf{E}_2E_2) = (A_1\infty\mathbf{E}_3E_3) = -1$
$A_1\mathbf{E}_2 = -A_1E_2$, $A_1\mathbf{E}_3 = -A_1E_3$
ist, so hat man

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1\mathbf{P}_3}{A_1E_3}}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1\mathbf{P}_2}{A_1E_2}}$$

d. h. die Zahlen $\xi_2 : \xi_1$, $\xi_3 : \xi_1$ sind die negativen Reciproken der Längenzahlen der Abschnitte $A_1\mathbf{P}_3$, $A_1\mathbf{P}_2$ der Geraden in den F.-Linien A_1A_2, A_1A_3, gemessen mit den Einheiten A_1E_3 und A_1E_2 resp. Macht man $A_1E_3 = A_1E_2$ der Längeneinheit gleich, so erhält man als Specialfall die gewöhnlichen Plücker'schen Liniencoordinaten. Wir bezeichnen $\xi_2 : \xi_1$ durch ξ und $\xi_3 : \xi_1$ durch η und haben dann

$$-\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3} = \xi, \quad -\frac{1}{A_1\mathbf{P}_2} = \eta,$$

d. h. die Coordinaten der Geraden als die negativen Reciproken ihrer Axenabschnitte.

Die allgemeine Gleichung des Punktes

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

oder

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{x_2}{x_1} + \frac{\xi_3}{\xi_1}\frac{x_3}{x_1} + 1 = 0$$

wird unter Benutzung der Cartesischen Coordinatenbezeichnung auf die Normalform

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

gebracht.

Die F.-Geraden A_1A_2, A_1A_3 oder Axen der x und resp. y, deren Schnittpunkt A_1 der Anfangs- oder Null-Punkt heisst,

die Festsetzung des positiven Sinnes in ihnen und die Wahl einer Längeneinheit bestimmen sonach ein Cartesisches Coordinatensystem, sein E.-Punkt E ist die freie Ecke des Rhombus $E_3 A_1 E_2 E$; für die zugehörigen Plücker'schen Coordinaten ist die in Bezug auf A_1 symmetrische Parallele der Geraden $E_3 E_2$ die E.-Linie.

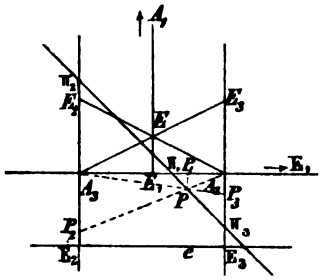
Zusammengehörige Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten können durch Centralprojection aus zusammengehörigen projectivischen x_i, ξ_i abgeleitet werden. Denn für harmonische Trennung von E und e durch das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ genügt es, die allgemeinen Coordinaten so zu projicieren, dass $A_2 A_3$ die unendlich ferne Gerade zum Bilde hat und dass die Richtungen der projicierenden Strahlen nach E_1 und $\mathbf{E}_1$ rechtwinklig zu einander werden; denn damit wird $E_2 A_1 E_3 E$ zum Rhombus und somit $A_1' E_2' = A_1' E_3' = -A_1' \mathbf{E}_2' = -A_1' \mathbf{E}_3'$. Das Projectionscentrum ist ein Punkt des über $E_1 \mathbf{E}_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreises und wenn man es zugleich in dem Kreise über dem Durchmesser $A_2 A_3$ wählt, so werden die Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten rechtwinklig; für die Wahl im Schnitt mit einem Kreise vom Peripheriewinkel φ über $A_2 A_3$ erhält man solche vom Coordinatenwinkel φ. Die absolute Grösse der Maassstabseinheit hängt in allen Fällen von der Wahl der Spur der Bildebene oder der Collineationsaxe ab. Mit $A_2 A_3$ als Verschwindungslinie und jenem Schnittpunkt der Kreise als Collineationscentrum $\mathfrak{C}$ operiert man in derselben Ebene. Damit ist auch der umgekehrte Uebergang von Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten zu allgemein projectivischen vollkommen anschaulich gemacht.

Natürlich kann man statt einer F.-Geraden auch die E.-Gerade in's Unendliche projicieren, und dadurch (§ 15) von zusammengehörigen allgemeinen Coordinaten zu Flächen- und Dreipunkt-Coordinaten x_i, ξ_i übergehen und umgekehrt; und es lassen sich dabei noch weitere Bedingungen erfüllen. (6.)

Projiciert man nur einen F.-Punkt in das Unendliche, z. B. A_1, so erhält man Coordinaten, die etwa als Streifencoordinaten bezeichnet werden können und die man ebenfalls speciell rechtwinklig machen kann, wie in Fig. 21. Für die Construction aus den x_i, ξ_i ist dann die Gerade $A_1 E$ den F.-Geraden $A_2 A_1$, $A_3 A_1$ parallel, die E.-Gerade e schneidet in

A_2A_1 von A_2 aus $A_2\mathbf{E}_3 = -A_2E_3$ und ebenso in A_3A_1 von A_3 aus $A_3\mathbf{E}_2 = -A_3E_2$ ab; die Definitionen liefern zur Construction (die Π_i der Figur entsprechen den $\mathbf{P}_i$ hier)

Fig. 21.



$$\frac{x_2}{x_1} = (A_2A_1E_3P_3) = \frac{A_2E_3}{A_2P_3},$$
$$\frac{x_3}{x_1} = (A_3A_1E_2P_2) = \frac{A_3E_2}{A_3P_2};$$
$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1A_2\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3) = \frac{A_2\mathbf{P}_3}{A_2\mathbf{E}_3},$$
$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1A_3\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2) = \frac{A_3\mathbf{P}_2}{A_3\mathbf{E}_2}.$$

Insbesondere wird (Fig. 21) mit $A_2\mathbf{E}_3 = A_3\mathbf{E}_2 = +1$ und somit $A_2E_3 = A_3E_2 = -1$ wegen $\xi_1 = 1$

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{A_2P_3}, \quad \frac{x_3}{x_1} = -\frac{1}{A_3P_2};$$
$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \xi_2 = A_2\mathbf{P}_3, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = \xi_3 = A_3\mathbf{P}_2,$$

womit die Dualität zu den Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten sich ausprägt, die in der Bildung schon liegt. Die unendlich ferne Gerade ist als Gerade $A_1\mathbf{E}_1$ von der Gleichung $x_2 + x_3 = 0$.

1) Die allgemeine Bedingung der Incidenz wird in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten aus

$$1 + \frac{\xi_2 x_2}{\xi_1 x_1} + \frac{\xi_3 x_3}{\xi_1 x_1} = 0$$

oder

$$1 - (A_2A_1\mathbf{P}_3P_3) - (A_3A_1\mathbf{P}_2P_2) = 0$$

(§ 17) zu

$$1 - \frac{A_1P_3}{A_1\mathbf{P}_3} - \frac{A_1P_2}{A_1\mathbf{P}_2} = 0 \quad \text{oder} \quad 1 + \xi x + \eta y = 0$$

und kann in dieser Form aus der Figur abgelesen werden. Ist nämlich der Punkt P der Geraden p mit A_1 durch eine Gerade verbunden, so ziehe man durch P_2 und P_3 Parallelen zu p, die jene in P_2' und P_3' treffen; dann ist

$$\frac{A_1P_3}{A_1\mathbf{P}_3} = \frac{A_1P_3'}{A_1P} \quad \text{und} \quad \frac{A_1P_2}{A_1\mathbf{P}_2} = \frac{A_1P_2'}{A_1P}$$

und wegen $A_1P_2' = P_3'P$ wird die Incidenzbedingung zu der Identität

$$A_2P - A_1P_3' - P_3'P = 0.$$

Das ist die elementare Ableitung der Gleichung der Geraden und des Punktes.

2) Fällt man von A_1 auf die Gerade p das Perpendikel von der Länge p_n und dem Fusspunkt P und auf dasselbe vom Abscissenfusspunkt P_3 von P das Perpendikel mit dem Fusspunkt P_3', so hat man für α, β als die Winkel der Normale mit den positiven Axen der x und y

$$\cos\alpha = -p_n\xi, \quad \cos\beta = -p_n\eta$$

und erhält aus $\xi x + \eta y + 1 = 0$ die Gleichung der Geraden

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = p_n,$$

insbesondere für rechtwinklige Axen

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p_n.$$

Für den Abstand eines beliebigen Punktes (x', y') von der Geraden $x\cos\alpha + y\cos\beta - p_n = 0$ findet man — mittelst der Parallelen zur Geraden durch ihn und seinen Abscissenendpunkt bis zur Normale p_n aus der Figur — den Ausdruck

$$-(x'\cos\alpha + y'\cos\beta - p_n).$$

Für rechtwinklige Coordinaten ist zudem $p_n = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$, sodass durch Division mit $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ die Gleichung

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

in die Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p_n$ übergeführt wird.

Weil für rechtwinklige Coordinaten das Abstandsquadrat des Anfangspunktes vom Punkt (x, y) gleich (x^2+y^2) und von der Geraden (ξ, η) gleich $(\xi^2+\eta^2)^{-1}$ ist, so sind ein Punkt und eine Gerade, die dieselben rechtwinkligen Cartesischen und respective Plücker'schen Coordinaten haben, Durchstosspunkt und Spur eines Strahls und einer Ebene, die durch den in der Normale der Ebene aus dem Anfangspunkt im Abstand Eins von diesem gelegenen Punkt normal zu einander gelegt sind. (§ 16, 1.)

3) Weil nach 2) für die Gerade (ξ, η) bei rechtwinkligen Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten der Winkel α bestimmt wird aus

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \tan\alpha = \frac{\eta}{\xi},$$

so erhält man für den Winkel φ zwischen zwei Geraden (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2)

$$\tan\varphi = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2}{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes giebt durch sein Verschwinden die Bedingung ihres Parallelismus, der Nenner die Bedingung ihrer

Rechtwinkligkeit. Das gleichzeitige Verschwinden beider oder die Unbestimmtheit des Winkels φ fordert

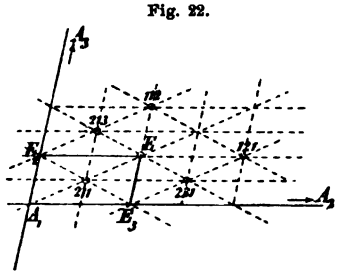
$$\eta_1 : \xi_1 = \eta_2 : \xi_2 = \sqrt{-1} = \pm i.$$

Für solche Gerade ist zugleich das Quadrat des Abstandes vom Anfangspunkt und von jedem reellen Punkt überhaupt unendlich gross und der Abstand von beliebigen zwei in ihr gelegenen Punkten von einander gleich Null.

4) In Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten hat eine durch den Anfangspunkt A_1 gehende Gerade eine Gleichung von der Form $ax + by = 0$; die Axen sind insbesondere durch $x = 0$, $y = 0$ dargestellt. Ein unendlich ferner Punkt der Ebene hat eine Gleichung von der Form $\alpha\xi + \beta\eta = 0$ und die unendlich fernen Punkte der Axen sind insbesondere $\xi = 0$, resp. $\eta = 0$. Die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist $0.x + 0.y + 1 = 0$.

5) Wenn man in Cartesischer Coordinatenbestimmung vom Einheitpunkte E aus durch die Geraden A_1E, A_2E, A_3E, E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 etc. neue Punkte construiert, wie in Fig. 22, so sind die Coordinaten derselben leicht aus der Figur zu entnehmen. Der Punkt E_2E_3, A_1E hat die Coordinaten $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oder $(2, 1, 1)$; der Punkt E_2E_1, E_3E die Coordinaten $(1, 1, 2)$; E_3E_1, E_2E ebenso $(1, 2, 1)$, etc. Man sieht leicht, wie die Construction rückwärts wie vorwärts beliebig weit fortgesetzt werden kann und in jedem Theil der Ebene die Punkte in beliebiger Menge liefert. Man erhält so zuletzt alle Punkte der Ebene mit rationalen oder, da es nur auf die Verhältnisse derselben ankommt, mit ganzzahligen Coordinaten.

Fig. 22.



Geht man durch Projection zu allgemeinen Coordinaten über, so verwandeln sich die Halbierungen und Verdoppelungen beliebiger Intervalle hier in die Bildung von harmonischen Gruppen da und wir erhalten ohne Aenderung der Coordinatenwerthe das geometrische Netz der harmonischen Gruppen, von dem schon in § 5, wenn auch mit Einschränkung auf die Gebilde erster Stufe, zu handeln war.

Es ist klar, dass auf analoge Weise die Gesammtheit der Geraden mit rationalen oder ganzzahligen Coordinaten aus den Axen und der E.-Linie der Plücker'schen Coordinaten abgeleitet werden kann.

6) Jedes allgemeine System projectivischer Coordinaten kann durch Centralprojection in ein solches specielles verwandelt werden,

dessen F.-Dreieck gleichseitig und dessen E.-Linie die unendlich ferne Gerade seiner Ebene ist, sodass sein E.-Punkt der Schwerpunkt und Mittelpunkt des Dreiecks ist; wir wollen sagen in ein System regulärer Coordinaten. Solche sind zugleich Flächen-, Dreilinien- und Dreipunkt-Coordinaten.

Damit gewinnt man z. B. für die Gruppen der je sechs Punkte resp. Geraden, deren Coordinaten durch die Permutationen derselben drei algebraischen Zahlen erhalten werden (§ 16) die einfachste Anschauung. Wendet man die a. a. O. gefundene Construction von $P_2^{(2)}$, $P_3^{(2)}$ aus $P_3^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ resp. im regulären System an, so sieht man, dass $P^{(2)}$ oder (acb) der in Bezug auf EA_1 orthogonal symmetrische des Punktes (abc) ist; und man erhält natürlich ebenso (cba) und (bca) oder $P^{(4)}$ und $P^{(6)}$ nach der Ordnung der Permutationen als die orthogonal symmetrischen von $P^{(1)}$ und $P^{(3)}$ in Bezug auf EA_2 und (bac), (cab) oder $P^{(3)}$ und $P^{(5)}$ als ihre orthogonal symmetrischen in Bezug auf EA_3. Es ist klar, dass auch die Punkte 3 und 4, 5 und 6 symmetrisch sind in Bezug auf A_1E und ebenso 3, 5 für A_2E und 4, 6 für A_3E. Die sechs Punkte bilden Pascal'sche Sechsecke und liegen auf einem Kreis vom Mittelpunkt E. Da für denselben E der Pol der unendlich fernen Geraden e ist, so giebt der Uebergang zum allgemeinen Falle durch Projection den Satz: Die Gruppen von je sechs Punkten mit denselben algebraischen Zahlen als Coordinaten liegen auf den Kegelschnitten eines Systems, für welches die E.-Gerade e die Polare des E.-Punktes E ist und zwar so, dass die Strahlenpaare aus E nach E_1 und $\mathbf{E}_1$, nach E_2 und $\mathbf{E}_2$, nach E_3 und $\mathbf{E}_3$ drei Paare der Polarinvolution von E, also auch ihre Schnitte mit e drei Paare der zugehörigen Polinvolution sind. Wir wissen aus I, § 32, 13, dass durch Pol, Polare und Involution nebst einem Punkte 1 ein Kegelschnitt bestimmt ist; und man erkennt sofort, dass die Construction durch Symmetrie in dem betrachteten Specialfall eben die bezügliche Construction ist, wenn aus 1 mittelst E und e zuerst 3 und aus diesen mittelst der Paare der Involution in e die übrigen Punktepaare 3, 4 und 5, 6 ermittelt werden. Unsere Symmetrien sind Involutionen auf dem Kegelschnitt mit $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ als den zugehörigen Polen.

Und nun ergiebt sich sofort das Gleiche für abc als Liniencoordinaten ξ_i; die sechs Geraden, welche im regulären System derselben Werthegruppe entsprechen, sind Tangenten desselben aus E beschriebenen Kreises und alle Gruppen dieser Art gehören zu Kreisen dieses concentrischen Systems. Oder im allgemeinen Fall: jede Gruppe bildet ein besonderes Brianchon'sches Sechsseit eines Kegelschnittes in dem System, welches den E.-Punkt E und die E.-Gerade e zu Pol und Polare und die Strahlenpaare aus E nach E_1 und $\mathbf{E}_1$, nach E_2 und $\mathbf{E}_2$, E_3 und $\mathbf{E}_3$ zu Paaren der zugehörigen Involution hat. Seine Seiten gehören den drei Invo-

lutionen an, deren Polaren im Kegelschnitt die Geraden A_1E, A_2E und A_3E resp. sind.

7) Man kann für dieselben Gruppen die Ueberführung in rechtwinklige Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten mit einerlei Maassstab benutzen; aus dem Punkt 1 oder $(1\,ab)$ entstehen dann durch Permutation die Punkte 2 oder $(1\,ba)$, 3 oder $(ab\,1)$, also $(1,\ b:a,\ 1:a)$, 4 oder $(a\,1\,b)$, 5 oder $(b\,1\,a)$ und 6 oder $(b\,a\,1)$. Analog für die Liniencoordinaten. Die zugehörigen Kegelschnitte sind bestimmt durch E und e als Pol und Polare mit der Involution aus den Strahlenpaaren von E nach E_1 oder A_1 nach $\mathbf{E}_1$, nach A_2 und $\mathbf{E}_2$, A_3 und $\mathbf{E}_3$, wobei das erste das Rechtwinkelpaar ist und durch seine Lage als normal und parallel zur Polare A_1E die gemeinsame Axe der Kegelschnitte des Systems bezeichnet. Es ist nützlich auch diess weiter auszuführen.

8) Die Punkte und Geraden mit gleichen numerischen Werthen der Coordinaten $(1, a, b)$, $(1, -a, b)$; $(1, a, -b)$ und $(1, -a, -b)$ sind für rechtwinklige Coordinaten darzustellen und ihre Gruppen zu charakterisieren. (§ 16.)

9) Der Uebergang von der Coordinatenbestimmung in der Ebene zu der im Bündel durch Scheinbildung fordert die Einführung der dritten Seite des F.-Dreiecks, im Fall der Cartesischen Coordinaten die Parallelebene zu ihrer Ebene durch den Scheitel. Man zeige, dass die Coordinaten der Punkte des Strahles im Bündel sich von denen seines Fusspunktes in der Ebene nicht unterscheiden etc., und man übertrage die vorigen Ergebnisse auf den Fall der Strahlen und Ebenen im Bündel.

19. Damit die Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

den Punkt $Y(y_1, y_2, y_3)$ und den Punkt $Z(z_1, z_2, z_3)$ enthalte, hat ihre Gleichung die Bedingungen zu erfüllen

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0, \quad \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0,$$

und man erhält die Gleichung der Verbindungslinie YZ, indem man zwischen den drei geschriebenen Gleichungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 eliminiert. Diess geschieht, indem man dieselben mit solchen von den ξ_i unabhängigen Factoren multipliciert, dass in der Summe der Producte die Coefficienten von zweien der Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 gleichzeitig verschwinden, da dann die dritte durch Division wegfällt und ein nur von den x, y, z gebildeter Ausdruck, die Determinante der Gleichungen, gleich Null übrig bleibt.

Wir dürfen die Elemente der Determinantentheorie voraussetzen.

Man schreibt das Resultat der Elimination also in der Form

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ & \diagdown & \times & \times & \diagup \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ & \diagup & \times & \times & \diagdown \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}$$

und bildet ihre Entwickelung nach dem vorstehenden Schema, wobei die drei von oben links nach unten rechts gehenden Diagonalen drei positive, die anderen negative Glieder geben.

In Cartesischen Coordinaten somit

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder $$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2),$$

wo man die Coefficienten von x und y sofort als die Projectionen der Strecke $P_1 P_2$ auf die Coordinatenaxen erkennt. Vergleichen wir damit die Gleichung

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta,$$

so giebt ihre Multiplication mit der Längenzahl von $P_1 P_2$ rechts die Uebereinstimmung mit der vorigen Gleichung und man hat somit, was auch aus der zugehörigen Figur erhellt,

$$2 \triangle O P_1 P_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Für das Dreieck aus drei Punkten P_1, P_2, P_3 wird damit der doppelte Flächeninhalt als der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

erkannt; denn sie ist das Product der Strecke $P_1 P_2$ in die Länge des Perpendikels von P_3 zu ihr, und weil die letztere gefunden wird durch Substitution der Coordinaten des dritten Punktes in die Gleichung der Geraden der beiden ersten und Division mit der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x und y in derselben, welche zugleich die Strecke $P_1 P_2$ ausdrückt.

Die Elimination der ξ_i zwischen

$$x_1 \xi_1 + y_1 \xi_2 + z_1 \xi_3 = 0, \quad x_2 \xi_1 + y_2 \xi_2 + z_2 \xi_3 = 0,$$
$$x_3 \xi_1 + y_3 \xi_2 + z_3 \xi_3 = 0$$

giebt in gleicher Weise das Resultat (vergl. unten 5)

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso liefert die Elimination der x_i zwischen den Gleichungen

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0, \quad x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 = 0,$$
$$x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 = 0$$

die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \quad \text{und} \quad (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

in den analogen Formen

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Unter denselben Bedingungen liegen drei Punkte x, y, z in einer Geraden, respective gehen drei Gerade ξ, η, ζ durch einen Punkt.

1) Die Anwendung der Determinanten liefert die Auflösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = c_1,$$
$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = c_2$$

in der Form

$$u_1 = -\frac{\begin{vmatrix} c_1, & a_{12} \\ c_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & c_1 \\ a_{21}, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Man erhält damit für den Schnittpunkt der Geraden

$$5x_1 - 2x_2 - 10x_3 = 0, \quad -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

die Coordinaten

$$\frac{x_2}{x_1} = (A_2A_1E_3P_3) = \frac{\begin{vmatrix} 5, & 10 \\ 1, & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & 10 \\ 2, & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{6},$$

$$\frac{x_3}{x_1} = (A_3A_1E_2P_2) = \frac{\begin{vmatrix} 2, & 5 \\ 2, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2, & 10 \\ 2, & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3},$$

und construiert den Punkt nach § 15 als Schnittpunkt der Geraden A_3P_3, A_2P_2.

Man übertrage diess in Cartesische Coordinaten.

2) Ebenso erhält man für die Verbindungslinie der Punkte

$$3\xi_1 - \xi_2 + 6\xi_3 = 0, \quad \xi_1 + 5\xi_2 + 4\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1 A_2 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3) = \frac{3}{17}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2) = -\frac{8}{17}.$$

3) Der Schnittpunkt der Geraden (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) ist ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} 1, & \xi, & \eta \\ 1, & \xi_1, & \eta_1 \\ 1, & \xi_2, & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die Flächencoordinaten des § 17 (mit der unendlich fernen Geraden als E.-Linie) ist die Richtung der Geraden G_i ausgedrückt durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\xi_2 - \xi_3) : (\xi_3 - \xi_1) : (\xi_1 - \xi_2).$$

In den Streifencoordinaten des § 18 speciell die von

$$x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

durch die Verhältnisse $0 = \xi_2 - \xi_3 : -1 : 1$.

4) Man bilde die Gleichungen der sechs Verbindungslinien zwischen den Punkten (a, b, c), $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$ und $(a, b, -c)$ und ebenso die Gleichungen der Schnittpunkte zwischen den vier Geraden von denselben Coordinaten. Man bilde auch die Gleichungen der sechs Verbindungsgeraden und Schnittpunkte der entsprechenden Elemente zweier Sextupel von Elementen, deren Coordinaten durch die Permutationen derselben drei algebraischen Zahlen gegeben werden. (§ 16.) Man sieht dadurch, dass sie sechs Gerade resp. Punkte einer Permutationsgruppe sind.

5) Die Determinanten des Textes in der zweiten Schreibart, bei welcher die Zeilen der ersten als Reihen erscheinen und umgekehrt, erscheinen als Resultate der Elimination der l, m, n respective der λ, μ, ν zwischen

$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0, \quad lx_2 + my_2 + nz_2 = 0,$$
$$lx_3 + my_3 + nz_3 = 0;$$

$$\lambda\xi_1 + \mu\eta_1 + \nu\zeta_1 = 0, \quad \lambda\xi_2 + \mu\eta_2 + \nu\zeta_2 = 0,$$
$$\lambda\xi_3 + \mu\eta_3 + \nu\zeta_3 = 0.$$

Man erhält aus der ersten Gruppe für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der geraden Linie vom Punkt y nach dem Punkt z die Werthe

$$x_i = -\frac{m y_i + n z_i}{l};$$

aus der zweiten für die Coordinaten eines Strahls aus dem Schnittpunkt der Geraden η und ζ die analogen

$$\xi_i = -\frac{\mu \eta_i + \nu \zeta_i}{\lambda}.$$

Für die Substitution in Gleichungen, welche in den x, respective den ξ homogen sind, darf der Factor $-1:l$, $-1:\lambda$ respective unterdrückt werden. Für den Schnittpunkt der Geraden $y_i z_i$ mit der Geraden von den Coordinaten ξ_i erhält man z. B.

$$-\frac{m}{n} = \frac{\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3}{\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3}.$$

6) Wenn drei Punkte x_i, y_i, z_i oder P, Q, R in einer geraden Linie liegen, respective wenn drei Gerade ξ, η, ζ durch einen Punkt gehen, so bilden die mit Constanten f_i multiplicierten Gleichungen derselben die Summe Null. Der ausgesprochene Satz ist nur ein andrer Ausdruck des vorigen. Denn es ist für alle Werthe der ξ_i

$$f_1(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3) + f_2(y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3) + f_3(z_1\xi_1 + z_2\xi_2 + z_3\xi_3) = 0$$

nur dann, wenn gleichzeitig ist

$$f_1 x_1 + f_2 y_1 + f_3 z_1 = 0,$$
$$f_1 x_2 + f_2 y_2 + f_3 z_2 = 0,$$
$$f_1 x_3 + f_2 y_3 + f_3 z_3 = 0;$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man bestätige die Lagenbeziehungen der Elemente der Quadrupel von denselben numerischen Coordinaten zum fundamentalen Tripel (§ 16, oben 4) aus diesen Gesetzen.

7) Die Elimination von l zwischen zweien der Gleichungen der ersten Gruppe in 5) giebt z. B. für die ersten

$$m(x_2 y_1 - x_1 y_2) + n(x_2 z_1 + x_1 z_2) = 0,$$

also

$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

und analoge Werthe aus den übrigen Paaren.

Der gewonnene Ausdruck führt zur geometrischen Interpretation wie folgt. Es ist

$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{z_1}{z_2}\right)}{x_2 y_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{y_1}{y_2}\right)} \quad \text{(Fig. 23}^{a}\text{)}$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (A_3 . A_1 A_2 E P) : (A_3 . A_1 A_2 E R)}{1 - (A_3 . A_1 A_2 E P) : (A_3 . A_1 A_2 E Q)}$$

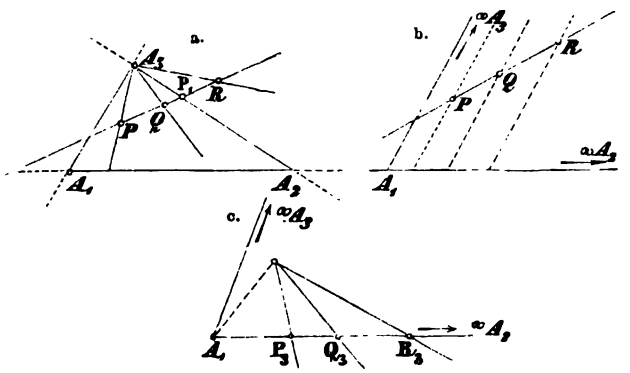
$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (A_3 . A_1 A_2 R P)}{1 - (A_3 . A_1 A_2 Q P)} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{(A_3 . A_1 R A_2 P)}{(A_3 . A_1 Q A_2 P)},$$

d. h.

$$\frac{m}{n} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot (A_3 . A_2 P Q R) = -\frac{z_1}{y_1} \cdot (\mathfrak{P}_1 P Q R) = -\frac{PR}{PQ},$$

weil $\frac{z_1}{y_1} = \frac{\mathfrak{P}_1 R}{\mathfrak{P}_1 Q}$ ist. (Fig. 23^{a}.)

Fig. 23.



Für Cartesische Coordinaten werden die Strahlen von A_3 nach P, Q, R Parallelen zu einer Coordinatenaxe (Fig. 23^{b}) und $A_3 A_2$ die unendlich ferne Gerade, $z_1 = y_1 = 1$, also auch (was die Figur direct zeigt)

$$\frac{m}{n} = -(\infty P Q R) = -\frac{PR}{PQ};$$

$\frac{m}{n}$ ist also immer das negative reciproke Theilverhältniss des Punktes P in der Strecke der gegebenen Punkte Q und R.

8) Aus den beiden ersten Gleichungen der zweiten Gruppe in 5) folgt

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\xi_2\xi_1 - \xi_1\xi_2}{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2} = -\frac{\xi_1}{\eta_1}\cdot\frac{1-\frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\xi_1}{\xi_2}}{1-\frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\eta_1}{\eta_2}}$$

$$= -\frac{\xi_1}{\eta_1}\cdot\frac{1-(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3):(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{R}_3)}{1-(A_2A_1\mathbf{E}_3P_3):(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{Q}_3)}$$

$$= -\frac{\xi_1}{\eta_1}\cdot\frac{(A_2\mathbf{R}_3A_1\mathbf{P}_3)}{(A_2\mathbf{Q}_3A_1\mathbf{P}_3)} = -\frac{\xi_1}{\eta_1}\cdot(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3);$$

und wenn man zu dem Büschel der Geraden p, q, r zurückgeht, indem man den Strahl nach A_1 durch $\mathbf{a}$ bezeichnet,

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\xi_1}{\eta_1}\cdot(\mathbf{a}pqr) = -\frac{\xi_1}{\eta_1}\frac{\sin\mathbf{a}q}{\sin pq}:\frac{\sin\mathbf{a}r}{\sin pr}$$

wegen $\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\sin\mathbf{a}_1q}{\sin\mathbf{a}_1r}$ schliesslich $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\sin pr}{\sin pq}$.

9) Für Plücker'sche Coordinaten beweist man leicht direct

$$\frac{\mu}{\nu} = -(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3); \quad \text{(Fig. 23}^c\text{)}$$

denn man erhält

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\xi_2-\xi}{\xi-\xi_1} = \frac{\eta_2-\eta}{\eta-\eta_1}$$

und wegen

$$\eta = -\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3}, \quad \eta_1 = -\frac{1}{A_1\mathbf{Q}_3}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{A_1\mathbf{R}_1}$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{-\frac{1}{A_1\mathbf{R}_3}+\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3}}{-\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3}+\frac{1}{A_1\mathbf{Q}_3}} = \frac{A_1\mathbf{Q}_3(A_1\mathbf{R}_3+\mathbf{P}_3A_1)}{A_1\mathbf{R}_3(A_1\mathbf{Q}_3+\mathbf{P}_3A_1)}$$

$$= -\frac{A_1\mathbf{Q}_3}{A_1\mathbf{R}_3}:\frac{\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3}{\mathbf{P}_3\mathbf{R}_3} = -(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3).$$

20. Wenn fünf Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, E, von denen keine vier in einer Ebene liegen, oder fünf Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{E}$, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, gegeben sind, so lässt sich jeder weitere Punkt respective jede Ebene des Raumes in Bezug auf diese festen Elemente durch Coordinaten bestimmen, wie folgt. (Fig. 24, p. 104.)

Jeder Punkt P bestimmt mit den geraden Verbindungslinien

Jede Ebene Π bestimmt mit den Schnittlinien von dreien

von dreien der Punkte A_i, die ein Dreieck bilden, drei Ebenen, die nur ihn gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Ebenen durch dieselben Geraden — nämlich nach den übrigen A und nach E — bilden; z. B. also durch die folgenden Doppelverhältnisse der Ebenenbüschel oder der von diesen auf den respectiven Gegenkanten ausgeschnittenen Punktreihen

$$(A_1A_2 \cdot A_3A_4EP) = (A_3A_4E_{34}P_{34}),$$
$$(A_2A_3 \cdot A_1A_4EP) = (A_1A_4E_{14}P_{14}),$$
$$(A_3A_1 \cdot A_2A_4EP) = (A_2A_4E_{24}P_{24})$$

ist der Punkt P bestimmt.

Bezeichnet man durch e_1, e_2, e_3, e_4 die Abstände des Punktes E von den Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ respective und durch p_1, p_2, p_3, p_4 die entsprechenden Abstände des Punktes P, oder allgemeiner sind e_i und p_i die in derselben Richtung gemessenen Längen von E, respective P bis zur Ebene $A_jA_kA_l$, so hat man

$$(A_1A_2 . A_3A_4EP) = \frac{p_3 : e_3}{p_4 : e_4},$$
$$(A_2A_3 . A_1A_4EP) = \frac{p_1 : e_1}{p_4 : e_4},$$
$$(A_3A_1 . A_2A_4EP) = \frac{p_2 : e_2}{p_4 : e_4}$$

und kann setzen

$$p_i : e_i = x_i,$$

der Ebenen $\mathbf{A}_i$, die ein Dreikant bilden, drei Punkte, die nur sie gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Punkten in derselben Geraden — nämlich in den beiden übrigen $\mathbf{A}$ und in $\mathbf{E}$ — bilden; z. B. also durch die folgenden Doppelverhältnisse der Punktreihen oder der von diesen mit den respectiven Gegenkanten bestimmten Ebenenbüschel

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = (A_4A_3\mathbf{E}_{31}\Pi_{34}),$$
$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = (A_4A_1\mathbf{E}_{14}\Pi_{14}),$$
$$(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = (A_4A_2\mathbf{E}_{24}\Pi_{24})$$

ist die Ebene Π bestimmt.

Bezeichnen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 die Abstände der Ebene $\mathbf{E}$ von den Punkten $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ respective und π_1, π_2, π_3, π_4 die entsprechenden Abstände der Ebene Π, oder allgemeiner die ε_i und π_i die in bestimmten Richtungen gemessenen Längen von den Ecken des F.-Tetraeders bis zu den Ebenen $\mathbf{E}$ und Π, so hat man

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 . \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_4 : \varepsilon_4},$$
$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 . \mathbf{A}_1\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_4 : \varepsilon_4},$$
$$(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 . \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_4 : \varepsilon_4}$$

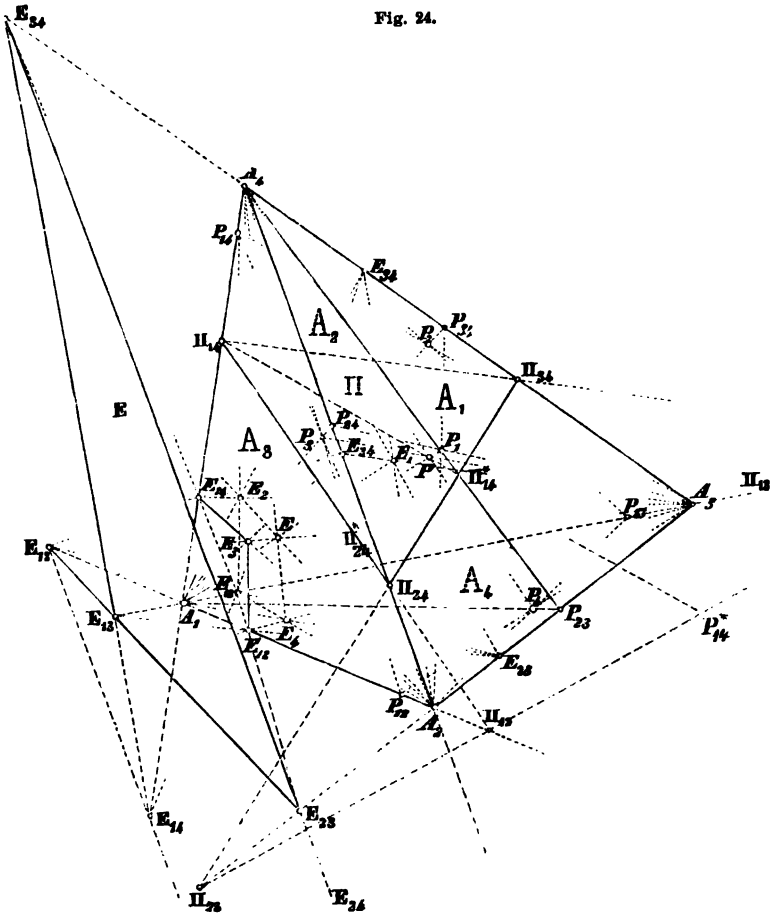
und kann setzen

$$\pi_i : \varepsilon_i = \xi_i,$$

so dass x_1, x_2, x_3, x_4 vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse den Punkt P in Bezug auf die fünf F.-Punkte

so dass ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse die Ebene Π in Bezug auf die fünf F.-Ebenen be-

Fig. 24.



bestimmen und durch dieselben construieren lassen. Sie sind als tetrametrische Coordinaten des Punktes P zu bezeichnen; die vier Maass-

stimmen und durch dieselben zu construieren gestatten. Sie sind als tetrametrische Coordinaten der Ebene Π zu bezeichnen; die vier Maass-

stäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt der Punkt E durch seine Lage gegen die Flächen des F.-Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Wir bezeichnen E als den Einheitpunkt des Systems, denn seine Coordinaten sind gleich Eins.

Liegt P in einer Fläche des F.-Tetraeders, also in $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ respective, so ist je eine der Coordinaten x_4, x_1, x_2, x_3 vom Werthe Null und wenn man die den bleibenden x_i entsprechenden p_i und e_i in Richtungen misst, welche der entsprechenden Tetraederfläche angehören, so kommt man auf die Coordinaten-Bestimmung des ebenen Punktsystems in § 17 zurück.

Der Lage von P in einer Tetraederkante z. B. A_1A_2 entspricht das gleichzeitige Verschwinden von zwei x, nämlich x_3, x_4, und der Punkt wird dann durch das Verhältniss der übrigen, also das von x_1 zu x_2 bestimmt, wie in § 14 für die Punktreihe erörtert ist.

Ist P in einer Ecke des F.-Tetraeders z. B. in A_1 gedacht, so verschwinden drei der x_i, z. B. hier die drei x_2, x_3, x_4, und x_1 ist etwa die Längenzahl der betreffenden Tetraederhöhe in Bezug auf das gleichnamige e als Einheit.

stäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt die Ebene $\mathbf{E}$ durch ihre Lage gegen die Ecken des F.-Tetraeders $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$. Wir nennen $\mathbf{E}$ die Einheitebene des Systems, denn ihre Coordinaten sind gleich Eins.

Geht Π durch eine Ecke des F.-Tetraeders, also durch $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ respective, so ist je eine der Coordinaten ξ_4, ξ_1, ξ_2, ξ_3 Null und wenn man die den bleibenden ξ_i entsprechenden π_i und ε_i in Richtungen misst, die der entsprechenden Gegenfläche des Tetraeders angehören, so kommt man auf die Coordinaten-Bestimmung des ebenen Strahlensystems in § 17 zurück.

Wenn die Ebene Π durch eine Kante des Tetraeders z. B. $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ geht, so entspricht dem das gleichzeitige Verschwinden von ξ_3 und ξ_4 und die Ebene wird durch das Verhältniss von ξ_1 und ξ_2 bestimmt, wie es in § 14 für das Ebenenbüschel sich ergab.

Ist Π mit einer Fläche des F.-Tetraeders identisch z. B. mit $\mathbf{A}_1$, so ist gleichzeitig $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ und ξ_1 kann als Längenzahl der zugehörigen Tetraederhöhe in Bezug auf das gleichnamige ε als Einheit angesehen werden.

Alle Punkte und Ebenen des Raumes sind in Bezug auf ein fundamentales Tetraeder von den Ecken $A_1 A_2 A_3 A_4$ und den Flächen $A_2 A_3 A_4$ oder $\mathbf{A}_1$, $A_3 A_4 A_1$ oder $\mathbf{A}_2$, $A_4 A_1 A_2$ oder $\mathbf{A}_3$ und $A_1 A_2 A_3$ oder $\mathbf{A}_4$, einen E.-Punkt E, der in keiner Fläche liegt, und eine E.-Ebene $\mathbf{E}$, die durch keine Ecke geht, durch vier algebraische Zahlen x_i respective ξ_i mittelst der Verhältnisse derselben bestimmt; z. B. ein Punkt $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — durch die Verhältnisse (Fig. 24) $x_1 : x_4 = (A_1 A_4 E_{14} P_{14})$ der Punkt P_{14} und die durch P gehende Ebene $A_2 A_3 P_{14}$, $x_2 : x_4 = (A_2 A_4 E_{24} P_{24})$ der Punkt P_{24} und die Ebene $A_1 A_3 P_{24}$, durch $x_3 : x_4 = (A_3 A_4 E_{34} P_{34})$ der Punkt P_{34} und die Ebene $A_1 A_3 P_{34}$, welche drei sich nur in P durchschneiden; man erhält P als Schnittpunkt der drei Geraden aus A_1, A_2, A_3 nach den Schnitten P_1, P_2, P_3 der Geraden $A_2 P_{34}$, $A_3 P_{24}$; $A_3 P_{14}$, $A_1 P_{34}$; $A_1 P_{24}$, $A_2 P_{14}$ respective. Dabei sind die Punkte E_{ik} und insbesondere E_{14}, E_{24}, E_{34} aus E in der Geraden $A_4 E_4$, bestimmt mittelst der Geraden $A_1 E_4$, $A_2 E_4$, $A_3 E_4$, welche die Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ respective in E_{23}, E_{31}, E_{12} schneiden und die Geraden $E_{23} E$, $E_{31} E$, $E_{12} E$, die $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ in E_{14}, E_{24}, E_{34} treffen. Analog die Ebene Π durch

$$\xi_1 : \xi_4 = (A_4 A_1 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}), \qquad \xi_2 : \xi_4 = (A_4 A_2 \mathbf{E}_{24} \Pi_{24}),$$
$$\xi_3 : \xi_4 = (A_4 A_3 \mathbf{E}_{34} \Pi_{34})$$

als Verbindungsebene der drei Punkte Π_{14}, Π_{24}, Π_{34}; wobei man $\mathbf{E}$ direct durch die Schnittpunkte $\mathbf{E}_{i4}$ mit den von A_4 ausgehenden Kanten bestimmt annehmen darf.

Man wird bei Construction der P_{i4} die drei bezüglichen Doppelverhältnisse gleichzeitig auf einfache Verhältnisse reducieren, indem man einen willkürlichen Punkt C in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ als Projectionscentrum und die zu $A_1 A_2 A_3$ parallele Ebene durch A_4 als Projectionsebene wählt, d. h. indem man zu den Geraden CA_1, CA_2, CA_3 respective durch A_4 Parallelen zieht und mittelst CE_{14}, CE_{24}, CE_{34} in ihnen die E_{14}', E_{24}', E_{34}' bestimmt; man hat dann, weil die A_i' unendlich fern liegen, $x_i : x_4 = A_4 P_{i4}' : A_4 E_{i4}'$ und erhält bequem die P_{i4}, etc.

Zur Construction des Punktes P aus seinen Coordinaten x_i führt die Benutzung von dreien ihrer Verhältnisse auf sechzehn verschiedene Arten; vier von ihnen entsprechen den Ebenen $A_i A_k P$ aus Kanten einer Fläche des F.-Tetraeders, nämlich nach den Gruppen

$$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}; \quad \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_4}{x_3}; \quad \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_2}; \quad \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}$$

den Flächen 123, 124, 134, 234; die übrigen zwölf entsprechen den Ebenen aus einer nicht geschlossenen Kette von drei Kanten des Tetraeders, wie 1234, 2134, 1243, 1324, 3124, 1342, 1423, 4123, 1432, 2314, 2413, 3412, z. B. der ersten, dritten und letzten die Gruppen

$$\frac{x_3}{x_4}, \frac{x_4}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}; \quad \frac{x_3}{x_4}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_1}; \quad \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_3}{x_4}.$$

Ebenso analog für die Construction der Ebene Π aus ihren Coordinaten ξ_i.

Wählt man insbesondere den Mittelpunkt der dem F.-Tetraeder eingeschriebenen Kugel zum E.-Punkt E, so werden die e_i gleichgross und man kann die x_i den p_i gleich oder direct proportional setzen und sie als Vierebenen-Coordinaten bezeichnen.

Mit V als dem Volumen des F.-Tetraeders und F_1, F_2, F_3, F_4 als den Flächen der Dreiecke $A_2A_3A_4$, etc. gilt für diesen Fall die Relation

$$F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + F_4x_4 = 3V$$

und für zwei Punkte Y, Z von den Coordinaten y_i, z_i also auch

$$F_1(y_1-z_1)+F_2(y_2-z_2)+F_3(y_3-z_3)+F_4(y_4-z_4) = 0,$$

welche die Quadrate der Coordinatendifferenzen wie in § 13 durch Producte derselben auszudrücken gestattet. Man darf also für das Quadrat der Distanz d von Y und Z setzen

$$\begin{aligned} d^2 = {} & \alpha_{12}(y_1-z_1)(y_2-z_2) + \alpha_{23}(y_2-z_2)(y_3-z_3) \\ & + \alpha_{31}(y_3-z_3)(y_1-z_1) + \alpha_{14}(y_1-z_1)(y_4-z_4) \\ & + \alpha_{24}(y_2-z_2)(y_4-z_4) + \alpha_{34}(y_3-z_3)(y_4-z_4) \end{aligned}$$

und bestimmt die α_{ik} aus den Kantenlängen $s_{12} = A_1A_2$, $s_{23} = A_2A_3$ etc. und den Höhen h_1, h_2, h_3, h_4 des F.-Tetraeders; z. B. für YZ in A_1A_2 aus den Coordinaten h_1, 0, 0, 0 und 0, h_2, 0, 0 durch

$$s_{12}^2 = -\alpha_{12}h_1h_2, \quad \alpha_{12} = -\frac{s_{12}^2}{h_1h_2}$$

mit analogen Ausdrücken für die übrigen Coefficienten. Man erhält also die Formel für das Distanzquadrat

$$d^2 = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4}\{s_{12}^2 h_3 h_4 (y_1 - z_1)(y_2 - z_2) + \cdots\},$$

welche vielfacher Umformungen fähig ist.

Ist der E.-Punkt der Schwerpunkt des Tetraeders, so sind die e_i die Viertel der entsprechenden Höhen des Tetraeders und die x_i können als Verhältnisse der Entfernungen des Punktes P von den F.-Ebenen zu den gleichgerichteten Höhen des Tetraeders oder auch als die Verhältnisse der Volumina der Pyramiden $PA_2A_3A_4$, $PA_3A_4A_1$, $PA_4A_1A_2$, $PA_1A_2A_3$ zum Volumen des F.-Tetraeders betrachtet werden; man nennt sie Volumen-Coordinaten.

Ist die Ebene $\mathbf{E}$ unendlich fern, so sind die ε_i gleich gross und man erhält $\xi_i : \xi_k = A_i\Pi_{ik} : A_k\Pi_{ik}$ oder die Coordinaten sind den Abständen von den vier F.-Punkten proportional und sollen Vierpunkt-Coordinaten heissen.

Man bildet von hier aus leicht die Analoga zu den in den Beispielen des § 13 entwickelten Sätzen, und erkennt insbesondere, dass zu einem Punkt E eine Harmonikal-Ebene $\mathbf{E}$ existiert, welche von ihm an allen Ecken, auf allen Flächen und in allen Kanten harmonisch getrennt ist; E und $\mathbf{E}$ sind Collineationscentrum respective Collineationsebene für die beiden Paare perspectivischer Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, $E_1E_2E_3E_4$ und $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$, wenn wir mit E_i den Schnittpunkt der Ebene $\mathbf{A}_i$ mit der Geraden A_iE und mit $\mathbf{E}_i$ die Verbindungsebene des Punktes A_i mit der Geraden $\mathbf{A}_i\mathbf{E}$ bezeichnen. (Vergl. § 15 die Schlussbemerkung.)

Die Coordinaten x_i und ξ_i von demselben F.-Tetraeder, deren E.-Punkt und E.-Ebene so durch das F.-Tetraeder harmonisch getrennt sind, mögen als zusammengehörige Punkt- und Ebenen-Coordinaten bezeichnet werden; wir werden solche weiterhin stets gebrauchen. (§ 22.)

Für E als Schwerpunkt des Tetraeders ist wegen

$$A_iE_{ik} = -A_kE_{ik}$$

das Product 1 der vier Coordinatenverhältnisse $x_1 : x_2$, $x_2 : x_3$, $x_3 : x_4$, $x_4 : x_1$ ausgedrückt durch

$$\frac{A_2P_{12} \cdot A_3P_{23} \cdot A_4P_{34} \cdot A_1P_{14}}{A_1P_{12} \cdot A_2P_{23} \cdot A_3P_{34} \cdot A_4P_{14}} = 1.$$

Die vier Ebenen, welche von den Gegenkanten aus nach sol-

chen vier Theilpunkten der Kanten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 — überhaupt einer geschlossenen Kette — gelegt werden, gehen durch einen Punkt.

Und für $\mathbf{E}$ als die unendlich ferne Ebene liefern die Coordinatenverhältnisse $\xi_1 : \xi_2$, $\xi_2 : \xi_3$, $\xi_3 : \xi_4$, $\xi_4 : \xi_1$ einer Ebene für das Product der Theilverhältnisse der Kanten

$$\frac{A_1\Pi_{12} \cdot A_2\Pi_{23} \cdot A_3\Pi_{34} \cdot A_4\Pi_{14}}{A_2\Pi_{12} \cdot A_3\Pi_{23} \cdot A_4\Pi_{34} \cdot A_1\Pi_{14}} = 1.$$

Für eine Parallelebene zu zwei Kanten sind die bezüglichen Theilverhältnisse gleich Eins und somit das Product der beiden andern auch gleich Eins; z. B. also

$$\frac{A_2\Pi_{23}}{A_3\Pi_{23}} = \frac{A_1\Pi_{14}}{A_4\Pi_{14}},$$

d. h. A_2A_3 und A_1A_4 werden nach demselben Verhältniss durch die zu A_1A_2 und A_3A_4 parallele Ebene getheilt.

1) Wenn zwei Coordinaten eines Punktes P, z. B. x_i und x_k einander gleich sind, so fällt für die Construction desselben P_{ik} mit E_{ik} zusammen und der Punkt liegt in der Ebene $A_hA_jE_{ik}$. Wäre gleichzeitig $x_i = x_k$ und $x_h = x_j$, sodass E_{ik} und P_{ik} und auch E_{kj} und P_{hj} resp. zusammenfallen und der Punkt somit in den Ebenen $A_hA_jE_{ik}$ und $A_iA_kE_{kj}$ zugleich liegt, so befindet sich P in der Transversale von ε zu den Gegenkanten A_iA_k und A_hA_j des F.-Tetraeders. Endlich liegt ein Punkt mit drei gleichen Coordinaten $x_h = x_i = x_j$ mit dem Punkte E in derselben Geraden aus dem vierten F.-Punkte A_k.

2) Wie ändern sich diese Relationen bei Gleichheit der Coordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen? Man vergleiche die Ergebnisse mit den Erörterungen der orthogonalen Parallelprojection mit drei rechtwinkligen Axen über die Halbierungsebenen und Halbierungsaxen (I, § 46, 4).

3) Welche Besonderheiten entspringen für die Construction einer Ebene aus ihren Coordinaten ξ_i, wenn zwischen denselben eine der folgenden Relationen und Relationen-Gruppen stattfindet?

a) $\xi_i = \xi_k$;

b) $\xi_h = \xi_j$ und $\xi_i = \xi_k$;

c) $\xi_h = \xi_i = \xi_j$?

4) Man untersuche die Uebertragung der Beispiele des § 15 über die Transversalentheorie (4, 5) aus der Ebene in den Raum und erläutere ihre Bedeutung.

21. Wir können nun wieder wie in § 16 für die Gebilde zweiter Stufe, ausgehend vom E.-Punkt und der E.-Ebene, Auskunft ertheilen über die mit der Aenderung der Lage des Punktes und der Ebene im Raum eintretenden Aenderungen der Grössen und Vorzeichen der zugehörigen Coordinaten. Denn jenen kommen die positiven Coordinaten Eins zu.

Das Coordinatenverhältniss

$$x_1 : x_2 = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{A_1 E_{12}}{A_2 E_{12}} \cdot \frac{A_2 P_{12}}{A_1 P_{12}}$$

ist für alle Punkte der Ebene $A_3 A_4 E_{12}$ der positiven Einheit gleich und nimmt bis zu Null ab, wenn die Ebene $A_3 A_4 P_{12}$ oder $A_3 A_4 P$ sich von da gegen A_2 hin bewegt, während es bis zum Unendlichen wächst, während diese Ebene nach A_1 hin sich dreht. In den Lagen $A_3 A_4 A_2$ und $A_3 A_4 A_1$ sind x_1 und resp. x_2 gleich Null und beim Durchgang durch dieselben wechseln sie ihr Zeichen. Die im nämlichen Sinn fortgesetzte Drehung aus jener Lage bis zu der vierten harmonischen, den zu E_{12} in Bezug auf $A_1 A_2$ conjugiert harmonischen Punkt $\mathbf{E}_{12}$ enthaltenden Lage liefert nach einander alle negativen ächt gebrochenen, die Drehung aus dieser im entgegengesetzten Sinn bis ebenfalls zu $A_3 A_4 \mathbf{E}_{12}$, dem der Verhältnisswerth -1 zukommt, alle negativen unächt gebrochenen und ganzen Verhältnisse. Die Combination der entsprechenden Urtheile für die drei zur Construction des Punktes P benutzten Ebenen z. B. $A_1 A_2 P_{34}$, $A_2 A_3 P_{14}$, $A_3 A_4 P_{12}$ liefert die Einsicht über die Lage des P zu gegebenen Coordinaten.

Analog giebt das Verhältniss

$$\xi_2 : \xi_4 = (A_1 A_2 \mathbf{E}_{24} \Pi_{24}) = \frac{A_4 \mathbf{E}_{24}}{A_2 \mathbf{E}_{24}} \cdot \frac{A_2 \Pi_{24}}{A_4 \Pi_{24}}$$

die Einsicht, dass vom Werth $+1$ in $\mathbf{E}_{24}$ ausgehend, der Punkt Π_{24} mit bis Null abnehmenden positiven Werthen des Verhältnisses nach A_2 rückt, während er mit bis in's Unendliche wachsenden positiven Werthen von $\mathbf{E}_{24}$ nach A_4 gelangt; etc.

Die F.-Punkte sind die Ecken von acht den ganzen Raum erfüllenden Tetraedern, von denen eines endlich begrenzt ist, während alle andern aus je zwei nur im Unendlichen zusammenhängenden Theilen bestehen; nämlich vier davon je aus Scheitel- und Aussenwinkelecke und die drei letzten aus

den Keilwinkelräumen an den Gegenkanten. Man kann das Innere durch J, die vier ersten unendlich grossen Gebiete als 1, 2, 3, 4 nach den zu ihnen gehörenden Scheitelecken, und die drei letzten als die Gebiete 12, 23, 31 z. B. bezeichnen. Für J sind die endlichen Strecken aller sechs Geraden zwischen den vier Ecken Kanten, für A_1 oder 1 nur die drei endlichen Strecken 23, 34, 42, während von den drei übrigen die unbegrenzten äusseren Strecken, schreiben wir $1 \infty 2$, $1 \infty 3$, $1 \infty 4$ u. s. w., dazu gehören; für 31 ist nur diese endliche Gerade und die gegenüberliegende 24 Kante, die übrigen sind $1 \infty 2$, $1 \infty 4$, $3 \infty 2$, $3 \infty 4$.

Liegt nun E im Raumtheil J, so kommen allen Punkten desselben vier positive Zahlen x_i zu; den Punkten in den unbegrenzten Raumtheilen 1 kommt die Zeichenfolge $- + + +$ (nämlich im Aussenwinkelraum, und im Grunde $+ - - -$ im Scheitelwinkelraum, welche vollständige Umkehr der Zeichen die Construction ja nicht beeinflusst) zu; ebenso in 2 die Folge $+ - + +$, in 3 $+ + - +$ und in 4 $+ + + -$. Endlich in den Raumtheilen 12, 23, 31 resp. die Gruppen $+ + - -$, $- + + -$, $+ - + -$ und die entgegengesetzten.

Für die Ebenencoordinaten ξ_i bemerkt man, dass jede Ebene sieben der besagten Raumtheile durchsetzt und in einen derselben nicht hineingeht; und dass alle Ebenen, die in den nämlichen Raumtheil nicht hineingehen, die gleichen Zeichenfolgen ihrer Coordinaten haben. Geht also die Einheitebene nicht in das Gebiet J hinein, so haben alle die Ebenen lauter positive Coordinaten, die diess gleichfalls nicht thun. Schneidet dann die Ebene ξ_i eine Ecke (oder wenn man will drei Ecken) ab, so wechseln die drei zugehörigen Coordinaten oder statt dessen die vierte nicht zugehörige das Zeichen; und schneidet die Ebene zwei Ecken des F.-Tetraeders ab, d. h. liegen zwei der Punkte A_i auf ihrer einen und zwei auf ihrer andern Seite, so wechseln die Zeichen der zugehörigen zwei Coordinaten.

Zu einer bestimmten nach ihrer absoluten Grösse und Ordnung gegebenen Gruppe von vier Zahlen als Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 resp. ξ_1, ... eines Elementes gehören somit, den Zeichenänderungen entsprechend, acht Punkte und resp. Ebenen; und es ist leicht, die besonderen Kennzeichen der Gruppe zu erkennen, die sie bilden. Sie können nach dem

Vorigen als P^J oder kurz P im Innern, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$ in den Gebieten 1, 2, ... und $P^{(12)}$, $P^{(23)}$, $P^{(31)}$ in den Gebieten 12, oder was dasselbe ist 34, 23 oder 14, 31 oder 24, ... unterschieden werden; analog für die Ebenen, die zu einer solchen Zahlengruppe der ξ_i gehören. Nach der Zeichentafel ihrer Coordinaten hat das Verhältniss der beiden ersten

$$x_1 : x_2 = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = (A_3 A_4 \,.\, A_1 A_2 E P)$$

dasselbe Zeichen für die Elemente J, 3, 4, 12 und wieder für 1, 2, 23, 31; d. h. die je vier zugehörigen Punkte liegen mit der Kante $A_3 A_4$ des F.-Tetraeders in derselben Ebene. Und wegen

$$\xi_1 : \xi_2 = (A_2 A_1 \mathfrak{E}_{12} \Pi_{12}) = (\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 \,.\, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E} \Pi)$$

gehen die je vier zugehörigen Ebenen durch denselben Punkt der Kante $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4$ oder $A_1 A_2$ des F.-Tetraeders. Ebenso liegen aus dem Verhältniss der ersten zur dritten Coordinate die Punkte J, 2, 4, 31 und 1, 3, 12, 23 in zwei Ebenen aus der Kante $A_2 A_4$ und die gleichnamigen Ebenen gehen durch zwei Punkte der Kante $A_1 A_3$. Und nach dem Verhältniss der zweiten zur dritten Coordinate liegen die Gruppen der Punkte J, 1, 4, 23 und wieder 2, 3, 12, 13 in zwei Ebenen aus $A_1 A_4$ und die Gruppen der gleichnamigen Ebenen gehen durch zwei Punkte der Kante $A_2 A_3$. Es folgt daraus, dass die acht Punkte in vier Paaren auf Geraden aus A_4 liegen, nämlich J und 4; 2, 13; 3, 12; 1, 23; Geraden, welche ein Vierkant bilden, das das Dreiflach der F.-Ebenen aus A_4 zum Diagonal-Dreiflach hat. Ebenso, dass die acht Ebenen der Gruppe aus den ξ_i in vier Paaren durch vier Gerade auf $\mathfrak{A}_4$ gehen, nämlich in den gleichbezeichneten J, 4 etc.; Geraden, welche ein Vierseit bilden, das das Dreieck der F.-Punkte in $\mathfrak{A}_4$ zum Diagonal-Dreieck hat.

Das Analoge liefert die Betrachtung der Verhältnisse jeder der andern Gruppen von drei Coordinaten; z. B. die Gruppe x_2, x_3, x_4 oder (1) liefert die Gruppierung der acht Punkte und Ebenen in vier Paare in und aus Geraden durch A_1 resp. auf $\mathfrak{A}_1$, nämlich in die Paare J, 1; 2, 34; 3, 24; 4, 23. Die Gruppe (2) oder x_1, x_3, x_4 theilt sie ebenso nach den Paaren auf Geraden aus A_2 und durch Gerade auf $\mathfrak{A}_2$ J, 2; 3, 14; 4, 13; 1, 34; und die Gruppe (3) oder x_1, x_2, x_4 nach den Paaren J, 3; 4, 12; 1, 24; 2, 14. Man

kann sagen, die acht Punkte der Gruppe bilden ein Achteck, welches die F.-Punkte zu Diagonalpunkten hat und die acht Ebenen ein Achtflach, welches die F.-Ebenen zu Diagonalebenen hat; vorausgesetzt, dass man die Bezeichnung Diagonal-Punkt resp. -Ebene im Sinn der vorhergehenden Entwickelung versteht.

Die darin und in der Beantwortung der analogen Frage des § 16 sich aussprechenden Beziehungen zur harmonischen Theilung finden auch in dem einfachsten Fall noch statt, wo es sich um die beiden durch dieselben zwei numerischen Werthe bestimmten Elemente eines Elementargebildes erster Stufe handelt; dieselben bilden mit den beiden F.-Elementen desselben eine harmonische Gruppe.

Eine solche Gruppe von Punkten bilden die Mittelpunkte der acht Kugeln, welche die vier Ebenen des F.-Tetraeders zugleich berühren. (Vergl. I, § 58, 8, 9, 10 für die vollständige Behandlung ihrer Construction.)

Vier algebraische Zahlen a, b, c, d liefern durch ihre Permutationen die Coordinatengruppen von vierundzwanzig Punkten resp. Ebenen, nämlich $(abcd)$, $(abdc)$, $(acbd)$, $(acdb)$, $(adbc)$, $(adcb)$; $(bacd)$, $(badc)$, $(bcad)$, $(bcda)$, $(bdac)$, $(bdca)$; etc. Man erhält für die beiden ersten Punkte beispielsweise aus den Coordinatendefinitionen zur Construction die folgenden Relationen:

$$a : d = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}^{(1)}) = (A_1 A_3 E_{13} P_{13}^{(2)});$$
$$b : d = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}^{(1)}) = (A_2 A_3 E_{23} P_{23}^{(2)});$$
$$c : d = (A_3 A_4 E_{34} P_{34}^{(1)}) = (A_4 A_3 E_{34} P_{34}^{(2)});$$
$$a : b = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}^{(1)}) = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}^{(2)});$$
$$a : c = (A_1 A_3 E_{13} P_{13}^{(1)}) = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}^{(2)});$$
$$b : c = (A_2 A_3 E_{23} P_{23}^{(1)}) = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}^{(2)}).$$

Sie sagen aus, dass $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ in einerlei Ebene durch die Kante $A_3 A_4$ liegen, dass $P_{13}^{(1)}$, $P_{14}^{(1)}$, $P_{23}^{(1)}$, $P_{24}^{(1)}$ den Punkten $P_{14}^{(2)}$, $P_{13}^{(2)}$, $P_{24}^{(2)}$, $P_{23}^{(2)}$ resp. entsprechen in perspectivischen Reihen, deren Centrum der Schnitt der Geraden $E_{13} E_{14}$ und $E_{23} E_{24}$ mit $A_3 A_4$ oder der vierte harmonische Punkt E_{34} zu E_{34} in Bezug auf die F.-Punkte A_3, A_4 ist; dass $P_{34}^{(1)}$ und $P_{34}^{(2)}$ ein Paar in derjenigen Involution bilden, die den Punkt E_{34} zum einen Doppelpunkt und A_3, A_4 zu einem Paar hat.

(Vergl. § 16. Dasselbe findet auch für die zwei Elemente aus der Permutation der Coordinaten im Gebilde erster Stufe statt.) Damit wird $P^{(2)}$ aus $P^{(1)}$ bestimmt, und es ist ersichtlich, dass für die Herleitung aller übrigen Elemente der Gruppe aus dem ersten oder aus irgend einem derselben wesentlich gleiche Constructionen gefunden werden.

Und für die Ebenen $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ aus $(abcd)$ und $(abdc)$ folgt ebenso, dass sie sich in einem Punkt von A_1A_2 schneiden, dass $\Pi_{34}{}^{(1)}$ und $\Pi_{34}{}^{(2)}$ ein Paar in der Involution bilden, die den Doppelpunkt $\mathbf{E}_{34}$ und das Paar A_3, A_4 enthält, sowie dass die Punkte $\Pi_{14}{}^{(1)}$ und $\Pi_{13}{}^{(2)}$, $\Pi_{24}{}^{(1)}$ und $\Pi_{23}{}^{(2)}$, $\Pi_{23}{}^{(1)}$ und $\Pi_{24}{}^{(2)}$, $\Pi_{13}{}^{(1)}$ und $\Pi_{14}{}^{(2)}$ einander perspectivisch aus dem Centrum $\mathbf{E}_{34}$ entsprechen.

1) Der E.-Punkt E (1111) und die E.-Ebene $\mathbf{E}$ liefern die Achtergruppen mit (-1111), $(1-111)$, $(11-11)$, $(111-1)$, $(11-1-1)$, $(-111-1)$, $(1-11-1)$. Man zeige die Verbindung beider Gruppen und aller analogen.

Bestimmt man die Punkte der Gruppe durch die Ebenen aus den Kanten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, so dienen der Reihe nach zur Bestimmung die Tripel von Punkten der Gegenkanten A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 resp. (zuerst für E) $E_{14}E_{24}E_{34}$; $\mathbf{E}_{14}E_{24}E_{34}$; $E_{14}\mathbf{E}_{24}E_{34}$; $E_{14}E_{24}\mathbf{E}_{34}$; $\mathbf{E}_{14}\mathbf{E}_{24}E_{34}$; $\mathbf{E}_{14}E_{24}\mathbf{E}_{34}$; $E_{14}\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{34}$; $\mathbf{E}_{14}\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{34}$. Welche andere drei Punkte E_{ik}, $\mathbf{E}_{lm}$ liefern jeweilen Ebenen durch dieselben Punkte?

Die Bestimmungspunkte der Ebenen der Gruppen in denselben Kanten A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 sind $\mathbf{E}_{14}\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{34}$; $E_{14}\mathbf{E}_{24}\mathbf{E}_{34}$; $\mathbf{E}_{14}E_{24}\mathbf{E}_{34}$; etc. Man gebe wieder die Punktetripel der andern Kanten an, die zu denselben Ebenen gehören und bemerke die Unterscheidung der Ebenen nach der Zahl der in ihnen liegenden E_{ik} und resp. $\mathbf{E}_{lm}$ in drei Gruppen von 1, 4, 3 Ebenen mit resp. 6, 3 und 2 Punkten $\mathbf{E}_{ik}$.

Für den Uebergang zum allgemeinen Fall hat man nur zu bemerken, dass aus $x_i : x_k = (A_iA_kE_{ik}P_{ik}{}^{(1)}) = -(A_iA_kE_{ik}P_{ik}{}^{(2)})$ folgt $(A_iA_kP_{ik}{}^{(1)}P_{ik}{}^{(2)}) = -1$.

2) Man untersuche die Gruppe der Verbindungsebenen der entsprechenden Tripel von Punkten aus drei Achtergruppen von den numerischen Coordinaten $(a_1b_1c_1d_1)$, $(a_2b_2c_2d_2)$, $(a_3b_3c_3d_3)$ und dual entsprechend.

3) Wie bewegen sich die sieben andern Punkte einer Achtergruppe, wenn einer von ihnen in einer festen Ebene resp. einer festen Geraden rückt? Und dual entsprechend.

4) Man untersuche die Gruppe der Verbindungsebenen der entsprechenden Punktetripel aus drei Vierundzwanziger-Gruppen

mit Coordinaten aus den Permutationen je derselben vier algebraischen Zahlen; und dual entsprechend.

5) Man erörtere die Lagenverhältnisse eines Punktes und einer Ebene, welche dieselben algebraischen Zahlen zu ihren Coordinaten haben. Aus $(A_i A_k E_{ik} P_{ik}) = (A_k A_i \mathbf{E}_{ik} \Pi_{ik})$ folgt, dass $A_i A_k$, $E_{ik}\mathbf{E}_{ik}$, $P_{ik}\Pi_{ik}$ drei Paare der nämlichen Involution sind.

6) Welche Beziehungen der Lage besitzen zwei Punkte resp. Ebenen, deren Coordinaten reciprok zu einander oder Vielfache der Reciproken sind?

Sei für P^* und P als solche Punkte

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* : x_4^* = x_2 x_3 x_4 : x_3 x_4 x_1 : x_4 x_1 x_2 : x_1 x_2 x_3 ,$$

so folgt für jedes zur Construction dienende Verhältniss analog wie

$$x_2^* : x_1^* = x_1 : x_2$$

wie in § 16, 2

$$(A_2 A_1 E_{12} P_{12}^*) = (A_1 A_2 E_{12} P_{12})$$

und somit dieselbe Construction von P_{12}^* aus P_{12} wie a. a. O. etc.

Da man nach § 15, 1 für E als Mittelpunkt der dem F.-Tetraeder eingeschriebenen Kugel auch hat

$$x_j : x_k = (A_j A_k E_{jk} P_{jk}) = (A_k A_i \,.\, A_j A_k E_{jk} P_{jk})$$

mit $$\sin A_j (A_k A_i)\, E_{jk} : \sin A_k (A_k A_i)\, E_{jk} = -1 ,$$

weil der Winkel der Tangentialebenen der Kugel aus einer Geraden durch die Ebene nach ihrem Mittelpunkt halbiert wird, so folgt

$$x_j : x_k = -\sin A_k (A_k A_j)\, P_{jk} : \sin A_j (A_k A_i)\, P_{ik};$$

und damit für P und P^* die Abhängigkeit der Lage, dass die aus einer Tetraederkante nach ihnen gehenden Ebenen symmetrisch sind zu der Ebene, die aus derselben Kante nach dem Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel geht — sagen wir zur Centralebene. Und darin liegt der Satz, dass die zu den zugehörigen Centralebenen symmetrischen zu den Verbindungsebenen der Tetraederkanten mit einem Punkt P immer wieder durch einen Punkt P^* gehen.

7) Wäre dagegen mit Permutation rechts in der Relation von 6) z. B.

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* : x_4^* = x_1 x_2 x_4 : x_1 x_2 x_3 : x_2 x_3 x_4 : x_1 x_3 x_4 ,$$

sodass

$$x_2^* : x_1^* = x_3 : x_4 , \quad \text{d. h. } (A_2 A_1 E_{12} P_{12}^*) = (A_3 A_4 E_{34} P_{34})$$

ist, so projiciere man die zweite Reihe aus einem Punkt von $A_4 A_1$ auf $A_1 A_3$ in $(A_3 A_1 E_{34}' P_{34}')$ und hat nun zwei perspectivische Reihen in der Ebene $A_1 A_2 A_3$, sodass man P_{34}' und damit P_{12}^* erhält.

Hätte man endlich

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* : x_4^* = k_3 x_1 x_2 x_4 : k_4 x_1 x_2 x_3 : k_1 x_2 x_3 x_4 : k_2 x_1 x_3 x_4,$$

und somit $$x_2^* : x_1^* = k_4 x_3 : k_3 x_4$$

oder für K als den durch die Zahlen k_i bestimmten Punkt

$$(A_2 A_1 E_{12} P_{12}^*) = (A_4 A_3 E_{34} K_{34}) \cdot (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = (A_3 A_4 K_{34} P_{34}).$$

Man gelangt also durch eine ganz analoge Construction, wie vorher, zum Ziel, bei der nur der Punkt K den Punkt E vertritt.

8) Für K in E entsprechen die Punkte von den numerischen Coordinaten (1 1 1 1) sich selbst und bei directer Reciprocität der Coordinaten auch die Verbindungsgeraden derselben zu zweien und ihre Verbindungsebenen zu dreien.

9) Bei directer Reciprocität werden für $x_1 = 0$ die x_2^*, x_3^*, x_4^* zwar gleich Null, aber sie behalten bestimmte Verhältnisse, (§ 16, 3)

$$x_2^* : x_3^* : x_4^* = x_3 x_4 : x_4 x_2 : x_2 x_3;$$

d. h. einem Punkt in der Ebene $A_2 A_3 A_4$ entspricht ein Richtungselement aus dem Punkt A_1, und zwar wird dasselbe nach den reciproken Coordinaten in der Ebene bestimmt (wie in § 16, 2 f. nach den reciproken Coordinaten in der Punktreihe). Und alles dual entsprechend.

22. Wieder wird aber die Ebene einerseits als Element des Raumes, anderseits als Elementar-Gebilde zweiter Stufe, nämlich als Träger von zweifach unendlich vielen Punkten betrachtet; und der Punkt ebenso nicht nur als Raumelement, sondern ebenso als Scheitel eines Bündels, als Träger von zweifach unendlich vielen Ebenen. Wenn im ersten Sinn vier Coordinaten x_i resp. ξ_i zur Bestimmung dienen, so müssen den beiden andern Auffassungen je eine algebraische Relation entsprechen, denen die x_i der Punkte der Ebene und resp. die ξ_i der Ebenen des Bündels zu genügen haben, weil die Festsetzung von zweien ihrer Coordinatenverhältnisse den Punkt in der Ebene und resp. die Ebene im Bündel und somit das dritte erforderliche Coordinatenverhältniss jeweilen bestimmt. Man nennt diese Relationen die Gleichungen resp. der Ebene und des Punktes und sie ergeben sich als Bedingung des Ineinanderliegens oder der Incidenz der Elemente x_i und ξ_i. Zu ihrer Entdeckung denken wir die Tetraeder der A_i und der $\mathbf{A}_i$ in der Art identisch, dass die Ecke A_i die Ebene $\mathbf{A}_i$ zur Gegenfläche hat und setzen

zunächst den E.-Punkt E und die E.-Ebene $\mathbf{E}$ als beliebig gewählt voraus.

Seien (Fig. 24) wie vorher schon die Schnittpunkte der Strahlen von A_1, A_2, A_3, A_4 nach P resp. E mit den bezüglichen Gegenflächen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ durch P_1, P_2, P_3, P_4; E_1, E_2, E_3, E_4 bezeichnet; ebenso die Schnittpunkte der Ebenen durch die Kanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 nach P und E resp. mit den Gegenkanten A_3A_4, A_2A_4, ... durch P_{34}, P_{24}, P_{23}, P_{14}, P_{13}, P_{12}; E_{34}, E_{24}, ... und endlich die Schnittpunkte der Ebenen Π und $\mathbf{E}$ mit den Kanten des Tetraeders in derselben Ordnung durch Π_{34}, Π_{24}, ...; $\mathbf{E}_{34}$, $\mathbf{E}_{24}$, ... oder ihre Schnittlinien mit den Flächen des Tetraeders durch Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; etc., so hat man als Ausdruck der gemachten Voraussetzungen zur Definition der Coordinaten von P

$$\frac{x_1}{x_4} = (A_2A_3 \cdot A_1A_4EP) = (A_1A_4E_{14}P_{14}); \quad \frac{x_2}{x_4} = (A_2A_4E_{24}P_{21}),$$

$$\frac{x_3}{x_4} = (A_3A_4E_{34}P_{34});$$

sodann ebenso zur Definition der Coordinaten von Π

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi) = (A_4A_1\mathbf{E}_{14}\Pi_{14}), \quad \frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_4A_2\mathbf{E}_{24}\Pi_{24}),$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_4A_3\mathbf{E}_{34}\Pi_{34});$$

endlich setzen wir zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von E und $\mathbf{E}$ durch das Tetraeder nach § 15, 5

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = (A_1A_4\mathbf{E}_{14}E_{14}), \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_4} = (A_2A_4\mathbf{E}_{24}E_{24}),$$

$$-\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = (A_3A_4\mathbf{E}_{34}E_{34}).$$

Durch Multiplication der entsprechenden Gleichungen der beiden letzten Gruppen folgt daraus

$$-\frac{\lambda_1\xi_1}{\lambda_4\xi_4} = (A_4A_1E_{14}\Pi_{14}), \quad -\frac{\lambda_2\xi_2}{\lambda_4\xi_4} = (A_4A_2E_{24}\Pi_{24}),$$

$$-\frac{\lambda_3\xi_3}{\lambda_4\xi_4} = (A_4A_3E_{34}\Pi_{34})$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen mit den entsprechenden der Gruppe der Definitionen der $x_i : x_k$

$$-\frac{\lambda_1 \xi_1 x_1}{\lambda_4 \xi_4 x_4} = (A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}), \quad -\frac{\lambda_2 \xi_2 x_2}{\lambda_4 \xi_4 x_4} = (A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}), \text{ etc.}$$

d. h. diese Producte der Verhältnisse der ξ und x sind die negativen Doppelverhältnisse der A, Π und P auf drei Tetraederkanten, die von der dem gemeinsamen Nenner entsprechenden Ecke ausgehen.

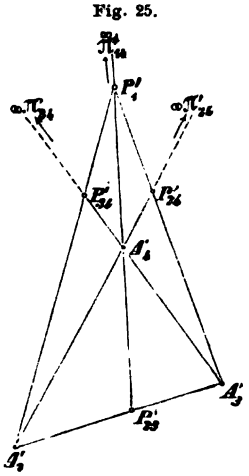
Liegt dann insbesondere der Punkt P in der Ebene Π, so ist die Summe dieser drei Werthe gleich Eins; denn dann ist jede der besagten drei Reihen von P aus auf die Ebene der beiden andern projicierbar, z. B. die erste Reihe $A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}$ in der Fig. 24 auf die Ebene $A_2 A_3 A_4$ der beiden letzten in $P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}$, wenn $\Pi_{14}{}^*$ den Schnitt von $A_4 P_1$ mit Π_1 oder $\Pi_{24} \Pi_{34} \Pi_{23}$ bezeichnet.

Für drei gerade Punktreihen in einer Ebene, wie

$$A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}, \quad A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}, \quad P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23},$$

— welche nach Punkten A_2, A_3, P_1 von einem entsprechend gemeinsamen Punkt A_4 ausgehen, und in denen drei weitere entsprechende Punkte Π_{24}, Π_{34}, $\Pi_{14}{}^*$ auf einer Geraden Π_1 liegen, während die drei letzten die Schnittpunkte der Geraden von P_1 nach den Punkten A_3, A_2, A_4 mit den Gegenseiten des Dreiecks derselben sind, — gilt aber das Gesetz, dass die Summe ihrer Doppelverhältnisse die Einheit ist; oder

Fig. 25.



$$(A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}) + (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}) + (P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}) = 1.$$

Um diese Relation zu beweisen, denken wir die Figur der drei Reihen central auf eine Ebene projiciert (Fig. 25), welche zur projicierenden Ebene der Geraden Π_1 oder $\Pi_{24} \Pi_{14}{}^* \Pi_{34}$ parallel ist, sodass das Bild Π_1' dieser Geraden unendlich fern ist; wenn wir dann die Bilder der Punkte durch dieselben Zeichen mit Beifügung eines Striches bezeichnen, so wird die vorige Summe, die linke Seite der zu beweisenden Gleichung,

$$(A_2' A_4' \infty P_{24}') + (A_3' A_4' \infty P_{34}') + (P_1' A_4' \infty P_{23}')$$

oder $(A_4', A_2', A_3'P_1') + (A_4', A_3', P_1'A_2') + (A_4', P_1', A_2'A_3')$,

wenn die letzten Symbole die Verhältnisse bezeichnen, nach welchen die Geraden $A_3'P_1'$, $P_1'A_2'$, $A_2'A_3'$ die zwischen den Punkten A_4', A_2'; A_4', A_3'; A_4', P_1' resp. gelegenen Strecken theilen. Diese Verhältnisse können aber als die Verhältnisse der Flächen von Dreiecken über der theilenden Geraden und aus den Enden der zu theilenden Strecke angesehen werden und zwar unter steter Berücksichtigung des Sinnes wie folgt:

$$\frac{\triangle A_4'A_3'P_1'}{\triangle A_2'A_3'P_1'} + \frac{\triangle A_4'P_1'A_2'}{\triangle A_3'P_1'A_2'} + \frac{\triangle A_4'A_2'A_3'}{\triangle P_1'A_2'A_3'}$$

oder

$$\frac{\triangle A_4'A_3'P_1' + \triangle A_4'P_1'A_2' + \triangle A_4'A_2'A_3'}{\triangle A_2'A_3'P_1'},$$

d. h.

$$\frac{\triangle A_2'A_3'P_1'}{\triangle A_2'A_3'P_1'} = 1.$$

Wir haben bei der vorigen Entwickelung gezeigt, wie die anschauliche Ableitung im Gebiet von zwei Dimensionen für das Gebiet von drei Dimensionen sachgemäss zu erweitern ist, und damit wenigstens die Aussicht auf die entsprechende Erweiterung für das vierdimensionale Gebiet u. s. w. eröffnet. Wir wollen eine zweite Ableitung geben, welche das Hauptresultat für das Gebiet von zwei Dimensionen in dem von dreien verwerthet und die so ebenfalls den Weg zur weiteren Ausdehnung auf mehrdimensionale Gebiete öffnet.

Wir wenden das Ergebniss des § 17 von der Ergänzung der Doppelverhältnisse zur Einheit im Fall der Incidenz auf die beiden Dreiecke $A_1A_4P_{23}$ und $A_2A_3A_4$ der Fig. 24, p. 104 an, resp. in denen die Ebene Π die Geraden $\Pi_{14}P\Pi_{14}^*$ und $\Pi_{24}\Pi_{14}^*\Pi_{34}$ ausschneidet. Im ersteren ist nach § 15, weil P in $\Pi_{14}\Pi_{14}^*$ liegt, unmittelbar

$$(A_1A_4\Pi_{14}P_{14}) + (A_4P_{23}P_1\Pi_{14}^*) = 1;$$

im zweiten erhält man durch die Geraden $A_2\Pi_{14}^*$ und $A_3\Pi_{14}^*$ in den Gegenseiten A_3A_4, A_2A_4 resp. die Schnittpunkte Π_{34}^*, Π_{24}^* und damit wieder nach § 15

$$(A_2A_4\Pi_{24}\Pi_{24}^*) + (A_3A_4\Pi_{34}\Pi_{34}^*) = 1.$$

Man hat aber offenbar auch

$$(A_4A_2P_{24}\Pi_{24}^*) = (A_4A_3P_{34}\Pi_{34}^*) = (A_4P_{23}P_1\Pi_{14}^*)$$

und erhält somit durch Multiplication der drei Glieder der vorigen Gleichung mit diesen gleichen Factoren

$$(A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}) + (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}) = (A_4 P_{23} P_1 \Pi_{14}^*),$$

und somit durch Einsetzen in die dem Dreieck $A_1 A_4 P_{23}$ entnommene Gleichung

$$(A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}) + (A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}) + (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}) = 1,$$

oder wie oben

$$-\frac{\lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3}{\lambda_4 \xi_4 x_4} = 1.$$

Wir fügen endlich einen dritten Beweis bei, in welchem wir nur von den Sätzen über die projectivischen oder die Art nicht ändernden Umformungen der Würfe und von ebenfalls völlig allgemeinen Verbindungen von solchen mit einander Gebrauch machen und der somit die Ausdehnung auf imaginäre Elemente des Raumes berechtigt macht.

Die Reihen $(A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14})$, $(A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24})$ und $(A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34})$ werden aus den Gegenkanten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ resp. (also durch die zugehörigen Ebenenbüschel) auf die Ebene Π projiciert, sodass für s_i als die Spur von Π in $\mathbf{A}_i$, also in Fig. 24 s_1, s_2, s_3, s_4 resp. als die Geraden $\Pi_{23}\Pi_{24}\Pi_{34}$, $\Pi_{13}\Pi_{14}\Pi_{34}$, $\Pi_{12}\Pi_{14}\Pi_{24}$, $\Pi_{12}\Pi_{13}\Pi_{23}$, aus ihnen die Strahlbüschel

$(\Pi_{23} \cdot s_4 s_1 \Pi_{14} P)$, $(\Pi_{13} \cdot s_4 s_2 \Pi_{24} P)$, $(\Pi_{12} \cdot s_4 s_3 \Pi_{34} P)$

hervorgehen. Ziehen wir nun die Gerade $\Pi_{14} P$ und bezeichnen wir ihre Schnittpunkte mit s_1, s_4, $\Pi_{13}\Pi_{24}$, $\Pi_{12}\Pi_{34}$ resp. mit Π_{14}^*, P_{14}^*, Π_{24}^*, Π_{34}^*, so gehen die vorigen Büschel in die gleichwerthigen Reihen

$$(P_{14}^* \Pi_{14}^* \Pi_{14} P), \quad (P_{14}^* \Pi_{14} \Pi_{24}^* P), \quad (P_{14}^* \Pi_{14} \Pi_{34}^* P)$$

über. Nun entnimmt man aus der Anschauung des Vierecks $\Pi_{12}\Pi_{24}\Pi_{34}\Pi_{13}$, dass $\Pi_{14}^* P_{14}^*$, $\Pi_{24}^* \Pi_{34}^*$ zwei Paare einer Involution sind, die in Π_{14} einen Doppelpunkt hat. Es gilt daher die Relation

$$(P_{14}^* \Pi_{14} \Pi_{14}^* P) = (P_{14}^* \Pi_{14} \Pi_{24}^* P) + (P_{14}^* \Pi_{14} \Pi_{34}^* P);$$

denn durch eine Projection der Reihe, für die das Bild von Π_{14} in's Unendliche rückt, wird diese durch Multiplication mit $P_{14}^* P$ zu $\quad P_{14}^* \Pi_{14}^* = P_{14}^* \Pi_{24}^* + P_{14}^* \Pi_{34}^*$

und sagt nichts anderes aus, als dass die Paare $\Pi_{14}^* P_{14}^*$,

$\Pi_{24}{}^*\Pi_{34}{}^*$ einen gemeinsamen Mittelpunkt haben oder dass sie eine symmetrische Involution bilden, wie es für die unendlich ferne Lage des einen Doppelpunktes sein muss. (Bd. I, § 20, 3. § 22^b, § 31, 17.)

Bemerken wir aber, dass in dem besonderen Fall, wo P in $\Pi_{14}{}^*$ fällt, also $(P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{14}{}^*P) = 1$ wird, aus dem vorigen Additionssatz folgt

$$1 = (P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{24}{}^*\Pi_{14}{}^*) + (P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{34}{}^*\Pi_{14}{}^*),$$

also auch wegen der Involution von $\Pi_{14}{}^*P_{14}{}^*$, $\Pi_{24}{}^*\Pi_{34}{}^*$ mit Π_{14} als Doppelelement

$$1 = (\Pi_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{34}{}^*P_{14}{}^*) + (P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{34}{}^*\Pi_{14}{}^*),$$

der in § 17 und hier gebrauchte Satz; somit auch

$$(P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{14}{}^*P) = 1' - (P_{14}{}^*\Pi_{14}{}^*\Pi_{14}P)$$

ist, so folgt

$$(P_{14}{}^*\Pi_{14}{}^*\Pi_{14}P) + (P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{24}{}^*P) + (P_{14}{}^*\Pi_{14}\Pi_{34}{}^*P) = 1;$$

wie zu beweisen war.

Bezeichnet man nun zum Zweck der Ausdehnung auf imaginäre Elemente die $(A_1A_4\Pi_{14}P_{14})$, etc. als Würfe, so kann man die Summe von zwei Würfen (ABC_1D) und (ABC_2D) durch einen Wurf $(ABCD)$ definieren, wenn C_1, C_2 und A, C Paare einer Involution sind, die das eine Doppelelement B hat und dieser Definition allgemeine von der Realität der Elemente unabhängige Gültigkeit beilegen; dann hat der vorige Beweis die entsprechende allgemeine Gültigkeit.

Wir wollen bemerken, dass ebenso das Product zweier Würfe durch

$$(ABC_1D) \,.\, (ABC_2D) = (ABCD)$$

und AB, C_1C_2, CD als drei Paare einer Involution definiert wird — weil man aus

$$\left(\frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AD}{BD}\right) \cdot \left(\frac{AC_2}{BC_2} : \frac{AD}{BD}\right) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

zieht

$$\frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AC_2}{BC_2}$$

oder

$$(ABC_1D) = (ABCC_2) = (BAC_2C),$$

was eben aussagt, dass AB, C_1C_2, CD eine Involution bilden.

Sobald also die Ebene Π den Punkt P enthält, und nur wenn diess der Fall ist, besteht zwischen den Coordinaten ξ_i von Π und den Coordinaten x_i von P nach den für ihre Bestimmung gemachten Voraussetzungen die Relation

$$\frac{\lambda_1\xi_1x_1 + \lambda_2\xi_2x_2 + \lambda_3\xi_3x_3}{\lambda_4\xi_4x_4} = 1,$$

d. h. auch

$$\lambda_1\xi_1x_1 + \lambda_2\xi_2x_2 + \lambda_3\xi_3x_3 + \lambda_4\xi_4x_4 = 0.$$

Setzen wir $\lambda_i = 1$, d. h. im Sinn des § 20 den E.-Punkt E von der E.-Ebene $\mathbf{E}$ als durch das Tetraeder harmonisch getrennt, so erhält die für das Ineinanderliegen von P und Π charakteristische Relation die einfachere Form

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 + \xi_4x_4 = 0.$$

In dieser wollen wir sie gebrauchen.

Sind die ξ_i constante Grössen a_i, so gilt für die Coordinaten x_i aller Punkte der durch sie bestimmten Ebene die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0;$$

wir nennen sie die Gleichung der Ebene (a_1, a_2, a_3, a_4) und ihre Coefficienten sind die projectivischen Coordinaten dieser Ebene.

Sind die x_i constante Grössen α_i, so gilt für die Coordinaten ξ_i aller Ebenen, welche den durch sie bestimmten Punkt enthalten, die Relation

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 = 0,$$

die man als die Gleichung des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ in projectivischen Ebenencoordinaten zu bezeichnen hat; seine Coordinaten sind ihre Coefficienten.

Man construiert also bei gegebenen F.-Elementen und bei harmonischer Trennung von E und $\mathbf{E}$ die Ebene und den Punkt aus ihren resp. Gleichungen ganz ebenso wie aus ihren Coordinaten.

1) Für jede durch den Punkt E gehende Ebene ist

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

2) Für jeden in der Ebene $\mathbf{E}$ liegenden Punkt ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

3) Die Gleichungen der sieben übrigen Punkte und Ebenen der Achtergruppe von den Coordinaten Eins (§ 21) sind

$$-\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0, \qquad \xi_1-\xi_2+\xi_3+\xi_4=0,$$
$$\xi_1+\xi_2-\xi_3+\xi_4=0, \qquad \xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4=0,$$
$$\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4=0, \qquad -\xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4=0,$$
$$\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0; \text{ und } -x_1+x_2+x_3+x_4=0, \text{ etc.}$$

4) Aus der Gleichung $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$ folgen die Gleichungen der übrigen dreiundzwanzig Ebenen der Gruppe mit permutierten Coordinaten

$$ax_1+bx_2+dx_3+cx_4=0, \quad ax_1+cx_2+bx_3+dx_4=0, \text{ etc.}$$

5) Für eine Ebene durch A_1 und eine solche durch A_1A_2 ist resp. $\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0, \quad \xi_3x_3+\xi_4x_4=0.$

6) Für einen Punkt in der Ebene $\mathbf{A}_2$ und einen Punkt in der Geraden $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1$ ist resp.

$$\xi_1x_1+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0, \quad \xi_2x_2+\xi_4x_4=0.$$

23. Man kann eine Ecke oder eine Kante und eventuell eine Fläche des F.-Tetraeders als unendlich fern voraussetzen und dadurch aus den zusammengehörigen allgemeinen Coordinaten x_i, ξ_i zusammengehörige specielle bilden, deren beide erste man als prismatische und als Keil-Coordinaten bezeichnen kann, während die dritte Annahme die aus den Elementen bekannten Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten liefert.

Das prismatische steht dem letztern insofern dual gegenüber, als dort eine Ecke, hier eine Fläche des F.-Tetraeders unendlich fern liegt. Wir wollen desshalb diese beiden zuerst behandeln.

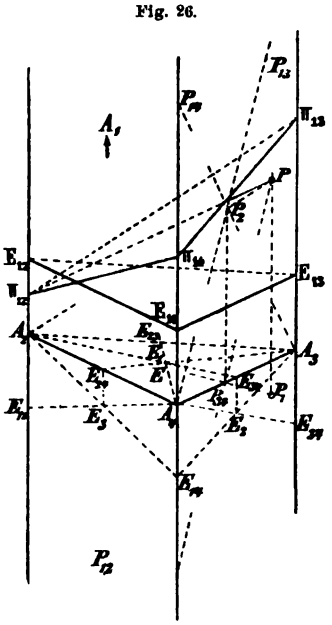
Ist A_1 der unendlich ferne F.-Punkt, so hat man für die die Ecke A_1 bevorzugende Gruppe der zur Construction des Punktes dienenden Coordinatenverhältnisse (Fig. 26, p. 124)

$$x_2 : x_1 = (A_2A_1E_{12}P_{12}) = A_2E_{12} : A_2P_{12},$$
$$x_3 : x_1 = (A_3A_1E_{13}P_{13}) = A_3E_{13} : A_3P_{13},$$
$$x_4 : x_1 = (A_4A_1E_{14}P_{14}) = A_4E_{14} : A_4P_{14}.$$

Man erhält somit bei der Wahl des E.-Punktes E nach den Relationen $A_2E_{12}=A_3E_{13}=A_4E_{14}=-1$ die bezeichneten Coordinatenverhältnisse des Punktes als die negativen Reci-

proken der Längenzahlen der Abschnitte, welche von den nach ihm durch A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3 gelegten Ebenen in den parallelen Gegenkanten des F.-Prismas A_2A_1, A_3A_1, A_4A_1 gebildet werden — vom fundamentalen Querschnitt aus gerechnet.

Fig. 26.



Für die Ebenencoordinaten ist wegen $\xi_1 = 1$

$$\xi_2 = (A_1 A_2 \mathbf{E}_{12} \Pi_{12}) = A_2\Pi_{12} : A_2\mathbf{E}_{12},$$
$$\xi_3 = (A_1 A_3 \mathbf{E}_{13} \Pi_{13}) = A_3\Pi_{13} : A_3\mathbf{E}_{13},$$
$$\xi_4 = (A_1 A_4 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}) = A_4\Pi_{14} : A_4\mathbf{E}_{14},$$

oder unter Annahme der harmonischen Trennung zwischen den Einheitelementen für dasselbe F.-Prisma wegen

$$A_2\mathbf{E}_{12} = A_3\mathbf{E}_{13} = A_4\mathbf{E}_{14} = -A_2E_{12} = 1,$$

$$\xi_2 = A_2\Pi_{12}, \quad \xi_3 = A_3\Pi_{13}, \quad \xi_4 = A_4\Pi_{14};$$

d. h. die Coordinaten der Ebene sind die Längenzahlen ihrer Abschnitte in den Kanten des prismatischen Mantels vom fundamentalen Querschnitt aus gemessen. Die E.-Ebene liegt zu diesem parallel in dem in der Richtung A_1 gemessenen Abstand Eins; der E.-Punkt in der durch den Schwerpunkt des Querschnittes nach A_1 gehenden Geraden im Abstand $E_1E = -\frac{1}{3}$.

Die Bedingung der Incidenz ist für diese Coordinaten aus

$$1 + \xi_2\frac{x_2}{x_1} + \xi_3\frac{x_3}{x_1} + \xi_4\frac{x_4}{x_1} = 0 \text{ geometrisch}$$

$$1 = \frac{A_2\Pi_{12}}{A_2P_{12}} + \frac{A_3\Pi_{13}}{A_3P_{13}} + \frac{A_4\Pi_{14}}{A_4P_{14}};$$

sie kann, wo Verwechslungen mit Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten nicht stattfinden können, wie für diese in der Form geschrieben werden

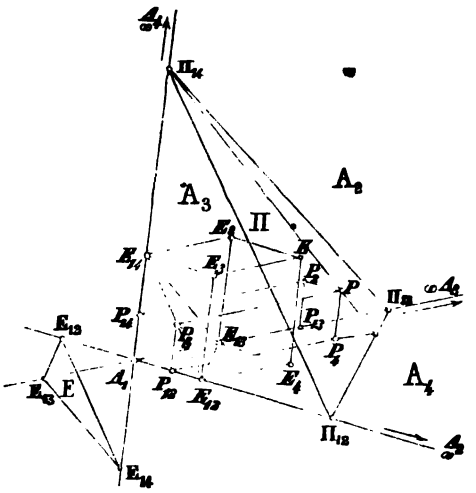
$$1 + \xi x + \eta y + \zeta z = 0,$$

sodass den algebraischen Rechnungsergebnissen mit dieser

Form dadurch zwei Reihen gleichberechtigter Interpretationen gewonnen werden.

Wenn wir dagegen voraussetzen, dass die Ebene $\mathbf{A}_1$ oder $A_2 A_3 A_4$ die unendlich ferne Ebene sei, so bilden die Punkte P_2, P_3, P_4 und E_2, E_3, E_4 die Parallelprojectionen von P und E nach den Richtungen der drei von A_1 ausgehenden Kanten $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ auf die Ebene der jedesmaligen beiden andern

Fig. 27.



$\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ resp. (Fig. 27) und man hat in $A_1 E_{12} E_4 E_{13} E_2 E_{14} E_3 E$ das projicierende Parallelepiped von E und entsprechend das von P. (I, § 46.) Man hat wegen $(A_1 \infty \mathbf{E}_{1i} E_{1i}) = -1$ $A_1 \mathbf{E}_{1i} = -A_1 E_{1i}$ und erhält somit

$$x_1 = p_1 : e_1 = 1, \qquad x_2 : x_1 = x_2 = A_1 P_{12} : A_1 E_{12},$$
$$x_3 : x_1 = x_3 = A_1 P_{13} : A_1 E_{13}, \qquad x_4 : x_1 = x_4 = A_1 P_{14} : A_1 E_{14};$$

und ebenso

$$\xi_2 : \xi_1 = -1 : \frac{A_1 \Pi_{12}}{A_1 E_{12}}, \qquad \xi_3 : \xi_1 = -1 : \frac{A_1 \Pi_{13}}{A_1 E_{13}},$$

$$\xi_4 : \xi_1 = -1 : \frac{A_1 \Pi_{14}}{A_1 E_{14}};$$

oder wenn man ferner $A_1 E_{12} = A_1 E_{13} = A_1 E_{14}$ setzt und als die Einheit des Längenmaasses wählt, die gewöhnlichen Car-

tesischen Punktcoordinaten einerseits und die Plücker-schen Ebenencoordinaten anderseits. Man bezeichnet für die ersteren

$x_2 = A_1P_{12}$ durch x, $x_3 = A_1P_{13}$ durch y, $x_4 = A_1P_{14}$ durch z

und für die letzteren die Verhältnisse

$$\xi_2 : \xi_1, \quad \xi_3 : \xi_1, \quad \xi_4 : \xi_1 \quad \text{resp. durch } \xi, \eta, \zeta$$

und erhält für die Incidenzbedingung in der Form

$1 + \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{x_2}{x_1} + \frac{\xi_3}{\xi_1}\frac{x_3}{x_1} + \frac{\xi_4}{\xi_1}\frac{x_4}{x_1} = 0$ die neue $1 + \xi x + \eta y + \zeta z = 0$;

also die Cartesische Gleichung der Ebene

$1 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$ oder $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$;

und die Plücker'sche Gleichung des Punktes

$1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta = 0$ oder $\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta = 0$.

In jener sind die Verhältnisse der Coefficienten zum absoluten Glied die Plücker'schen Coordinaten der Ebene, in dieser die Cartesischen Coordinaten des Punktes.

Schreibt man die Incidenzbedingung in den bezüglichen Strecken, also

$$1 = \frac{A_1P_{12}}{A_1\Pi_{12}} + \frac{A_1P_{13}}{A_1\Pi_{13}} + \frac{A_1P_{14}}{A_1\Pi_{14}},$$

so erkennt man leicht ihre Ableitbarkeit aus der Figur; man multipliciere sie mit der Länge A_1P des Radius vectors von einem Punkt P der Ebene, sodass sie wird

$$A_1P = A_1P\frac{A_1P_{12}}{A_1\Pi_{12}} + A_1P\frac{A_1P_{13}}{A_1\Pi_{13}} + A_1P\frac{A_1P_{14}}{A_1\Pi_{14}};$$

und denke durch die Punkte P_{12}, P_{13}, P_{14} die zu Π parallelen Ebenen gelegt, sodass im Radius vector von A_1 aus gemessen drei Stücke abgeschnitten werden, deren Werthe rechts stehen und die A_1P zur Summe haben, weil sie den entsprechenden Projectionen von A_1P_{12}, $P_{12}P_4$ und P_4P resp. gleich sind. Natürlich findet man auch die Ableitungen des vorigen Paragraphen specialisiert in der Figur wieder.

Wenn endlich die F.-Punkte A_3, A_4 zugleich unendlich fern gedacht sind, so werden (Fig. 28) die Coordinatenverhältnisse für die entsprechenden Keilcoordinaten

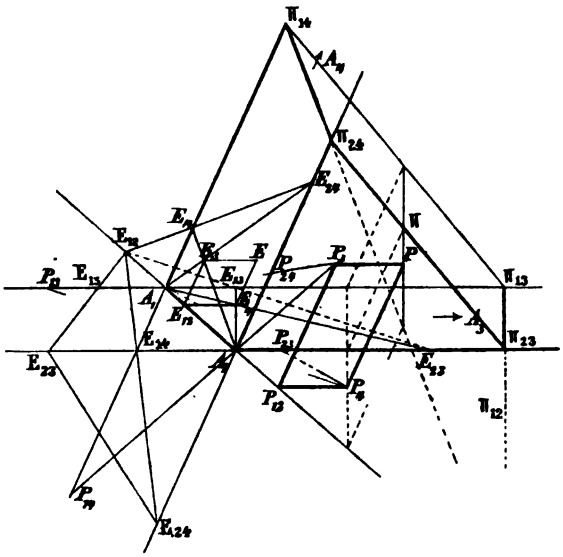
$$x_2 : x_1 = (A_2 A_1 E_{12} P_{12}) = \frac{A_2 E_{12}}{A_1 E_{12}} \cdot \frac{A_1 P_{12}}{A_2 P_{12}},$$

$$x_3 : x_1 = (A_3 A_1 E_{13} P_{13}) = \frac{A_1 P_{13}}{A_1 E_{13}},$$

$$x_4 : x_1 = (A_4 A_1 E_{14} P_{14}) = \frac{A_1 P_{14}}{A_1 E_{14}}.$$

Macht man insbesondere $A_1 E_{13} = A_1 E_{14} = A_2 E_{23} = A_2 E_{34} = A_1 E_{12} = -A_2 E_{12}$ und gleich Eins, so wird

Fig. 28.



$$x_2 : x_1 = -\frac{A_1 P_{12}}{A_2 P_{12}}, \qquad x_3 : x_1 = A_1 P_{13}, \qquad x_4 : x_1 = A_1 P_{14}$$

zur leichten Construction des zugehörigen Punktes.

Für eine Ebene ξ_i erhält man analog

$$\xi_2 : \xi_1 = (A_1 A_2 \mathbf{E}_{12} \Pi_{12}) = \frac{A_1 \mathbf{E}_{12}}{A_2 \mathbf{E}_{12}} \cdot \frac{A_2 \Pi_{12}}{A_1 \Pi_{12}},$$

$$\xi_3 : \xi_1 = (A_1 A_3 \mathbf{E}_{13} \Pi_{13}) = \frac{A_1 \mathbf{E}_{13}}{A_1 \Pi_{13}},$$

$$\xi_4 : \xi_1 = (A_1 A_4 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}) = \frac{A_1 \mathbf{E}_{14}}{A_1 \Pi_{14}};$$

und da bei harmonischer Trennung von $\mathbf{E}$ und E nun $\mathbf{E}_{12}$ unendlich fern und $\mathbf{E}_{13}$, $\mathbf{E}_{14}$ im Abstand -1 von A_2 liegen,

$$\xi_2 : \xi_1 = A_2\Pi_{12} : A_1\Pi_{12}, \quad \xi_3 : \xi_1 = -\frac{1}{A_1\Pi_{13}},$$

$$\xi_4 : \xi_1 = -\frac{1}{A_1\Pi_{14}}.$$

Die Bedingung der Incidenz wird nun

$$1 = \frac{A_2\Pi_{12}}{A_1\Pi_{12}} \cdot \frac{A_1P_{12}}{A_2P_{12}} + \frac{A_1P_{13}}{A_1\Pi_{13}} + \frac{A_1P_{14}}{A_1\Pi_{14}}.$$

Durch centrische Collineation kann man von allgemeinen projectivischen Coordinaten zu jeder dieser Specialformen übergehen; wählt man die Gegenebene $\mathbf{R}$ einer solchen Collineation als durch die Ecke A_1 des Originalsystems gehend, so verwandelt sich dasselbe in ein prismatisches System; man sieht, dass man bei diesem Uebergang die F.-Punkte A_2, A_3, A_4 beibehalten kann, wenn man ihre Ebene A_1 als Collineationsebene wählt, und dass für E als Centrum der Collineation auch dieser bleibt.

Wählt man eine der F.-Ebenen, etwa $\mathbf{A}_1$ als Gegenebene $\mathbf{R}$, so gelangt man zu Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten; lässt man dabei das Centrum der Collineation einen der beiden Punkte sein, die die Scheitel trirectangulärer Ecken über der Basis $A_2A_3A_4$ sind (spitzwinklig vorausgesetzt: I, § 10, 15), also in der im Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks errichteten Normale der Ebene im Abstand des geometrischen Mittels zwischen den Abschnitten der Höhen, so wird das Cartesische System rectangulär. Analog im Fall der Keilcoordinaten. Und umgekehrt für den Uebergang von solchen speciellen zu allgemeinen Coordinaten. Offenbar kann man auch den fünf freigewählten F.-Elementen A_1, A_2, A_3, A_4, E des allgemeinen Systems fünf speciell gewählte als in allgemeiner Collineation zuordnen, z. B., um noch einen andern Fall von Werth hervorzuheben, die vier Ecken und den Mittelpunkt eines regulären Tetraeders, sodass man zu regulär tetraedrischen Coordinaten kommt, die zugleich Vierebenen-, Vierpunkt- und Volumen-Coordinaten (§ 18, 6) sind.

1) Man zeige die Verwendung anderer als der im Text gewählten Gruppen von Coordinatenverhältnissen zur Construction

der Elemente in den speciellen Fällen mit A_1, resp. $A_3 A_4$ oder $A_2 A_3 A_4$ als unendlich fern. In denselben Verhältnissen charakterisiere man die acht Raumgebiete J; 1, 2, 3, 4; 12, 23, 31 der Gruppen von einerlei Vorzeichen und beschreibe die zugehörigen Achtergruppen von Elementen selbst.

2) Die Bedingung der Incidenz für die prismatischen Coordinaten im Text wird leicht aus der Figur elementar abgeleitet. Bezeichnet man mit Π_{14}^* den Schnittpunkt der Geraden $\Pi_{12}\Pi_{13}$, $\Pi_{14} P$, $P_{23} P_4 A_1$ und mit Π_{12}^*, Π_{13}^* seine Projectionen aus A_3, A_2 auf $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ resp., so wird die Lage von P in der Geraden $\Pi_{14}\Pi_{14}^*$ im Dreieck $A_1 A_4 P_{23}$ und wieder die Lage von Π_{14}^* in der Geraden $\Pi_{23}\Pi_{13}$ im Dreieck $A_1 A_2 A_3$ nach § 17 durch die Gleichungen ausgedrückt

$$\frac{A_4\Pi_{14}}{A_4 P_{14}} + \frac{P_{23}\Pi_{14}^*}{P_{23} P_4} = 1, \quad \frac{A_2\Pi_{12}}{A_2\Pi_{12}^*} + \frac{A_3\Pi_{13}}{A_3\Pi_{13}^*} = 1.$$

Multipliciert man die drei Glieder der letzten mit den nach der Figur gleichen Verhältnissen

$$\frac{A_2\Pi_{12}^*}{A_2 P_{12}}, \quad \frac{A_3\Pi_{13}^*}{A_3 P_{13}}, \quad \frac{P_{23}\Pi_{14}^*}{P_{23} P_4}$$

der Reihe nach, so erhält man

$$\frac{A_2\Pi_{12}}{A_2 P_{12}} + \frac{A_3\Pi_{13}}{A_3 P_{13}} = \frac{P_{23}\Pi_{14}^*}{P_{23} P_4}$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung die Incidenzbedingung im Text.

3) Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Ebene hat die Cartesische Gleichung von der Form, die nur die Verhältnisse ihrer Coordinaten ξ, η, ζ enthält,

$$Ax + By + Cz = 0;$$

analog ist ein Punkt der unendlich fernen Ebene in Plücker'schen Coordinaten durch

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

ausgedrückt, und die Richtungen der Coordinatenaxen $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ sind insbesondere $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ resp., die Richtung des Strahles $A_1 E$ ist $\xi + \eta + \zeta = 0$.

4) Eine Ebene durch die Axe $A_1 A_4$ und die in Bezug auf die benachbarten Coordinatenebenen zu ihr harmonisch conjugierte sind dargestellt durch

$$Ax \pm By = 0.$$

5) Im Fall der rechtwinkligen Axen überträgt sich der Zusammenhang in § 18, 2 zwischen Punkt und Linie von gleichen

Coordinaten auf die Projectionen und Spuren des Punktes und der Ebene, welchen die nämlichen Coordinatenwerthe zukommen. Die Punkte E_{14}, E_{13}, E_{12} sind die den Ebenen $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ resp. zugehörigen Centra.

6) Fällt man von A_1 aus auf die Ebene Π die Normale, und nennt ihre Länge p, sowie die von ihr mit den drei positiven Axen x, y, z eingeschlossenen Winkel α, β, γ, so hat man wegen

$$-p\xi = \cos\alpha, \quad -p\eta = \cos\beta, \quad -p\zeta = \cos\gamma$$

aus der Incidenzbedingung der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten

$$1 + \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

die Gleichung der Ebene, die sog. Hesse'sche Normalform derselben

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

7) Die Entfernung eines Punktes (x', y', z') von der Ebene

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

ist ausgedrückt durch

$$\pm(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p),$$

weil sie als positive oder negative Differenz der Perpendikel von A_1 auf die Ebene und auf ihre Parallelebene durch den gegebenen Punkt betrachtet werden kann, und das letztere als die Projection des Radius vector des Punktes auf die Normale eben gleich ist $x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma$. Das obere Zeichen gilt, wenn der Anfangspunkt A_1 und der gegebene Punkt auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen, das untere, wenn beide auf derselben Seite sich befinden; für den Punkt als in A_1 erhält man dann den Abstand p wieder.

8) Für rechtwinklige Cartesische Coordinaten ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad \text{(I, § 46)},$$

somit auch $p^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1$ oder $p = \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$; es ist der Factor, mit dem die Gleichung in der allgemeinen Form multipliciert werden muss, um sie in die Normalform überzuführen. Für die Ebene

$$1 + \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

ist die Distanz des Punktes (x', y', z') von ihr

$$\frac{1 + \xi x' + \eta y' + \zeta z'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

wo das doppelte Zeichen der Wurzel im Sinn von 6) zu wählen ist.

9) Die Gruppen der je vierundzwanzig Punkte oder Ebenen,

deren Coordinaten die Permutationen derselben vier algebraischen Zahlen sind, werden unmittelbar anschaulich, wenn man von dem gegebenen Coordinatensystem zu einem regulären übergeht. In diesem ist die Permutation der Coordinaten der Ausdruck der orthogonalen Symmetrie der Punkte in Bezug auf die sechs Ebenen durch E nach den Tetraederkanten und der centrischen Symmetrie in Bezug auf E selbst. Die viermal sechs Punkte der Gruppe liegen auf der durch den ersten Punkt gehenden Kugel vom Mittelpunkt E und die vierundzwanzig Ebenen der Gruppe berühren sämmtlich eine solche Kugel — in Punkten, die selbst eine gleichartige Gruppe bilden. Auf einer solchen Kugel liegen zweifach unendlich viele unserer Gruppen. Diese Kugeln der Gruppen bilden ein System, in welchem für alle die unendlich ferne E.-Ebene die Polarebene des E.-Punktes ist und beiden für alle das nämliche (orthogonale) Polarsystem zukommt, bestimmt durch die Strahlen EA_1, EA_2, EA_3, EA_4 als entsprechend den Ebenen von E nach den Schnitten von $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ mit $\mathbf{E}$.

Beim Rückgang zu dem allgemeinen Coordinatensystem treten an Stelle der concentrischen Kugeln Flächen zweiten Grades, die in E.-Punkt und E.-Ebene ein gemeinsames Paar von Pol und Polarebene mit festem Polarsystem besitzen (vergl. II, § 39, 17 f. und weiterhin die Theorie der räumlichen Polarsysteme), und von denen daher jede sowohl durch einen Punkt als durch eine Ebene als ihr angehöriges Element vollkommen bestimmt wird.

Es ist nützlich, die Symmetrie der Gruppen von vierundzwanzig Elementen eingehender zu betrachten, ihre Zerlegung in Sechsergruppen nach den Geraden EA_1, EA_2, EA_3, EA_4 oder nach den Geraden $\mathbf{A}_1\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_2\mathbf{E}$, etc.

Auch die Ueberführung in rechtwinklige Cartesisch-Plücker'sche, in reguläre prismatische und in rechtwinklige Keilcoordinaten bietet nützliche Uebungen der Anschauung.

24. Eine Ebene ist durch drei Punkte von unabhängiger Lage als Verbindungsebene, ein Punkt ebenso durch drei Ebenen als Schnittpunkt bestimmt. Bezeichnet man die unbekannten Coordinaten der Ebene durch ξ_i, die bekannten Coordinaten der drei Punkte durch y_i, z_i, w_i, so hat man ausser der Gleichung der Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 &= 0, \\ \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 &= 0, \\ \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 + \xi_4 w_4 &= 0, \end{aligned}$$

welche ausdrücken, dass die drei Punkte y_i, z_i, w_i in der Ebene

von den Coordinaten ξ_i liegen. Man bestimmt nach den Regeln der Determinantentheorie aus diesen letzteren die Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4$ und erhält durch Einsetzung in die erste, oder auch direct durch die Elimination der ξ_i zwischen allen vier Gleichungen die Gleichung der Ebene.

Die Elimination der ξ_i zwischen den vier Gleichungen liefert sie in der Determinantenform

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt und mit Anschreibung nur des ersten Gliedes der Determinantenfactoren aus der vom ersten Element ausgehenden Diagonale

$$x_1 (y_2 z_3 w_4) - x_2 (y_3 z_4 w_1) + x_3 (y_4 z_1 w_2) - x_4 (y_1 z_2 w_3) = 0$$

oder auch

$$x_1 (y_2 z_3 w_4) - x_2 (y_1 z_3 w_4) + x_3 (y_1 z_2 w_4) - x_4 (y_1 z_2 w_3) = 0.$$

Die allgemeine Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= c_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= c_2, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= c_n \end{aligned}$$

liefert

$$x_1 = \begin{vmatrix} c_1, & a_{12}, \ldots a_{1n} \\ c_2, & a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ c_n, & a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, & c_1, & a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & c_2, & a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}, & c_n, & a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

und lautet für D als die Determinante der Coefficienten a_{ik}, also

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und für $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{21}, \dots, A_{ik}$ als die Elemente ihres adjungierten Systems oder die Factoren der $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ik}$ in der Entwickelung von D kurz und allgemein

$$\mathrm{D}x_i = c_1 A_{1i} + c_2 A_{2i} + \dots + c_n A_{ni}.$$

Aus den obigen drei Gleichungen findet man also die Verhältnisse $\xi_1 : \xi_4$, $\xi_2 : \xi_4$, $\xi_3 : \xi_4$ aus den y_i, z_i, w_i wie folgt:

$$\xi_1 : \xi_4 = -\begin{vmatrix} y_4, & y_2, & y_3 \\ z_4, & z_2, & z_3 \\ w_4, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

oder

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \begin{vmatrix} y_2, & y_3, & y_4 \\ z_2, & z_3, & z_4 \\ w_2, & w_3, & w_4 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} y_3, & y_4, & y_1 \\ z_3, & z_4, & z_1 \\ w_3, & w_4, & w_1 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} y_4, & y_1, & y_2 \\ z_4, & z_1, & z_2 \\ w_4, & w_1, & w_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix};$$

durch Einsetzen also wie oben.

Insbesondere ist also für die Punkte P_1, P_2, P_3 in Cartesischen Coordinaten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 die Gleichung der Verbindungsebene

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Für rechtwinklige Cartesische Coordinaten sind die Coefficienten der Veränderlichen x, y, z in dieser Gleichung resp. die doppelten Flächenzahlen der Projectionen des Dreiecks auf die F.-Ebenen und somit für F als den doppelten Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ selbst gleich

$$F\cos\alpha, \quad F\cos\beta, \quad F\cos\gamma \quad \text{resp.}$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der mit F multiplicierten Normalform

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

der Gleichung der Ebene zeigt daher, dass ihr absolutes Glied das sechsfache Volumen der dreiseitigen Pyramide ausdrückt, welche der Coordinatenanfangspunkt als Spitze mit dem Dreieck $P_1P_2P_3$ als Basis bildet.

Daraus erkennt man aber, dass die Determinante der rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten von vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, also

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix},$$

das sechsfache Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ bezeichnet. Denn dieses ist das Product aus der doppelten Flächenzahl der Basis $P_1P_2P_3$ in die Längenzahl der Höhe oder in die der Entfernung der Gegenecke P_4 von jener; diese Entfernung wird aber ausgedrückt durch die Substitution von x_4, y_4, z_4 für x, y, z in die Gleichung der Ebene $P_1P_2P_3$ und durch nachherige Division mit der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in ihr; und diese Quadratwurzel ist das Doppelte der Fläche des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks.

Die Gleichung des gemeinsamen Punktes der drei Ebenen η, ζ, ω folgt aus den Bedingungsgleichungen

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0, \quad x_1\eta_1 + \ldots = 0,$$
$$x_1\zeta_1 + \ldots = 0, \quad x_1\omega_1 + \ldots = 0$$

in der Form

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\xi_1(\eta_2\zeta_3\omega_4) - \xi_2(\eta_3\zeta_4\omega_1) + \xi_3(\eta_4\zeta_1\omega_2) - \xi_4(\eta_1\zeta_2\omega_3) = 0.$$

Die Gleichung der Ebene durch drei Punkte ist offenbar zugleich die Bedingung, unter der die vier Punkte x_i, y_i, z_i, w_i in einer Ebene liegen, und die letzterhaltene Gleichung des Schnittpunktes von drei Ebenen die Bedingung, unter welcher vier Ebenen ξ_i, η_i, ζ_i, ω_i durch einen Punkt gehen; seine Coordinaten sind die Coefficienten-Determinanten der letzten Gleichung, sowie die Coordinaten der Ebene die der ersten. Aus ihrer Berechnung kann der Punkt sowie die Ebene nach dem Früheren construiert werden.

Weil in einer Determinante ohne Aenderung ihres Werthes die Zeilen der Elemente in Reihen und umgekehrt verwandelt werden können (unter Beibehaltung ihrer Folgeordnung, wenn auch keine Zeichenänderung stattfinden soll), so werden die Gleichungen a) und b) resp. auch erhalten als Resultate der Elimination der Coefficienten l, m, n, p und λ, μ, ν, π zwischen den Gleichungsgruppen

$$\left.\begin{aligned} lx_i + my_i + nz_i + pw_i &= 0 \\ \text{und} \quad \lambda\xi_i + \mu\eta_i + \nu\zeta_i + \pi\omega_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

nämlich in den Formen

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & w_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & w_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & w_3 \\ x_4, & y_4, & z_4, & w_4 \end{vmatrix} = 0, \text{ und resp. } \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1, & \omega_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2, & \omega_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3, & \omega_3 \\ \xi_4, & \eta_4, & \zeta_4, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus jenen Gleichungen aber entnehmen wir die Ausdrücke

$$x_i = -\frac{my_i + nz_i + pw_i}{l} \quad \text{und} \quad \xi_i = -\frac{\mu\eta_i + \nu\zeta_i + \pi\omega_i}{\lambda};$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene von drei Punkten und die einer beliebigen Ebene durch den Punkt von drei Ebenen sind lineare Functionen der gleichnamigen Coordinaten dieser Punkte resp. Ebenen. (Vergl. § 19, 5.) Offenbar ist der Nenner ebenso bei der Construction des Punktes aus seinen Coordinaten x_i resp. der Ebene aus ihren Coordinaten ξ_i gleichgültig, wie er bei der Substitution in Gleichungen wegfällt, die in den x_i resp. den ξ_i homogen sind. So erhält man die einfach unendlich vielen Punkte der Schnittlinie der Ebene yzw mit einer Ebene von den Coordinaten η_i, indem man in $\eta_1 x_1 + \ldots = 0$ die vorigen Werthe von x_i einsetzt; es wird

$$\eta_1(my_1 + nz_1 + pw_1) + \eta_2(my_2 + nz_2 + pw_2) + \ldots = 0$$

oder

$$m(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \ldots) + n(\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \ldots) + p(\eta_1 w_1 + \ldots) = 0.$$

Die Verhältnisse der m, n, p werden bestimmt, sobald noch eine zweite Ebene ξ_i gegeben wäre; diese Ebenen können auch selbst durch Tripel fester Punkte bestimmt sein.

1) Die Ebene durch die Punkte von den Coordinaten y_i, z_i und den F.-Punkt A_1 ist für x_i als die laufenden Coordinaten ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ h_1, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) = 0;$$

die Ebene durch y_i, z_i und A_2 analog durch

$$x_1(y_3 z_4 - y_4 z_3) + x_3(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_4(y_1 z_3 - y_3 z_1) = 0, \text{ etc.}$$

2) Der Durchschnittspunkt der Ebenen η_i, ξ_i mit der F.-Ebene $\mathbf{A}_3$, resp. $\mathbf{A}_4$ ist für ξ_i als die laufenden Coordinaten

$$\xi_1(\eta_2 \xi_4 - \eta_4 \xi_2) + \xi_2(\eta_4 \xi_1 - \eta_1 \xi_4) + \xi_4(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1) = 0, \text{ resp.}$$
$$\xi_1(\eta_2 \xi_3 - \eta_3 \xi_2) + \xi_2(\eta_3 \xi_1 - \eta_1 \xi_3) + \xi_3(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1) = 0; \text{ etc.}$$

3) Die Ebene durch den Punkt y_i und die F.-Punkte A_1, A_2 hat die Gleichung

$$y_4 x_3 - y_3 x_4 = 0.$$

4) Die Ebenen

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0, \quad x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = 0,$$
$$-5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

gehen durch den Punkt, für dessen Coordinaten man erhält

$$\frac{x_2}{x_1} = \begin{vmatrix} -6, & -3, & 10 \\ -1, & -1, & -9 \\ 5, & -1, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & -3, & 10 \\ 5, & -1, & -9 \\ -1, & -1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{252}{-92} = (A_3A_4 \,.\, A_2A_1EP);$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \begin{vmatrix} 2, & -6, & 10 \\ 5, & -1, & -9 \\ -1, & 5, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & -3, & 10 \\ 5, & -1, & -9 \\ -1, & -1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{304}{-92} = (A_2A_4 \,.\, A_3A_1EP);$$

$$\frac{x_4}{x_1} = \begin{vmatrix} 2, & -3, & -6 \\ 5, & -1, & -1 \\ -1, & -1, & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2, & -3, & 10 \\ 5, & -1, & -9 \\ -1, & -1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{96}{-92} = (A_2A_3 \,.\, A_4A_1EP).$$

Der Punkt kann hiernach in jeder Darstellung construiert werden, in der das F.-Tetraeder und der E.-Punkt bestimmt sind; die Festsetzung von Axen und Maassstäben, wenn man dieselbe als eine axonometrische Darstellung auffasst (I, §§ 60, 61) oder die Festsetzung hinreichender Flucht- und Durchstosselemente und des Distanzkreises (I, Schlussüberblick p. 346 f.), wenn sie als Centralprojection betrachtet wird, liefert die metrischen Bestimmungen der Lage des Punktes.

5) Ebenso hat der gemeinsame Punkt der Ebenen

$$2x-3y+10z=-6, \quad 5x-y-9z=-1, \quad -x-y+z=5$$

die Cartesischen Coordinaten

$$x = -\frac{63}{22}, \quad y = -\frac{76}{22}, \quad z = -\frac{24}{22}.$$

6) Die Verbindungsebenen der Punkte mit denselben numerischen Coordinaten (a, b, c, d) zu dreien erhält man wie folgt. Die Punkte $(abcd)$, $(-abcd)$, $(a-b-cd)$ liegen in der Ebene

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ a, & b, & c, & d \\ -a, & b, & c, & d \\ a, & -b, & -c, & d \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{c} = 0,$$

welche durch die F.-Linie $A_1 A_4$ geht und offenbar auch den Punkt $(abc - d)$ enthält. Ebenso liegen $(- abcd)$, $(a - bcd)$ und $(ab - c - d)$ mit $(abcd)$ in der Ebene $\frac{x_3}{c} - \frac{x_4}{d} = 0$; $(-abcd)$, $(a - bcd)$, $(a - bc - d)$ und $(a - b - cd)$ in $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$; ferner $(ab - c - d)$ und $(a - bc - d)$ mit $(abcd)$ in der Ebene $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{c} + \frac{x_4}{d} = 0$ und wieder $(a - bcd)$, $(ab - cd)$ und $(abc - d)$ in der Ebene $-\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} + \frac{x_4}{d} = 0$; etc. Man zähle die Punkte auf, die in den zwölf Ebenen $\frac{x_1}{a} \pm \frac{x_2}{b} = 0$, $\frac{x_1}{a} \pm \frac{x_3}{c} = 0$, ... $\frac{x_3}{c} \pm \frac{x_4}{d} = 0$ und in den acht Ebenen $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} + \frac{x_4}{d} = 0$, $-\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} + \frac{x_4}{d} = 0$, etc., $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{c} - \frac{x_4}{d} = 0$, etc. liegen und weise dieselben als die sämmtlichen sechsundfünfzig Verbindungsebenen der acht Punkte nach.

7) Man bilde aus den F.-Punkten und dem E.-Punkt resp. aus den F.-Ebenen und der E.-Ebene durch Schnitt und Verbindung das geometrische Netz der Punkte und Ebenen und berechne die Coordinaten einer Reihe seiner Elemente. Wenn man in drei Ebenen z. B. $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$, $A_1 A_4 A_2$ aus den F.-Punkten und den zugehörigen E.-Elementen E_4, e_4; E_2, e_2; E_3, e_3, resp. die geometrischen Netze bildet, so erhält man daraus durch Zusammensetzung das Netz im Raum; macht man A_1 zum Anfangspunkt zusammengehöriger Cartesisch-Plücker'scher Coordinaten, so führt sich Alles auf die einfache Anschauung von § 18,5, Fig. 22 zurück.

8) Die vierundzwanzig Punkte von Coordinaten aus den Permutationen derselben vier algebraischen Zahlen liegen zu sechs in Ebenen wie $(abcd)$, $(abdc)$, $(acbd)$, $(acdb)$, $(adbc)$, $(adcb)$ in

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2 + x_3 + x_4}{b + c + d} = 0, \text{ etc.} \quad \text{(Vergl. § 34,4.)}$$

9) Zwei Punkte P_1, P_2 bestimmen mit dem Anfangspunkt A_1 eine Ebene der Geraden $A_1 P_1$, $A_1 P_2$ und ein Dreieck $A_1 P_1 P_2$; setzt man den Winkel der ersten in ihm gleich ϑ, so gilt die Gleichung $\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{A_1 P_1}^2 + \overline{A_1 P_2}^2 - 2 A_1 P_1 \cdot A_1 P_2 \cdot \cos\vartheta$. Sind $A_1 P_1 = A_1 P_2 =$ Eins, und α_1, β_1, γ_1 die von der ersten mit den positiven Axen x, y, z eingeschlossenen Winkel, sowie α_2, β_2, γ_2 die Richtungswinkel der zweiten, so sind die Coordinaten von P_1

und P_2 resp. $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ und $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$. Weil aber das Quadrat der Entfernung zweier Punkte die Quadratsumme der Differenzen ihrer gleichnamigen Coordinaten und die Summe der Quadrate der Richtungscosinus einer Geraden stets gleich Eins ist, so geht für diesen Fall die obige Formel über in

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

d. h. der cos des Winkels ϑ, den zwei Geraden von den Richtungswinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ resp. mit einander einschliessen, ist die Summe der Producte ihrer gleichnamigen Richtungscosinus.

Sind sie rechtwinklig zu einander, so besteht zwischen ihren Richtungscosinus die Relation

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

10) Sind die Geraden A_1P_1 und A_1P_2 von 9) die Normalen zweier Ebenen, deren Gleichungen in ihren Normalformen erscheinen, so hat man im Vorigen die Bestimmung ihres Winkels. Und nach der Ueberführung der allgemeinen Gleichung in die Normalform in § 23, 8 erhält man für den Winkel der Ebenen

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0, \quad \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

den Ausdruck

$$\cos\varphi = \frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2}{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)}\,\sqrt{(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)}};$$

daraus auch

$$\sin^2\varphi = \frac{(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2 + (\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)^2}{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)}.$$

Die Zähler beider Ausdrücke geben gleich Null gesetzt resp. die Bedingungen der Rechtwinkligkeit und des Parallelismus der Ebenen an.

11) Für die Richtungswinkel α, β, γ der Normalen zur Ebene $A_1P_1P_2$ in 9) gelten nach diesem gleichzeitig die Relationen

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2 = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Aus den beiden ersten zieht man

$$\frac{\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}{\cos\gamma},$$

setzen wir $= \lambda$ und somit folgt durch Einsetzung in die letzte

$$(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)^2 = \lambda^2$$

und somit $\lambda^2 = \sin^2\theta$.

12) Wenn man in die Determinante der Coordinaten von P_1, P_2, P_3

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

die Radien vectoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der Eckpunkte mit ihren Richtungswinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; etc. einführt, so wird sie zu

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Und wenn a, b, c die Kantenwinkel der Ecke aus dem Anfangspunkt der Coordinaten über dem Dreieck $P_1P_2P_3$, a', b', c' die Neigungswinkel der jeweiligen dritten Kante derselben gegen die Ebene der beiden ersten Kanten bezeichnen, sodass dasselbe sechsfache Tetraedervolumen auch durch

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \sin a \sin a' = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \sin b \sin b' = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \sin c \sin c'$$

ausgedrückt wird, so erkennt man das Quadrat der Cosinus-Determinante (vergl. auch § 26, 2)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} 1, & \cos c, & \cos b \\ \cos c, & 1, & \cos a \\ \cos b, & \cos a, & 1 \end{vmatrix}$$

und also auch

$$1 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c,$$

also gleichwerthig mit

$$\sin^2 a \sin^2 a' \quad \text{und} \quad \sin^2 b \sin^2 b' \quad \text{sowie} \quad \sin^2 c \sin^2 c',$$

also auch für $a + b + c = 2\sigma$ mit

$$4\sin\sigma\sin(\sigma - a)\sin(\sigma - b)\sin(\sigma - c).$$

Jene Cosinusdeterminante ist daher eine nur von -1 bis $+1$ variirende Zahl, die man desshalb und nach der Analogie mit

$$\sin^2 = \begin{vmatrix} 1, & \cos \\ \cos, & 1 \end{vmatrix}$$

als den Sinus der Ecke aus dem Anfangspunkt über $P_1P_2P_3$

oder als sin (abc) bezeichnen kann. Dann ist das sechsfache Volumen des Tetraeders dem Product der Längenzahlen von drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten in den Sinus der von ihnen gebildeten Ecke gleich — analog wie die doppelte Fläche eines Dreiecks dem Product der Längenzahlen von zwei Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels. In Folge dessen ist die mit dem Sinus der Ecke der Coordinatenaxen multiplicierte Determinante der schiefwinkligen Cartesischen Coordinaten von vier Punkten dem sechsfachen Volumen des Tetraeders gleich, welches die Punkte zu Ecken hat.

13) Denkt man den E.-Punkt eines projectivischen als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Cartesischen und Plücker'schen Coordinatensystems, in welchem die Coordinaten x, y, z der Ecke A_i durch a_i, b_i, c_i und die Coordinaten der Fläche $\mathbf{A}_k$ durch $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, sowie die der E.-Ebene durch $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bezeichnet seien, so hat man für die projectivischen Coordinaten

$$x_i = p_i : e_i = \frac{\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + 1}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}} : \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}}$$
$$= \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + 1.$$

Bezeichnet man ferner die sechsfachen Volumina des F.-Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ und seiner am E.-Punkt als gemeinsamer Ecke zusammenstossenden Theiltetraeder $EA_2A_3A_4$, $EA_3A_4A_1$, ... durch $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$, sodass $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ sein muss, so erhält man als die Elemente des adjungierten Systems der Determinante $\mathbf{F}$ in der i^{ten} Zeile $\alpha_i \mathbf{F}_i$, $\beta_i \mathbf{F}_i$, $\gamma_i \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_i$ und daher durch Multiplication des Ausdrucks für x_i durch x, y, z mit $\mathbf{F}_i a_i$, $\mathbf{F}_i b_i$, $\mathbf{F}_i c_i$ und $\mathbf{F}_i$ resp. und Addition

$$\mathbf{F}x = \mathbf{F}_1 a_1 x_1 + \mathbf{F}_2 a_2 x_2 + \mathbf{F}_3 a_3 x_3 + \mathbf{F}_4 a_4 x_4,$$
$$\mathbf{F}y = \mathbf{F}_2 b_1 x_1 + \ldots, \quad \mathbf{F}z = \mathbf{F}_1 c_1 x_1 + \ldots$$

14) Die Determinante der Coordinaten $x_1, y_1, z_1, 1; x_2, y_2, z_2, 1; \ldots$ von vier beliebigen Punkten des Raumes, welche nach Obigem das sechsfache Volumen V des von ihnen gebildeten Tetraeders ausdrückt, liefert daher durch Multiplication aller ihrer Elemente mit $\mathbf{F}$ nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten

$$\mathbf{F}^4 \cdot V = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_1 a_1, & \mathbf{F}_2 a_2, & \mathbf{F}_3 a_3, & \mathbf{F}_4 a_4 \\ \mathbf{F}_1 b_1, & \mathbf{F}_2 b_2, & \mathbf{F}_3 b_3, & \mathbf{F}_4 b_4 \\ \mathbf{F}_1 c_1, & \mathbf{F}_2 c_2, & \mathbf{F}_3 c_3, & \mathbf{F}_4 c_4 \\ \mathbf{F}_1, & \mathbf{F}_2, & \mathbf{F}_3, & \mathbf{F}_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)}, & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)}, & x_2^{(4)}, & x_3^{(4)}, & x_4^{(4)} \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \mathbf{F} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_4^{(1)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_1^{(4)} & \ldots & x_4^{(4)} \end{vmatrix}$$

und somit wegen $\mathbf{F}_i : \mathbf{F} = e_i : h_i$ auch als Ausdruck des Tetraedervolumens in wahren projectivischen Coordinaten

$$V = \frac{e_1 e_2 e_3 e_4}{h_1 h_2 h_3 h_4} \mathbf{F} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} \dots x_4^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1^{(4)} \dots x_4^{(4)} \end{vmatrix}.$$

15) Sind zwei der vier Punkte F.-Punkte A_i, A_k, so ist das sechsfache Volumen des durch sie mit $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ bestimmten Tetraeders insbesondere für A_1, A_2

$$V_{12} = \frac{e_1 e_2 e_3 e_4}{h_1 h_2 h_3 h_4} \mathbf{F} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \cdot & \cdot & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \cdot & \cdot & x_4^{(2)} \\ \frac{h_1}{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{e_2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{e_3 e_4}{h_3 h_4} \mathbf{F} \begin{vmatrix} x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \end{vmatrix}.$$

25. Wenn man die vorhergehenden Entwickelungen als ein Raum erzeugendes Fortgehen am Leitfaden der Projection bezeichnen kann, erst aus der Geraden von einem Punkt ausser ihr in die Ebene und dann aus dieser von einem Punkt ausser ihr in den Raum von drei Dimensionen, so liegt es nahe, mit derselben Vorstellungsweise den Raum von vier Dimensionen zu construieren und algebraisch auszudrücken und so weiter zu gehen. Wir thun dies nicht, zeigen aber noch, wie die darstellend geometrische Methode sich auch in der Behandlung der Geraden im Raum bewährt.

Eine Gerade ist die Verbindungslinie von zwei Punkten von den Coordinaten y_i, z_i oder die Schnittlinie von zwei Ebenen η_i, ζ_i; wollte man sie aber nach dem Vorigen direct aus diesen construieren, so müsste man die fundamentale Construction des vierten Elements zu drei gegebenen in einem Gebilde erster Stufe bei gegebenem Doppelverhältniss sechsmal anwenden, während die Anschauung des Raumes als Gesammtheit seiner Geraden als die eines Gebildes vierter Stufe (§ 2) eine viermalige Wiederholung derselben als hinreichend erscheinen lässt.

Dieser Erwartung entspricht es genau, wenn man nach der Methode der darstellenden Geometrie als die bestimmenden Punkte der Geraden zwei ihrer Schnitt- oder Durchstoss-Punkte

S_i mit den Flächen des F.-Tetraeders, oder als die bestimmenden Ebenen derselben zwei ihrer Verbindungs- oder projicierenden Ebenen Σ_i aus den Ecken des F.-Tetraeders benutzt; denn für jeden und jede von diesen wird die zweifache Anwendung der bezeichneten Construction gebraucht, wenn man ihre Coordinaten kennt. Diese sind aber leicht zu bestimmen.

Ein Punkt $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ liegt in den Ebenen $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$, η_i, ζ_i, wenn man gleichzeitig hat $x_1 = 0$ und

$$\eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 = 0, \quad \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 x_4 = 0;$$

also sind seine Coordinaten d. h. die Coordinaten von S_1 für die Gerade (η_i, ζ_i) $x_1 = 0$ und

$$x_2 : x_3 : x_4 = (\eta_3\zeta_4 - \eta_4\zeta_3) : -(\eta_2\zeta_4 - \eta_4\zeta_2) : (\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2).$$

Ebenso findet man für die Coordinaten ihres Durchstosspunktes S_2 die Werthe $x_2 = 0$ und

$$x_1 : x_3 : x_4 = -(\eta_3\zeta_4 - \eta_4\zeta_3) : (\eta_1\zeta_4 - \eta_4\zeta_1) : (\eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3);$$

für S_3 und S_4 resp. $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und

$$x_1 : x_2 : x_4 = (\eta_2\zeta_4 - \eta_4\zeta_2) : -(\eta_1\zeta_4 - \eta_4\zeta_1) : (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1),$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = -(\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2) : -(\eta_3\zeta_1 - \eta_1\zeta_3) : -(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1).$$

Die Ebene $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ dagegen enthält die Punkte $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ und y_i, z_i, wenn gleichzeitig $\xi_1 = 0$ und

$$\xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0, \quad \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 = 0$$

sind; also sind die Coordinaten der projicierenden Ebene aus A_1 oder von Σ_1 für die Gerade (y_i, z_i) $\xi_1 = 0$ und

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = (y_3 z_4 - y_4 z_3) : -(y_2 z_4 - y_4 z_2) : (y_2 z_3 - y_3 z_2);$$

ebenso erhält man für die der projicierenden Ebenen Σ_2, Σ_3, Σ_4 resp. $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ und

$$\xi_1 : \xi_3 : \xi_4 = -(y_3 z_4 - y_4 z_3) : (y_1 z_4 - y_4 z_1) : (y_3 z_1 - y_1 z_3);$$
$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_4 = (y_2 z_4 - y_4 z_2) : -(y_1 z_4 - y_4 z_1) : (y_1 z_2 - y_2 z_1);$$
$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = -(y_2 z_3 - y_3 z_2) : -(y_3 z_1 - y_1 z_3) : -(y_1 z_2 - y_2 z_1).$$

Man sieht, die Coordinaten der Durchstosspunkte und der projicierenden Ebenen sind die Differenzen der Producte der η_i, ζ_i und resp. der y_i, z_i in Paaren, oder die zweireihigen Determinanten, wie man sie aus den Gruppen der Coordinaten

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \end{matrix} \right\|$$

bildet; bezeichnen wir zur Abkürzung

$(\eta_i \xi_k - \eta_k \xi_i)$ durck π_{ik} und $(y_i z_k - y_k z_i)$ durch p_{ik},

so sind die Coordinaten der S_i und resp. der Σ_i der Reihe nach die in folgender Tafel enthaltenen Grössen

	x_1	x_2	x_3	x_4	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	
S_1	0 ,	π_{34},	$-\pi_{24}$,	π_{23}	0 ,	p_{34},	$-p_{24}$,	p_{23}	Σ_1
S_2	$-\pi_{34}$,	0	π_{14},	π_{31}	$-p_{34}$,	0	p_{14},	p_{31}	Σ_2
S_3	π_{24},	$-\pi_{14}$,	0	π_{12}	p_{24},	$-p_{14}$,	0	p_{12}	Σ_3
S_4	$-\pi_{23}$,	$-\pi_{31}$,	$-\pi_{12}$,	0	$-p_{23}$,	$-p_{31}$,	$-p_{12}$,	0	Σ_4

Und die Gleichungen der vier Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 und die der vier projicierenden Ebenen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ lauten

$$\begin{aligned}
\pi_{34}\xi_2 - \pi_{24}\xi_3 + \pi_{23}\xi_4 &= 0, \\
-\pi_{34}\xi_1 + \pi_{14}\xi_3 + \pi_{31}\xi_4 &= 0, \\
\pi_{24}\xi_1 - \pi_{14}\xi_2 + \pi_{12}\xi_4 &= 0, \\
-\pi_{23}\xi_1 - \pi_{31}\xi_2 - \pi_{12}\xi_3 &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{34}x_2 - p_{24}x_3 + p_{23}x_4 &= 0, \\
-p_{34}x_1 + p_{14}x_3 + p_{31}x_4 &= 0, \\
p_{24}x_1 - p_{14}x_2 + p_{12}x_4 &= 0, \\
-p_{23}x_1 - p_{31}x_2 - p_{12}x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

In denselben sind die Vorzeichen, soweit sie willkürlich sind, mit Rücksicht auf die Symmetrie der Gruppen gewählt; sie erfüllen in der ersten und dritten Zeile das Gesetz, dass das Produkt $\pi_{kl}\xi_i$ das positive oder negative Zeichen hat, jenachdem die Ziffern i, k, l der natürlichen Ziffernfolge entsprechen oder nicht; in der zweiten und vierten das umgekehrte.

Wenn nun die Verbindungslinie der Punkte y_i, z_i mit der Schnittlinie der Ebenen η_i, ξ_i identisch ist, so liegen die Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 sämmtlich in jeder der projicierenden Ebenen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, d. h. die Producte der gleichnamigen Coordinatenpaare eines S_i und eines Σ_k (den Fall $i = k$ nicht ausgenommen) geben immer die Summe Null. So erhält man für i als von k verschieden zwölf zweigliedrige

und für $i = k$ vier dreigliedrige identische Relationen, z. B. mit S_1

$$-\pi_{24}p_{14}+\pi_{23}p_{31}=0, \qquad -\pi_{34}p_{14}+\pi_{23}p_{12}=0,$$
$$-\pi_{34}p_{31}+\pi_{24}p_{12}=0$$

als die zweigliedrigen, aus welchen folgt

$$\pi_{23}:\pi_{24}:\pi_{34}=p_{14}:p_{31}:p_{12};$$

und dazu die dreigliedrige

$$\pi_{34}p_{34}+\pi_{24}p_{24}+\pi_{23}p_{23}=0$$

oder mit Hilfe der vorigen Proportionalität

$$p_{12}p_{34}+p_{31}p_{24}+p_{23}p_{14}=0$$

und ebenso

$$\pi_{34}\pi_{12}+\pi_{24}\pi_{31}+\pi_{23}\pi_{14}=0.$$

Aus der Gesammtheit der zweigliedrigen Relationen folgt die Proportionenkette zwischen den Coordinaten der Durchstosspunkte und den Coordinaten der projicierenden Ebenen einer Geraden

$$\pi_{12}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{34}=p_{34}:p_{14}:p_{24}:p_{23}:p_{31}:p_{12},$$

oder kurz $\pi_{ik}=k.p_{lm}$ für k als eine Constante; und die viergliedrigen liefern für dieselben die zwei vorher geschriebenen gleichbedeutenden Identitäten.

Die Gleichungen der Durchstosspunkte S_i und der projicierenden Ebenen Σ_i sind nun auch

$$\begin{aligned}
p_{12}\xi_2-p_{31}\xi_3+p_{14}\xi_4&=0,\\
-p_{12}\xi_1+p_{23}\xi_3+p_{24}\xi_4&=0,\\
p_{31}\xi_1-p_{23}\xi_2+p_{34}\xi_4&=0,\\
-p_{14}\xi_1-p_{24}\xi_2-p_{34}\xi_3&=0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{12}x_2-\pi_{31}x_3+\pi_{14}x_4&=0,\\
-\pi_{12}x_1+\pi_{23}x_3+\pi_{24}x_4&=0,\\
\pi_{31}x_1-\pi_{23}x_2+\pi_{34}x_4&=0,\\
-\pi_{14}x_1-\pi_{24}x_2-\pi_{34}x_3&=0.
\end{aligned}$$

Wie in der Identitätsbedingung und in den Gleichungen der projicierenden Ebenen und der Durchstosspunkte, die homogen und resp. vom zweiten und vom ersten Grade sind, so darf man hiernach in jeder homogenen Gleichung zwischen den Grössen p_{ik} die π_{lm} für diese einsetzen, ohne ihre geometrische Bedeutung zu stören. (Vergl. § 30.)

Da nun die Grössen π_{ik} und statt ihrer auch die proportionalen p_{lm} zur Construction der Durchstosspunkte oder der projicierenden Ebenen der Geraden $y_i z_i$, $\eta_i \xi_i$ dienen, d. h. zur Bestimmung der letzteren selbst, und da sie diess mit dem geringsten zu erwartenden Aufwand an Constructionsmitteln leisten, so wollen wir sie als die sechs Coordinaten π_{ik} oder p_{ik} der Geraden bezeichnen. Sie sind vier unabhängigen Grössen gleich zu achten, weil zwischen ihnen eine identische Relation besteht und eine von ihnen gleich Eins gesetzt werden kann.

Die geometrische Bedeutung jener identischen Relation zeigt zugleich, dass sie die hinreichende Bedingung ist, welcher sechs Zahlen p_{ik} oder π_{lm} genügen müssen, um die Coordinaten einer Geraden sein zu können, oder um vier Durchstosspunkte resp. projicierende Ebenen einer geraden Reihe oder eines Ebenenbüschels zu bestimmen. Gerade, welche eine Kante oder zwei, drei, vier Kanten des F.-Tetraeders schneiden, haben zum Theil verschwindende Coordinaten. Trifft z. B. die Gerade $y_i z_i$ die Kante $A_3 A_4$ in z_i, so sind z_2 und z_1 gleich Null und daher $p_{12} = 0$, $p_{23} = y_2 z_3$, $p_{31} = -y_1 z_3$, $p_{14} = y_1 z_4$, $p_{24} = y_2 z_4$, $p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3$; trifft sie $A_3 A_4$ in z_i und $A_1 A_2$ in y_i, so sind auch y_3 und y_4 gleich Null und daher ausser p_{12} auch p_{34}, überdiess $p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}$ wie vorher. Schneidet sie $A_3 A_4$ und $A_3 A_2$, also, wenn sie nicht durch A_3 geht, auch $A_2 A_4$, so verschwinden p_{12}, p_{14}, p_{31}; geht sie durch einen F.-Punkt, z. B. A_1, so verschwinden die Coordinaten, die seinen Index nicht enthalten, also p_{23}, p_{24}, p_{34} und p_{12}, p_{31}, p_{14} sind resp. $y_1 z_2$, $-y_1 z_3$, $y_1 z_4$ oder einfach z_2, $-z_3$, z_4; wenn sie endlich von A_1 nach einem Punkte der Kante $A_3 A_4$ geht, so sind nur $p_{31} = -z_3$, $p_{14} = z_4$ nicht Null. Für die Kanten des Tetraeders selbst verschwindet nur je eine Coordinate nicht, z. B. für $A_1 A_2$ ist $p_{12} = 1$. Alle diese besondern Fälle wie die dual entsprechenden lassen sich leicht in Regeln fassen.

1) Man hat

$$(m_1 y_i + n_1 z_i)(m_2 y_k + n_2 z_k) - (m_1 y_k + n_1 z_k)(m_2 y_i + n_2 z_i) = (m_1 n_2 - m_2 n_1)(y_i z_k - y_k z_i),$$

d. h. die Verhältnisse der p_{ik} und also auch der π_{lm} bleiben beim Uebergange von den bestimmenden Punkten y_i, z_i zu irgend zwei andern in ihrer Geraden gelegenen Punkten unverändert — gemäss

ihrer geometrischen Bedeutung; ebenso beim Ersatz der bestimmenden Ebenen η_i, ξ_i durch irgend zwei andere Ebenen ihres Büschels.

Nach dem Ergebniss von § 24, 15 ist

$$p_{ik} = \frac{V_{lm}}{\mathbf{F}} \frac{h_i h_k}{e_i e_k}$$

oder dem Volumen des Tetraeders proportional, welches die bestimmenden Punkte mit den F.-Punkten $A_l A_m$ bilden; diess ist aber das Product der Kantenlängen yz und $A_l A_m$ in ihre kürzeste Entfernung und in den Sinus ihres Winkels (vergl. unten § 26, 5), was gleichfalls die Behauptung beweist.

2) Man construiere in dem F.-Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit der E.-Ebene $\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{34}\mathbf{E}_{13}$ (Fig. 29 p. 149) die Gerade vom Punkt (3, 3, — 3, 1) nach dem Punkt (3, — 6, — 21, — 26) oder die Gerade von den Coordinaten $p_{12} = -3$, $p_{23} = -9$, $p_{31} = 6$, $p_{14} = -9$, $p_{24} = -8$, $p_{34} = 11$ (nach Kürzung mit 9), für welche die identische Relation erfüllt ist. Die Gleichungen ihrer projicierenden Ebenen aus A_1, A_2, A_3, A_4 sind resp.

$$11x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 0, \qquad -11x_1 - 9x_3 + 6x_4 = 0,$$
$$-8x_1 + 9x_2 - 3x_4 = 0, \qquad 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0.$$

Für die projicierende Ebene Σ_2 ist also $\xi_1 = -11$, $\xi_3 = -9$, $\xi_4 = 6$ und somit

$$-\frac{11}{6} = (A_4 A_1 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}), \quad -\frac{3}{2} = (A_4 A_3 \mathbf{E}_{34} \Pi_{34});$$

und für die projicierende Ebene Σ_4 ist $\xi_1 = 9$, $\xi_2 = -6$, $\xi_3 = 3$ oder

$$3 = (A_3 A_1 \mathbf{E}_{13} \Pi_{13}), \quad -2 = (A_3 A_2 \mathbf{E}_{23} \Pi_{23}).$$

Damit erhält man die Gerade mittelst ihrer Durchstosspunkte in den F.-Ebenen, welche die Schnittpunkte der gleichnamigen Spuren jener projicierenden Ebenen sind — wie in Fig. 29 die Gerade 1, 3, 4 (S_2 fällt ausserhalb des Blattes). Man zog z. B. $A_1 A_4'$ parallel zu $A_2 \mathbf{E}_{14}$ und trug auf die Parallele zu $A_2 A_4$ durch A_1 das $-\frac{11}{6}$ fache von $A_4' A_2$ auf, um in der von dem entsprechenden Punkt nach A_2 gehenden Geraden $\Pi_{14}{}^2$ zu finden; ebenso für $\Pi_{34}{}^2$, $\Pi_{13}{}^4$, $\Pi_{23}{}^4$.

Die Bemerkung des § 24, 4 von dem Uebergang zu bestimmten Maassen von einer solchen Figur aus bleibt unverändert gültig. Man braucht zur Construction immer nur fünf der Coordinaten.

3) Man zeige aus der Figur, dass das Doppelverhältniss der vier Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 einer Geraden immer dem entsprechenden Doppelverhältniss ihrer vier gleichnamigen projicie-

renden Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 gleich ist. Man hat für p_1 und 2_1, 3_1, 4_1 als die Projectionen der Geraden p und ihrer Durchstosspunkte 2, 3, 4 aus A_1 auf $A_2A_3A_4$ die Doppelverhältniss-Gleichheiten

$$(1234) = (12_13_14_1) = (A_2.12_13_14_1) = (\Pi_{34}{}^2 2_1 A_4 A_3)$$
$$= (1.\Pi_{34}{}^2 2_1 A_4 A_3) = (1.2_1\Pi_{34}{}^2 A_3 A_4)$$
$$= (p.A_1A_2A_3A_4) = (\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4).$$

4) Durch sechs Zahlen $(p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34})$, welche als algebraische mit bestimmten Zeichen die Identität der Strahlencoordinaten erfüllen, können mittelst Wechsels der Vorzeichen acht Gerade definiert werden, die eine hyperboloidische Gruppe bilden.

Wegen der Identität können die Factoren der Producte $p_{12}p_{34}$, $p_{23}p_{14}$, $p_{31}p_{24}$ ihre Vorzeichen nicht einzeln, sondern immer nur in einem Product zugleich oder einer der Factoren in allen drei Producten wechseln, und man erhält daher die möglichen Combinationen leicht.

Ist I die durch die sechs algebraischen Zahlen ursprünglich gegebene Gerade, so entstehen andere Gerade II, III, IV durch den gleichzeitigen Wechsel der Zeichen bei p_{31} und p_{24}, p_{23} und p_{14}, p_{12} und p_{34} resp. Es entstehen ferner neue Gerade V, VI, VII und VIII, wenn man nach einander bei allen zweiten Factoren in den drei Paaren die Zeichen ändert, und wenn man sie bei einem ersten und zwei zweiten Factoren ändert, nämlich der Reihe nach beim ersten Factor des dritten, zweiten und ersten Gliedes der Identität.

Betrachtet man nun die Coordinaten des ersten Durchstosspunktes p_{12}, $-p_{31}$, p_{14}, so erkennt man sie als algebraisch gleich für die Geraden I und VII, II und VIII, III und V, IV und VI; die Coordinaten des zweiten Durchstosspunktes $-p_{12}$, p_{23}, p_{24} sind übereinstimmend für die Geraden I und VI, II und V, III und VIII, IV und VII; die des dritten für I und VIII, II und VII, III und VI, IV und V, und die des vierten für I und V, II und VI, III und VII, IV und VIII. Die vier ersten Geraden I bis IV werden also von den vier letzten V bis VIII je in ihren Durchstosspunkten geschnitten oder jene können als vier Gerade der Schaar g und diese als vier Gerade der Schaar l desselben einfachen Hyperboloides betrachtet werden.

Ueberdies aber können die sechs gegebenen Zahlen in ihren Paaren auf sechsfache Weise den Producten $p_{12}p_{34}$, $p_{23}p_{14}$, $p_{31}p_{24}$ entsprechen und man erhält somit sechs solche Gruppen, wie die hier betrachtete. Man erläutere den Zusammenhang der Gruppen.

5) Welche Anschauung giebt das regulär tetraedrale Coordinatensystem von der Gruppe der Geraden der vorigen Aufgabe?

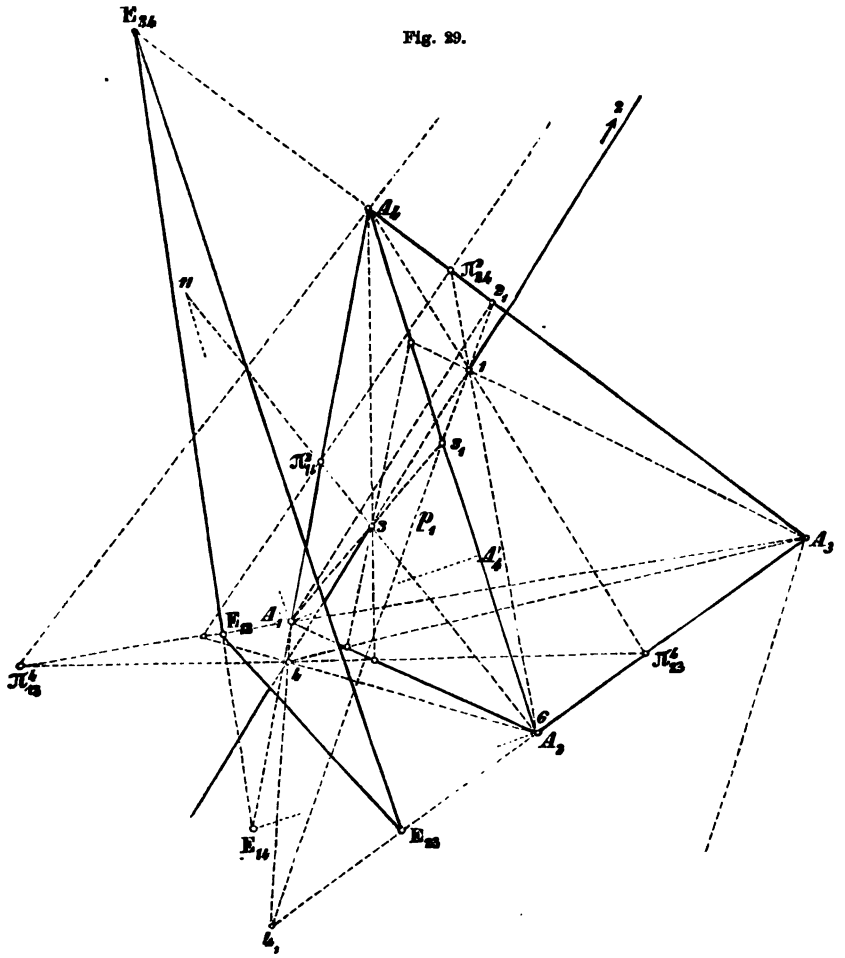
6) Die projicierende Ebene des Strahles p_{ik} resp. π_{lm} aus dem

F.-Punkt A_h, dem Schnittpunkt der F.-Ebenen $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{A}_l$ hat die Gleichung mit cyklischen Indices

$$x_i p_{kl} + x_k p_{li} + x_l p_{ik} = 0,$$

wenn man das Minuszeichen vor jedes Glied setzt, bei dessen p die Folge der Indices nicht der natürlichen Zahlfolge entspricht;

Fig. 29.



in derselben Weise hat der Durchstosspunkt mit der F.-Ebene $\mathbf{A}_h$, der Verbindungsebene von A_i, A_k, A_l, die Gleichung

$$\xi_i \pi_{kl} + \xi_k \pi_{li} + \xi_l \pi_{ik} = 0.$$

Die gleichnamigen projicierenden Ebenen von drei Geraden bilden

ein Büschel, wenn die Determinante ihrer Coefficienten p_{kl}, p_{li}, p_{ik}; p_{kl}', ...; p_{kl}'', ... verschwindet; unter analoger Bedingung gehören die gleichnamigen Durchstosspunkte von drei Geraden derselben Reihe an. Es ist klar, dass die Erfüllung dieser Bedingung für zwei Gruppen der projicierenden Ebenen resp. der Durchstosspunkte bedeutet, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen resp. in einer Ebene liegen, und die Gleichzeitigkeit beider Bedingungsgruppen, dass sie ein Büschel bilden. Auch ist klar, dass aus der Erfüllung für zwei Gruppen der projicierenden Ebenen die für die beiden andern folgen muss.

26. Im Falle der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten, unter der Voraussetzung, dass A_2, A_3, A_4 unendlich fern sei, d. h. mit $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$; $\xi_2 : \xi_1 = \xi$, $\xi_3 : \xi_1 = \eta$, $\xi_4 : \xi_1 = \zeta$ erhält man für die Verbindungsgerade von zwei Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) nach dem Schema

$$\left\| \begin{matrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \end{matrix} \right\|$$

die sechs Coordinaten

$$p_{12} = x_2 - x_1, \quad p_{23} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad p_{31} = y_1 - y_2,$$
$$p_{14} = z_2 - z_1, \quad p_{24} = x_1 z_2 - x_2 z_1, \quad p_{34} = y_1 z_2 - y_2 z_1;$$

somit die Gleichungen der Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 resp. (der erste ist die Richtung der Geraden)

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)\,\xi - (y_1 - y_2)\,\eta + (z_2 - z_1)\,\zeta &= 0, \\ -(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\eta + (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,\zeta &= 0, \\ (y_1 - y_2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\xi + (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\zeta &= 0, \\ -(z_2 - z_1) - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,\xi - (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\eta &= 0; \end{aligned}$$

sodann die projicierenden Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 resp.

$$\begin{aligned} (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,x - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,z &= 0, \\ -(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_2 - z_1)\,y + (y_1 - y_2)\,z &= 0, \\ (x_1 z_2 - x_2 z_1) - (z_2 - z_1)\,x + (x_2 - x_1)\,z &= 0, \\ -(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (y_1 - y_2)\,x - (x_2 - x_1)\,y &= 0. \end{aligned}$$

Von ihnen sind die drei letzten $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ der Reihe nach die dritte, zweite und erste projicierende Ebene der darstellenden Geometrie, sowie die Durchstosspunkte S_2, S_3, S_4 als der dritte, zweite und erste dort bezeichnet werden.

Für die Schnittlinie der Ebenen (ξ_1, η_1, ζ_1) und (ξ_2, η_2, ζ_2) hat man

$$\pi_{12} = \xi_2 - \xi_1, \quad \pi_{23} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1, \quad \pi_{31} = \eta_1 - \eta_2,$$
$$\pi_{14} = \zeta_2 - \zeta_1, \quad \pi_{24} = \xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1, \quad \pi_{34} = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1$$

und es sind durch diese Grössen die p_{34}, p_{14}, p_{24}, p_{23}, p_{31}, p_{12} der vorigen Gleichungen zu ersetzen, um dieselben Elemente in der zweiten Ausdrucksweise zu erhalten.

Die Identität wird in der ersten

$$(x_2 - x_1)(y_1 z_2 - y_2 z_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)(z_2 - z_1) + (y_1 - y_2)(x_1 z_2 - x_2 z_1) = 0,$$

respective entsprechend in der zweiten.

Für specielle Lagen der Geraden ergeben sich die Coordinaten wie vorher.

Ist die Gerade als Schnitt ihrer projicierenden Ebenen aus A_3 und A_2 gegeben, deren Gleichungen man etwa schreibt

$$x = mz + a, \quad y = mz + b,$$

und die die nothwendige Zahl von vier unabhängigen Constanten enthalten, so giebt die Tabelle der η_i, ξ_i die Coordinaten

	π_{12} oder p_{34},	π_{23} oder p_{14},	π_{31} oder p_{24},
resp. gleich	b,	1,	a,
	π_{14} oder p_{23},	π_{24} oder p_{31},	π_{34} oder p_{12}
resp. gleich	$an - bm$,	$-n$,	m.

Die Identität lautet nun

$$bm + (an - bm) - an = 0;$$

die Gleichungen der projicierenden Ebenen Σ_1 und Σ_4 und die der Durchstosspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 sind der Reihe nach

$$bx - ay + (an - bm)z = 0, \quad -(an - bm) + nx - my = 0;$$
$$m\xi + n\eta + \zeta = 0, \quad -m + (an - bm)\eta + a\zeta = 0,$$
$$-n - (an - bm)\xi + b\zeta = 0, \quad -1 - a\xi - b\eta = 0.$$

Sagt man, dass die Gerade durch den Punkt (x', y', z') gehe und mit den positiven rechtwinkligen Axen der x, y, z resp. die Winkel α, β, γ bilde, sodass also

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist, so sind

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der Geraden; symmetrisch, aber mit zwei

überschüssigen Constanten. Wir schliessen unten an sie einige Anwendungen. Die Gleichungen der Durchstosspunkte sind der Reihe nach

$$\xi \cos\alpha - \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = 0,$$
$$-\cos\alpha + \eta(x'\cos\beta - y'\cos\alpha) + \zeta(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha) = 0,$$
$$\cos\beta - \xi(x'\cos\beta - y'\cos\alpha) + \zeta(y'\cos\gamma - z'\cos\beta) = 0,$$
$$-\cos\gamma - \xi(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha) - \eta(y'\cos\gamma - z'\cos\beta) = 0.$$

Ebenso die Gleichungen der projicierenden Ebenen

$$x(y'\cos\gamma - z'\cos\beta) - y(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha) + z(x'\cos\beta - y'\cos\alpha) = 0,$$
$$-(y'\cos\gamma - z'\cos\beta) + y\cos\gamma + z\cos\beta = 0,$$
$$x'\cos\gamma - z'\cos\alpha - x\cos\gamma + z\cos\alpha = 0,$$
$$y'\cos\alpha - x'\cos\beta - x\cos\beta - y\cos\alpha = 0$$

oder auch

$$\cos\alpha(yz'-y'z) + \cos\beta(zx'-z'x) + \cos\gamma(xy'-x'y) = 0, \text{ etc.}$$

Die Identität lautet

$$\cos\alpha(y'\cos\gamma - z'\cos\beta) - \cos\beta(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha) + \cos\gamma(x'\cos\beta - y'\cos\alpha) = 0.$$

1) Die Verbindungslinien von Punkten mit numerisch gleichen Coordinaten sind Gerade von besonderer Lage. Für die Gerade (x, y, z), $(-x, y, z)$ folgen

$$p_{12} = -2x, \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = -2y, \quad p_{14} = 0,$$
$$p_{24} = 2xz, \quad p_{34} = 2yz;$$

d. h. solche Gerade schneiden zwei Gegenkanten des Tetraeders, hier A_1A_4 und A_2A_3.

Dagegen folgt für die Gerade (x, y, z), $(x, y, -z)$ ebenso

$$p_{12} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0,$$
$$p_{14} = -2z, \quad p_{24} = -2xz, \quad p_{34} = -2yz;$$

d. h. solche Gerade gehen durch eine Ecke des F.-Tetraeders, hier A_4.

Die Gruppe der acht Punkte giebt achtundzwanzig Verbindungsgerade, von denen die sechzehn mit ungerader Zahl von Zeichenwechseln zwischen den entsprechenden beiden Coordinatengruppen zu vier durch die Ecken gehen und die zwölf mit geraden Anzahlen zu vier je ein Paar Gegenkanten des Tetraeders schneiden.

2) Nach § 24, 11 haben die zu einander parallelen Ebenen durch zwei Gerade von den Richtungswinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und resp. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und durch die Punkte (x', y', z') und bez. (x'', y'', z'') die Gleichungen

$$\begin{aligned}&(x-x')(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+&(y-y')(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\+&(z-z')(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x-x'')(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+&(y-y'')(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\+&(z-z'')(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0.\end{aligned}$$

Der Abstand d derselben von einander ist die Differenz ihrer Abstände von A_1, d. h. nach § 23, 6, 8 die durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z dividierte Differenz ihrer absoluten Glieder oder nach § 24, 11

$$\frac{\begin{aligned}&(x'-x'')(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+&(y'-y'')(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\+&(z'-z'')(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{aligned}}{\sin\vartheta}.$$

Der kürzeste Abstand der betrachteten Geraden d giebt also mit dem Sinus ihres Winkels multipliciert zum Product

$$(x'-x'')(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+\cdots$$

oder

$$\begin{vmatrix}x'-x'', & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2\\ y'-y'', & \cos\beta_1, & \cos\beta_2\\ z'-z'', & \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2\end{vmatrix}$$

d. h. auch

$$\begin{vmatrix}x', & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2\\ y', & \cos\beta_1, & \cos\beta_2\\ z', & \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x'', & \cos\alpha_1, & \cos\alpha_2\\ y'', & \cos\beta_1, & \cos\beta_2\\ z'', & \cos\gamma_1, & \cos\gamma_2\end{vmatrix}.$$

Vergleicht man aber hiermit die Reihe der Coordinaten der beiden Geraden

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y'}{\cos\beta_1}=\frac{z-z'}{\cos\gamma_1},\quad \frac{x-x''}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y''}{\cos\beta_2}=\frac{z-z''}{\cos\gamma_2},$$

nämlich

$$\begin{aligned}&p_{12}'=\cos\alpha_1, && p_{12}''=\cos\alpha_2;\\ &p_{23}'=x'\cos\beta_1-y'\cos\alpha_1, && p_{23}''=x''\cos\beta_2-y''\cos\alpha_2;\\ &p_{31}'=-\cos\beta_1, && p_{31}''=-\cos\beta_2;\\ &p_{14}'=\cos\gamma_1, && p_{14}''=\cos\gamma_2;\\ &p_{24}'=x'\cos\gamma_1-z'\cos\alpha_1, && p_{24}''=x''\cos\gamma_2-z''\cos\alpha_2;\\ &p_{34}'=y'\cos\gamma_1-z'\cos\beta_1, && p_{34}''=y''\cos\gamma_2-z''\cos\beta_2,\end{aligned}$$

so erhält man die Gleichung

$$d \sin\theta = p_{12}' p_{34}'' + p_{23}' p_{14}'' + p_{31}' p_{24}'' + p_{12}'' p_{34}' + p_{23}'' p_{14}' + p_{31}'' p_{24}'.$$

Man bezeichnet das Product des kürzesten Abstandes zweier Geraden in den Sinus ihres Winkels als das Moment derselben und kann also sagen, das Moment von zwei Geraden sei der Summe der sechs Producte ihrer complementären Coordinatenpaare gleich.

Das Moment und somit diese Summe verschwindet für $d = 0$ und für $\sin\theta = 0$, d. h. für zwei Gerade, welche sich im Endlichen oder im Unendlichen schneiden; es ist somit die Relation

$$p_{12}' p_{34}'' + p_{23}' p_{14}'' + p_{31}' p_{24}'' + \cdots = 0$$

die Bedingung für das Schneiden der Geraden. Diess ändert sich nicht für projectivische Coordinaten (vergl. unten 6) p_{ik}', p_{ik}''; das Moment der Geraden erhält man aus derselben nicht verschwindenden Summe, wenn man sie mit $\frac{e_1 e_2 e_3 e_4}{h_1 h_2 h_3 h_4}$ und mit dem Verhältniss vom Volumen des F.-Tetraeders zum Product der Distanzen zwischen den bestimmenden Punkten in den Geraden multipliciert.

3) Man zeige, dass das Moment der Geraden $P_1 P_2$ oder (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) in Bezug auf die Axe z ausgedrückt wird durch

$$\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

oder in den Coordinaten der Geraden durch

$$\frac{p_{23}}{\sqrt{p_{12}^2 + p_{31}^2 + p_{14}^2}}.$$

4) Da für die F.-Tetraederkanten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ alle Coordinaten verschwinden bis auf je eine, nämlich resp. p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34}, welche man gleich Eins setzen kann, so erhalten die Momente einer Geraden in Bezug auf die F.-Tetraederkanten Werthe, deren Verhältnisse durch ihre Coordinaten p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34} ausgedrückt sind.

5) Wenn man die Punkte y_i, z_i, die die Gerade bestimmen, in der Entfernung Eins von einander gewählt denkt — was nach § 25, 1 die Verhältnisse der p_{ik} nicht ändert —, so ist das sechsfache Volumen des von zwei F.-Punkten A_i, A_k mit Y, Z bestimmten Tetraeders als Product der Längenzahlen der Gegenkanten in ihr Moment

$$= A_i A_k . (d \sin\theta)_{A_i A_k} . YZ.$$

6) Wenn die Geraden aus den Ebenenpaaren von den Coordinaten ω_i, ξ_i und resp. η_i, ζ_i sich schneiden sollen, so müssen diese Ebenen durch einen Punkt gehen, d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0$$

sein; mit $\pi_{ik} = \eta_i\xi_k - \eta_k\xi_i$, $\pi_{ik}' = \omega_i\xi_k - \omega_k\xi_i$ ist aber die Entwickelung dieser Determinante ausdrückbar durch

$$\pi_{12}'\pi_{34} + \pi_{23}'\pi_{14} + \pi_{31}'\pi_{24} + \pi_{12}\pi_{34}' + \pi_{23}\pi_{14}' + \pi_{31}\pi_{24}' = 0.$$

Sind die Geraden mit den durch p_{ik}, p_{ik}' bestimmten resp. identisch, so geht die vorige Bedingung nach der Proportionalität der p_{ik}, π_{lm} über in $p_{34}'p_{12} + \cdots\cdots = 0$. (Vergl. 2.) Ist aber die Gerade π_{ik} mit der π_{ik}' identisch, so geht die Bedingung in die Identität der Strahlencoordinaten über.

Wir können sie als die Incidenzbedingung der Geraden bezeichnen, bei deren Erfüllung dieselben einen Punkt und eine Ebene gemein haben; auch sie ist in den Coordinaten beider symmetrisch und linear, wie die Incidenzbedingung von Punkt und Strahl resp. von Ebene und Strahl für Gebilde zweiter Stufe und die von Punkt und Ebenen in den x_i und ξ_i im Gebilde dritter Stufe. Damit ist der algebraische Beweis des Princips der Dualität vollendet.

7) Die Incidenzbedingung der Geraden p_{ik}' oder w_i, x_i und p_{ik} oder y_i, z_i stellt für x_i als Veränderliche die Ebene dar, die den Punkt w_i mit der Geraden p_{ik} verbindet; in den π_{lm}', π_{lm} geschrieben, drückt sie mit den Veränderlichen ξ_i den Punkt aus, welchen die Ebene ω_i mit der Geraden π_{lm} gemein hat.

Durchläuft der Punkt w_i die Reihe p_{ik}', so beschreibt jene Ebene das ganze Büschel von der Scheitelkante p_{ik}, und wenn die Ebene ω_i eine volle Umdrehung um p_{ik}' oder π_{lm}' gemacht hat, so hat der Punkt ξ_i die Gerade p_{ik} oder π_{lm} durchlaufen.

8) Die Coordinaten x_i des Schnittpunktes der Geraden p_{ik} mit der Ebene ξ_i können durch die Verbindung der Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \cdots = 0$$

der letzteren mit den Gleichungen von zweien der projicierenden Ebenen der Geraden, z. B. denen der ersten und zweiten

$$p_{34}x_2 - p_{24}x_3 + p_{23}x_4 = 0, \quad -p_{34}x_1 + p_{14}x_3 + p_{31}x_4 = 0$$

bestimmt werden nach § 24. Analog die Coordinaten ξ_i der Ebene, die den Punkt x_i mit der Geraden verbindet, indem man jene Gleichung mit den Gleichungen z. B. ihrer zwei ersten Durchstosspunkte combiniert, d. h. mit

$$p_{12}\xi_2 - p_{31}\xi_3 + p_{14}\xi_4 = 0, \quad -p_{12}\xi_1 + p_{23}\xi_3 + p_{24}\xi_4 = 0.$$

9) Die Gleichung der Incidenz stellt für die p_{ik} als Veränderliche, welche die Identität der Strahlencoordinaten erfüllen, alle

die Geraden dar, welche die Gerade p_{ik}' schneiden. Die Zahl derselben ergiebt sich wie in § 2, 1 als dreifach unendlich, weil die fünf Unbekannten der Gleichung einer Bedingung unterliegen und somit nach Wahl von dreien derselben die übrigen sich bestimmen.

Man sieht, dass das Letztere für jede homogene lineare Gleichung zwischen den p_{ik} gilt oder dass eine solche eine Gesammtheit von dreifach unendlich vielen Geraden ausdrückt oder dieselben aus der vierfach unendlichen Gesammtheit der reellen Geraden des Raumes ausscheidet. Man nennt diese Gesammtheit einen linearen Complex. (Vergl. § 30.)

10) Eine Gerade, welche zwei durch ihre Coordinaten p_{ik}', p_{ik}'' gegebene Gerade schneiden soll, unterliegt den Bedingungen

$$p_{12}p_{34}' + \cdots\cdots = 0, \quad p_{12}p_{34}'' + \cdots\cdots = 0,$$

die sie zweifach unendlich unbestimmt lassen. (§ 2, 4.) In jeder Ebene liegt eine und durch jeden Punkt geht eine derselben.

Zu drei Geraden $p_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(2)}$, $p_{ik}^{(3)}$ giebt es einfach unendlich viele gemeinschaftliche Transversalen aus den bezüglichen Bedingungen

$$p_{12}p_{34}^{(1)} + \cdots\cdots = 0, \quad p_{12}p_{34}^{(2)} + \cdots\cdots = 0,$$
$$p_{12}p_{34}^{(3)} + \cdots\cdots = 0.$$

Mit vier festen Geraden von unabhängiger Lage $p_{ik}^{(1)}, \cdots, p_{ik}^{(4)}$ ist das Problem der gemeinsamen Transversalen bestimmt und giebt zwei — wie wir wissen mit Lineal und Zirkel zu bestimmende — Lösungen. (Vergl. II, § 38.) Die Coordinaten p_{ik} der Transversale sind den vier linearen Bedingungen des Schneidens mit den gegebenen Geraden und der quadratischen Identität der Strahlencoordinaten unterworfen. Man wird mittelst der ersten vier Gleichungen vier der fünf unbekannten Verhältnisse der p_{ik} durch das fünfte ausdrücken und durch Einsetzen ihrer Werthe in die quadratische Gleichung diese zu einer quadratischen Bestimmungsgleichung für das Letztere machen. Dieselbe liefert zwei Werthe für dasselbe, die entweder reell und verschieden oder conjugiert-imaginär oder insbesondere zusammenfallend sind.

Man bemerkt aber, dass die Aufgabe ohne wesentliche Aenderung die Bestimmung der gemeinschaftlichen Lösungen von vier linearen Gleichungen in den Strahlencoordinaten oder die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geraden von vier linearen Complexen ist. (Vergl. 9.)

27. Nachdem wir in besonderen Fällen schon gesehen haben, dass zwischen den wahren Coordinaten x_i eines Punktes und den Maassen des F.-Dreiecks resp. F.-Tetraeders eine gewisse Abhängigkeit besteht, wollen wir dieselbe hier für den allgemeinen Fall ableiten und die andere damit verbinden,

welche zwischen den Coordinaten ξ_i einer Geraden resp. einer Ebene und jenen Maassen stattfindet; endlich zwischen den Coordinaten p_{ik} einer Geraden im Raum und denselben, welche natürlich aus jenen hervorgehen. Der analytische Ausdruck der Kugel, des Kreises u. s. w. schliesst sich daran.

Wir entwickeln für den Raum von drei Dimensionen.

Nach der Definition der Punktcoordinaten x_i von P hat man den Abstand des Punktes P von den F.-Ebenen $\mathbf{A}_i$ oder $A_hA_jA_k$ auszudrücken durch $p_i = e_i x_i$ mit e_i als dem entsprechenden Abstand des E.-Punktes E. Bezeichnen wir dann die doppelte Fläche des Dreiecks $A_hA_jA_k$ durch F_i und das sechsfache Volumen des F.-Tetraeders durch $\mathbf{F}$, so ist immer

$$\Sigma p_i F_i = \mathbf{F}, \quad \text{d. h.} \quad \Sigma e_i F_i x_i = \mathbf{F},$$

die identische Relation der Punktcoordinaten. Für Σ als Schwerpunkt des Tetraeders kann man sie einfach in der Form schreiben

$$\Sigma x_i = 1.$$

Denkt man nun eine feste Ebene Π und einen veränderlichen Punkt P, so ist sein Abstand p von ihr nothwendig eine homogene lineare Function seiner Coordinaten $x_i = p_i : e_i$, deren Coefficienten c_i sich aus den Coordinaten der Ebene Π bestimmen lassen müssen, setzen wir

$$p = c_1 \frac{p_1}{e_1} + c_2 \frac{p_2}{e_2} + c_3 \frac{p_3}{e_3} + c_4 \frac{p_4}{e_4}.$$

Die Coefficienten c_i bestimmt man durch die Annahme, dass der Punkt P nach einander mit den F.-Punkten A_i zusammenfalle; denn für P in A_1, A_2, etc. ist sein Abstand von der Ebene Π nach der Definition der Coordinaten ξ_i resp. $\pi_1 = \varepsilon_1 \xi_1$, $\pi_2 = \varepsilon_2 \xi_2$, etc. und aus den besonderen Werthen $(h_1, 0, 0, 0)$ und $(0, h_2, 0, 0)$ der Abstände p_i für diese Punkte ergeben sich die Relationen

$$\varepsilon_1 \xi_1 = c_1 \frac{h_1}{e_1}, \quad \varepsilon_2 \xi_2 = c_2 \frac{h_2}{e_2}, \quad \text{etc.}$$

und somit die Coefficientenwerthe

$$c_i = \frac{e_i \varepsilon_i}{h_i} \xi_i = \frac{e_i}{h_i} \pi_i,$$

sodass man erhält

$$p = \frac{p_1 \pi_1}{h_1} + \frac{p_2 \pi_2}{h_2} + \ldots,$$

woraus übrigens für Π als die unendlich ferne Ebene sich die identische Relation zwischen den x_i wieder ergiebt.

Für einen andern Punkt P^* von allgemeiner Lage wird der Abstand von derselben festen Ebene also auch

$$p^* = \frac{p_1^* \pi_1}{h_1} + \ldots$$

und somit die Differenz beider Abstände

$$p - p^* = \frac{\pi_1}{h_1}(p_1 - p_1^*) + \ldots$$

Ist dann Π_n eine zur Geraden PP^* normale Ebene und bezeichnen wir durch PP^* zugleich die Länge dieser Geraden, so kann man schreiben

$$p - p^* = PP^* . \cos(\Pi, \Pi_n) \quad \text{und} \quad p_i - p_i^* = PP^* . \cos(\mathbf{A}_i, \Pi_n),$$

sodass man aus der vorigen Gleichung nach Division mit PP^* erhält

$$\cos(\Pi, \Pi_n) = \frac{\pi_1}{h_1} \cos(\mathbf{A}_1, \Pi_n) + \frac{\pi_2}{h_2} \cos(\mathbf{A}_2, \Pi_n) + \ldots$$

Lassen wir nun Π_n der Reihe nach mit Π und den F.-Ebenen $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_4$ parallel werden, so folgt hieraus nach einander

$$1 = \frac{\pi_1}{h_1} \cos(\mathbf{A}_1, \Pi) + \frac{\pi_2}{h_2} \cos(\mathbf{A}_2, \Pi) + \ldots,$$

$$\cos(\Pi, \mathbf{A}_1) = \frac{\pi_1}{h_1} + \frac{\pi_2}{h_2} \cos(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1) + \ldots,$$

$$\cos(\Pi, \mathbf{A}_2) = \frac{\pi_1}{h_1} \cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) + \frac{\pi_2}{h_2} + \frac{\pi_3}{h_3} \cos(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2) + \ldots,$$

$$\cos(\Pi, \mathbf{A}_3) = \frac{\pi_1}{h_1} \cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3) + \frac{\pi_2}{h_2} \cos(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) + \frac{\pi_3}{h_3} + \frac{\pi_4}{h_4} \cos(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3),$$

$$\cos(\Pi, \mathbf{A}_4) = \frac{\pi_1}{h_1} \cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4) + \frac{\pi_2}{h_2} \cos(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4) + \frac{\pi_3}{h_3} \cos(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) + \frac{\pi_4}{h_4}.$$

Durch Einsetzung der letzten vier Werthe in die erste dieser Gleichungen erhält man die gesuchte identische Relation der Ebenencoordinaten ξ_i in der Form

$$1 = \frac{\pi_1^2}{h_1^2} + \frac{\pi_2^2}{h_2^2} + .. + 2\frac{\pi_1}{h_1}\frac{\pi_2}{h_2}\cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) + ...$$

oder $$1 = \frac{\varepsilon_1^2}{h_1^2}\xi_1^2 + .. + 2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{h_1 h_2}\xi_1\xi_2\cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) + ...$$

und mit Anwendung des Summenzeichens

$$1 = \Sigma\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{h_i h_k}\xi_i\xi_k\cos(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_k), \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Für die entsprechende Entwickelung in der Ebene tritt an Stelle der festen Ebene Π eine feste Gerade und an Stelle der zur Geraden PP^* normalen Ebene eine zu ihr normale Gerade; durch Zusammenlegung derselben mit jener und mit den F.-Linien a_i erhält man vier Gleichungen, deren analoge Verbindung die identische Relation liefert

$$1 = \frac{\varepsilon_1^2}{h_1^2}\xi_1^2 + ... + 2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{h_1 h_2}\xi_1\xi_2\cos(a_1, a_2) + ...$$

Sind nun x_i' die Coordinaten des Mittelpunktes einer Kugel vom Radius r, so ist die die Coordinaten ξ_i aller ihrer Tangentialebenen verbindende Relation nach dem Werth von p oben

$$r^2 = \left\{\frac{e_1\varepsilon_1}{h_1}x_1'\xi_1 + ...\right\}^2$$

und durch Multiplication mit der Identität

$$\Sigma\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{h_i h_k}\xi_i\xi_k\cos(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_k) = 1$$

erhält man die in den ξ_i homogene quadratische Gleichung der Kugel; aus ihr sodann durch Unterdrückung der Glieder mit dem Index 4 und Ersetzung der $\mathbf{A}_i$ durch die a_i die Gleichung des Kreises vom Mittelpunkt x_i' und dem Radius r in der F.-Ebene $A_1A_2A_3$.

Endlich drückt

$$\Sigma\frac{\varepsilon_i\varepsilon_k}{h_i h_k}\xi_i\xi_k\cos(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_k) = 0$$

den unendlich fernen imaginären Kreis aller Kugeln oder den absoluten Kreis aus, dessen Tangentialebenen von allen reellen Punkten des Raumes unendlich grosse Distanz haben. Denn

in rechtwinkligen Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten hat man für die von (x', y', z') um r abstehenden Ebenen ξ, η, ζ

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (\xi x' + \eta y' + \zeta z' + 1)^2$$

und mit $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

ist dieser Abstand unendlich gross.

Die Ausdrücke für das Quadrat der Distanz r^2 des festen Punktes x_i' von dem veränderlichen Punkt x_i aus § 15 resp. § 20 geben unter Erweiterung auf den allgemeinen Fall der projectivischen Coordinaten die entsprechenden Gleichungen der Kugel und des Kreises in Punktcoordinaten; die identische Relation der Punktcoordinaten liefert dann die unendlich ferne Ebene, den Ort des absoluten Kreises. (Vergl. II, § 40, 14.)

Natürlich überträgt sich alles diess auf die Coordinaten der Geraden im Raum. Der Schnittpunkt der Geraden YZ mit der Ebene $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, die wir als die unendlich ferne denken, wird aus

$$(y_1 + \lambda\varepsilon_1) + (y_2 + \lambda\varepsilon_2) + \ldots = 0$$

durch $$\lambda = -\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}$$

erhalten als von den Coordinatenverhältnissen $y_i \Sigma z - z_i \Sigma y$, d. h. für $i = 1, 2, 3, 4$ der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} p_{12} - p_{31} + p_{14}, & -p_{12} + p_{23} + p_{24}, \\ p_{31} - p_{23} + p_{34}, & -p_{14} - p_{24} - p_{34}. \end{array}$$

Die Coordinaten p_{12}^*, p_{23}^*, p_{31}^*, p_{14}^*, p_{24}^*, p_{34}^* der Geraden von diesem Punkt nach dem F.-Punkt A_4 sind demnach der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} 0, \ 0, \ 0, & p_{12} - p_{31} + p_{14}, \\ -p_{12} + p_{23} + p_{24}, & p_{31} - p_{23} + p_{34}. \end{array}$$

Die Abhängigkeit dieser Coordinaten p_{14}^*, p_{24}^*, p_{34}^* von den Maassen des Tetraeders ist leicht direct abzuleiten. Macht die Gerade mit den F.-Ebenen $\mathbf{A}_i$ die Winkel β_i und schliessen die F.-Geraden $A_4 A_i$ mit denselben die Winkel φ_i ein, so werden für P^* als Endpunkt der von A_4 in ihr abgetragenen Längeneinheit die Coordinaten als Volumenverhältnisse (§ 20) der Tetraeder $P^* A_2 A_3 A_4$, $A_1 P^* A_3 A_4$, $A_1 A_2 P^* A_4$ zum F.-Tetraeder ausdrückbar, nämlich $p_{i4}^* = \frac{\sin \beta_i}{A_4 A_i \sin \varphi_i}$. Anderseits

besteht zwischen einer Länge l in der Geraden und ihren Projectionen l_i durch Parallelebenen zu $\mathbf{A}_i$ auf die Kanten $A_4 A_i$ mit den Winkeln der F.-Geraden bei A_4 die Relation

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos(A_2 A_4 A_3) + \ldots = 1$$

und es ist $l_i = l \frac{\sin \beta_i}{\sin \varphi_i}$; wir erhalten also durch Einsetzen die identische Relation der Coordinaten $p_{14}^*, p_{24}^*, p_{34}^*$ in der Form

$$\overline{A_4 A_1}^2 p_{14}^{*2} + \ldots + 2 A_4 A_2 \cdot A_4 A_3 \cos(A_2 A_4 A_3) p_{24}^* p_{34}^* + \ldots = 1$$

und daraus durch Substitution ihrer Werthe die allgemeine identische Relation der Strahlencoordinaten p_{ik}.

Man kann nun die Gleichung der Kugel in Strahlencoordinaten bilden, indem man die Constanz der Entfernung r eines festen Punktes x_i' von der Geraden p_{ik} ausdrückt und findet aus ihrer durch die identische Relation homogen gemachten Form, dass die identische Relation der Strahlencoordinaten durch Vertauschung der Eins rechts mit Null die Bedingung angiebt, unter welcher die Gerade p_{ik} den unendlich fernen imaginären Kugelkreis schneidet.

28. Nachdem wir in den Entwickelungen der §§ 17, 22 die Bedeutung der homogenen Gleichungen ersten Grades in den Coordinaten x_i und ξ_i und zuletzt in § 26, 9 auch die einer solchen Gleichung zwischen den p_{ik} oder π_{lm} kennen gelernt haben, untersuchen wir die Frage nach der geometrischen Bedeutung von homogenen Gleichungen n^{ten} Grades zwischen den Coordinaten; homogener Gleichungen, weil nach unseren Constructionen ja nicht die absoluten Werthe, sondern die Verhältnisse unserer Veränderlichen geometrische Elemente bestimmen. Wir denken dazu diese Gleichungen als solche mit reellen Coefficienten.

Wir beginnen mit einer Gleichung in den x_i resp. ξ_i. Bei zwei Veränderlichen genügen der Gleichung n reelle oder nicht reelle also in Paaren complex conjugierte Werthe des Verhältnisses $x_1 : x_2$ oder $\xi_1 : \xi_2$, welches als Unbekannte der Gleichung angesehen wird; jeder derselben bestimmt ein Element des Gebildes erster Stufe, auf das sich die Veränderlichen beziehen, in Abhängigkeit von drei festen Elementen derselben. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Veränderlichen stellt also geometrisch eine Gruppe von n Ele-

menten in einem Grundgebilde erster Stufe dar, wenn wir sowohl den reellen wie den complexen Wurzeln solche Elemente entsprechend denken. Die algebraischen Eigenschaften der Gleichung werden geometrische Eigenschaften der Gruppe liefern. Zwei solche Gleichungen werden, auch auf dieselben F.-Elemente bezogen, nur dann ein gemeinsames Element bezeichnen, wenn ihre Resultante verschwindet.

Wir betrachten sodann die homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen an dem Beispiel der ebenen Systeme, aus dem die entsprechenden Ergebnisse für Bündel durch Scheinbildung hervorgehen. Sie ist zunächst in Punktcoordinaten x_i die analytische Darstellung einer Curve n^{ter} Ordnung. Denken wir um einen der F.-Punkte z. B. A_1 eine Gerade sich drehend, bis sie in sich zurückkehrt, so hat in jeder ihrer Lagen das Verhältniss $x_2 : x_3$ für ihre Punkte einen bestimmten constanten Werth und man erhält x_3 als ein gewisses Vielfaches von x_2; substituiert man diess für x_3 in die gedachte Gleichung, so erhält man eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen x_1 und x_2 zur Bestimmung derjenigen Werthe des Verhältnisses $x_1 : x_2$, welche beiden Gleichungen, der gegebenen n^{ten} Grades und der linearen des Strahls aus A_1, genügen; dieselben bestimmen n Strahlen aus A_3 und somit eine Gruppe von n Punkten in dem Strahl aus A_1, welche der Gleichung genügen, oder wie man sagt, dem durch sie dargestellten Ort angehören. Setzen wir an Stelle des Strahles aus A_1 eine beliebige Gerade der Ebene, so können wir x_3 aus ihrer Gleichung als lineare Function von x_1 und x_2 ausdrücken und erhalten durch Substitution in die gegebene Gleichung und Auflösung der entstehenden Gleichung n^{ten} Grades n Werthe für das Verhältniss $x_1 : x_2$ und damit n Punkte des Ortes in der Geraden wie vorher.

Das geometrische Gebilde, welches der homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen x_i entspricht, ist also eine stetige Folge von einfach unendlich vielen Punkten, die mit jedem Strahl in ihrer Ebene n (reelle Punkte wie nicht reelle gezählt) Punkte gemein hat. Diess geometrische Gebilde ist also eine ebene Curve n^{ter} Ordnung. (Vergl. Bd. II, § 1.)

Ebenso repräsentiert die allgemeine homogene Gleichung

n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen ξ_i eine Curve n^{ter} Classe in der Ebene, nämlich eine Curve als Enveloppe einer einfach unendlichen Schaar gerader Linien; die genau analogen Betrachtungen zeigen, dass von einem beliebigen Punkt der Ebene des Gebildes n reelle oder in Paaren conjugiert complexe gerade Linien ausgehen, welche dem Gebilde angehören, weil die betreffenden Verhältnisse der ξ_i sowohl der Gleichung des Punktes als der gegebenen Gleichung genügen. (Vergl. a. a. O.)

Man sieht nun auch, dass eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen zweien der Veränderlichen des ebenen Systems d. i. der x_i oder ξ_i immer der Ausdruck der Gruppe von n Punkten oder der Gruppe von n Strahlen sein kann, welche eine Gerade oder ein Punkt der Ebene mit einer Curve n^{ter} Ordnung resp. n^{ter} Classe gemein hat.

Ganz analog in den Bündeln. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen x_1, x_2, x_3 als Coordinaten im Strahlenbündel repräsentiert eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, eine aus ihr durch Verbindung mit einer linearen homogenen Gleichung abgeleitete Gleichung zwischen zweien dieser Veränderlichen die Gruppe von Strahlen dieser Kegelfläche, welche in der durch jene bestimmten Ebene des Bündels liegen. Und eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Coordinaten im Bündel stellt eine Kegelfläche n^{ter} Classe dar, eine aus ihr durch Verbindung mit einer linearen abgeleitete Gleichung zwischen zweien dieser Veränderlichen die Gruppe von Ebenen, welche diese Kegelfläche mit dem durch jene bestimmten Strahl des Bündels gemein hat. (Bd. II, § 3.)

Homogene Gleichungen zweiten Grades zwischen x_1, x_2, x_3 oder ξ_1, ξ_2, ξ_3 stellen daher Curven zweiter Ordnung resp. Classe im ebenen System und Kegel zweiter Ordnung oder Classe im Bündel dar.

Curven ungerader Ordnungen resp. Classen in derselben Ebene haben desshalb nothwendig ein reelles gemeinsames Element, insbesondere geht an eine Curve von ungerader Classe von jedem reellen Punkt ihrer Ebene aus mindestens eine reelle Tangente und jede Curve ungerader Ordnung trifft jede reelle Gerade und allgemeiner jede andere Curve von ungerader Ordnung ihrer Ebene in mindestens einem reellen

Punkt. Curven ungerader Ordnungen oder Classen können daher auch nie ganz imaginär sein, d. h. nie lauter imaginäre Punkte resp. Tangenten haben. Curven von ungerader Ordnungszahl werden aus demselben Grund von ihren Tangenten ausser dem Berührungspunkt noch wenigstens einmal reell geschnitten und bei Curven von ungerader Classenzahl geht durch jeden ihrer Punkte ausser der zugehörigen noch wenigstens eine reelle Tangente; dasselbe gilt für ungerade $n > 4$ für jede Doppeltangente resp. jeden Doppelpunkt.

Daraus folgt dann weiter, dass zwei Gleichungen zwischen den auf das nämliche Fundamentalsystem bezogenen drei Veränderlichen x_i resp. ξ_i stets eine der Zahl ihrer gemeinsamen Auflösungen für zwei der Verhältnisse der x_i resp. der ξ_i entsprechende Zahl von Elementen der ebenen Systeme oder der Bündel repräsentieren; nämlich für die ebenen Systeme und die x_i die Gruppe der gemeinsamen Punkte der beiden Curven, welche die betrachteten Gleichungen einzeln ausdrücken; für die ξ_i ebenso die Gruppe der bezüglichen gemeinsamen Tangenten. Ferner im Bündel für die x_i die Gruppe der gemeinsamen Strahlen von zwei Kegelflächen in demselben, für die ξ_i die der gemeinsamen Tangentialebenen von zwei solchen Kegelflächen. Sind n_1 und n_2 die Grade der Gleichungen, so ist die Zahl ihrer gemeinsamen Auflösungen oder Wurzelgruppen gleich $n_1 n_2$; dieselben sind natürlich wieder reell oder in Paaren complex conjugiert, wenn die Gleichungen reelle Coefficienten haben. Ist eine der Gleichungen linear, so ist die Zahl der gemeinsamen Lösungen, d. h. die Gradzahl der andern, die Ordnungs- resp. Classen-Zahl der Curve oder des Kegels; und eine Punktreihe, ein Strahlbüschel, ein Ebenenbüschel ist Theil der Curve oder Kegelfläche, wenn dasselbe mehr Punkte, Gerade oder Ebenen mit derselben gemein hat, als diese Zahlen angeben. (Vergl. Bd. II, §§ 2, 4. 3, Bd. I, § 25.) Denn dann muss die Bestimmungsgleichung dieser Elemente nothwendig unbestimmt sein.

1) Die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung resp. Classe in der Ebene der F.-Elemente A_1, A_2, A_3, E kann geschrieben werden

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

resp. $$\alpha_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots = 0,$$

insbesondere in Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten nach dem Uebergang von § 18

$$a_{11} + a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + 2a_{23}xy + 2a_{31}y + 2a_{12}x = 0,$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{22}\xi^2 + \ldots = 0$$

oder auch

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0, \quad \text{etc.}$$

Ihre Schnittpunkte mit einer Geraden $a_3x_3 + a_1x_1 = 0$ aus A_2 und ihre Tangenten aus einem Punkt $\alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$ in a_1 oder sind für $-a_1 : a_3 = m$, $-\alpha_2 : \alpha_3 = \mu$ bestimmt aus

$$a_{22}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 2(a_{23}m + a_{12})\frac{x_2}{x_1} + (a_{11} + 2a_{31}m + a_{33}m^2) = 0,$$

$$(\alpha_{22} + \alpha_{33}\mu^2 + 2\alpha_{23}\mu)\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 + 2(\alpha_{31}\mu + \alpha_{12})\frac{\xi_2}{\xi_1} + \alpha_{11} = 0.$$

Für die Curve zweiter Classe in Plücker'schen Coordinaten ist speciell das Tangentenpaar von der Richtung $\eta : \xi = \mu$ bestimmt durch die negativen Reciproken ξ_1, ξ_2 der von ihnen gebildeten Axenabschnitte, die man als Wurzelwerthe aus der vorigen quadratischen Gleichung für $\xi_2 : \xi_1 = \xi$ entnimmt.

2) Die Curve zweiter Ordnung geht durch den F.-Punkt A_i, wenn der Coefficient des Gliedes x_i^2 in ihrer Gleichung Null ist; sie geht also durch alle drei F.-Punkte, wenn ihre Gleichung nur die Producte x_ix_k enthält

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0;$$

analog für die Curve zweiter Classe, welche die F.-Geraden berührt. Sind die Coefficienten a_{ik} im ersten Fall gleich Eins, so liegen, wenn (a, b, c) ein Punkt der Curve ist oder mit $bc + ca + ab = 0$ auch die Punkte (bca), (cab) und ebenso (acb), (cba) und (bac) auf ihr, die zwei Tripel eines Systems aus permutierten Coordinaten. (§§ 16; 18, 6.)

Die Tripel der zugehörigen Verbindungsgeraden berühren sämmtlich den Kegelschnitt

$$\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2 = 0;$$

denn sie haben nach § 19 zu Coordinaten die Permutationen der Gruppe $ab - c^2$, $bc - a^2$, $ca - b^2$ und das Verschwinden der Summe ihrer Producte zu zweien folgt aus der Relation

$$bc + ca + ab = 0,$$

weil sie durch diese theilbar ist.

3) Die Curve zweiter Ordnung berührt die F.-Gerade A_2A_3,

wenn die aus der Verbindung ihrer Gleichung mit $x_1 = 0$ erhaltenen Schnittpunkte mit dieser Geraden zusammenfallen, also wenn die quadratische Gleichung

$$a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

gleiche Wurzeln hat, d. h. für $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$. Die Asymptotenrichtungen des durch die allgemeine Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegebenen Kegelschnittes ergeben sich (§ 16, 3) aus dem Verschwinden ihrer Glieder vom zweiten Grade

$$a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + 2a_{23}xy = 0.$$

Derselbe ist somit eine Parabel unter der vorigen Bedingung. Man sieht sofort, dass alle drei F.-Geraden von ihr berührt werden, wenn ihre Gleichung die Form hat

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0.$$

Die Berührungspunkte mit den F.-Geraden liegen in den Geraden aus den Gegenecken

$$a_1x_1 = a_2x_2, \quad a_2x_2 = a_3x_3, \quad a_3x_3 = a_1x_1,$$

welche sich nach § 19 in dem Punkt

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2a_3 : a_3a_1 : a_1a_2$$

schneiden. (I, § 28, 4.)

Wenn alle Coefficienten Eins sind, so berühren die sechs Geraden aus der Permutation von drei Zahlen α, β, γ immer gleichzeitig den Kegelschnitt und ihre Schnittpunkte liegen in dem durch die F.-Punkte gehenden Kegelschnitt

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0, \qquad \text{wie vorher.}$$

Insbesondere ist die die Axen Cartesischer Coordinaten berührende Parabel

$$a_1^2 + a_2^2x^2 + a_3^2y^2 - 2a_2a_3xy - 2a_3a_1y - 2a_1a_2x = 0,$$

während sie in Plücker'schen Coordinaten eine Gleichung von der Form hat

$$\alpha_{23}\xi\eta + \alpha_{31}\eta + \alpha_{12}\xi = 0.$$

4) Wenn die Curve zweiter Ordnung die F.-Gerade A_1A_2 speciell im Punkt A_1 berühren soll, so muss nach dem Vorigen zugleich a_{11} und a_{12} verschwinden und mit der Berührung von zwei F.-Geraden, natürlich in den F.-Punkten auf der dritten z. B. von A_1A_3 und A_2A_3 in A_1 resp. A_2 wird die Gleichung auf die zweigliedrige Form reduciert, hier auf

$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ — speciell die Parabel $a_{33}y^2 + 2a_{12}x = 0$ —,

wenn sie zugleich den Einheitpunkt enthalten soll auf

$$x_3^2 - x_1 x_2 = 0.$$

In dieser Art werden durch die vier F.-Punkte A_i, E zwölf Kegelschnitte bestimmt, welche nämlich durch drei dieser Punkte gehen und in zweien derselben die Verbindungsgeraden mit dem jeweiligen vierten berühren. (Vergl. I, § 26, Fig. 53.) Die sechs Verbindungsgeraden der vier Punkte $x_i = 0$, $x_j = x_k$ erlauben die Bildung ihrer Gleichungen; nämlich in den vier Gruppen zu dreien wie folgt.

a) Durch zwei der F.-Punkte A_1, A_2, A_3 resp. und durch E mit

$$x_1^2 - x_2 x_3 = 0, \quad x_2^2 - x_3 x_1 = 0, \quad x_3^2 - x_1 x_2 = 0$$

mit den Differenzen ihrer Gleichungen und also den reellen gemeinsamen Sehnen (deren letzte dreifach auftritt)

$$(x_j - x_k)(x_1 + x_2 + x_3) = 0; \qquad \text{resp.}$$

$$x_1 - x_2 = 0, \; x_2 - x_3 = 0, \; x_3 - x_1 = 0; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

b) Durch zwei der Punkte A_1, A_2, E resp. und durch A_3 mit

$$x_3^2 - (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0, \quad (x_3 - x_1)^2 - (x_3 - x_2) x_3 = 0,$$
$$(x_3 - x_2)^2 - (x_3 - x_1) x_3 = 0$$

mit den Differenzen oder reellen gemeinsamen Sehnen

$$x_1 (x_1 + x_2 - 3x_3) = 0, \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3x_3) = 0,$$
$$x_2 (x_1 + x_2 - 3x_3) = 0.$$

c) Durch zwei der Punkte A_2, A_3, E resp. und durch A_1 mit

$$x_1^2 - (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_3) x_1 = 0,$$
$$(x_1 - x_3)^2 - (x_1 - x_2) x_1 = 0;$$

$$x_2 (-3x_1 + x_2 + x_3) = 0, \quad (x_2 - x_3)(-3x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$
$$x_3 (-3x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

d) Durch zwei der Punkte A_3, A_1, E resp. und durch A_2 mit

$$x_2^2 - (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) = 0, \quad (x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_1) x_2 = 0,$$
$$(x_2 - x_1)^2 - (x_2 - x_3) x_2 = 0;$$

$$x_3 (x_1 - 3x_2 + x_3) = 0, \quad (x_3 - x_1)(x_1 - 3x_2 + x_3) = 0,$$
$$x_1 (x_1 - 3x_2 + x_3) = 0.$$

Man bestimme die gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte verschiedener Gruppen und erläutere ihre Verbindung mit dem geometrischen Netz aus harmonischen Gruppen (§ 18, 5).

Ebenso bestimmen dualistisch entsprechend die vier F.-Geraden a_i, e mit einander zwölf Kegelschnitte. Man kann die Beziehung

beider Gruppen zu einander untersuchen, indem man voraussetzt, dass die E.-Elemente durch die übrigen F.-Elemente harmonisch getrennt sind.

Die Cartesische Specialisierung macht aus der ersten Gruppe die Parabeln

$$y^2 - x = 0, \quad x^2 - y = 0 \quad \text{und die Hyperbel} \quad 1 - xy = 0$$

mit den reellen gemeinsamen Sehnen

$$1 - x = 0, \quad x - y = 0, \quad y - 1 = 0; \quad 1 + x + y = 0.$$

5) Die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = 0$$

in rechtwinkligen Coordinaten stellen resp. eine Curve zweiter Ordnung aus zwei imaginär conjugierten Geraden

$$(x + iy)(x - iy) = 0$$

durch den Anfangspunkt und eine Curve zweiter Classe aus zwei conjugiert imaginären Punkten in der unendlich fernen Geraden

$$(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = 0$$

dar. Weil man hat

$$\eta : \xi = y : x = \pm i,$$

so gehen jene Geraden nach diesen Punkten. Es sind die Geraden, zwischen deren Punkten die Entfernungen Null sind, weil aus

$$x - x' = \pm i(y - y')$$

nothwendig folgt $(x - x')^2 = -(y - y')^2$;

die von allen reellen Punkten unendlich grossen Abstand haben (§ 18, 2), mit sich selbst rechte Winkel und mit anderen Geraden unbestimmte Winkel bilden (§ 18, 3) und deren Paar mit jedem rechtwinkligen Paar aus ihrem reellen Schnittpunkt eine harmonische Gruppe bildet. Denn ein Kreis von beliebigem Mittelpunkt x', y' und Radius r

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2$$

enthält jene Punkte, weil seine Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden durch das Verschwinden der in x, y quadratischen Glieder seiner Gleichung ausgedrückt sind, d. h. durch $x^2 + y^2 = 0$; sie sind also dieselben wie für den Kreis vom Radius Null aus dem Anfangspunkt $x^2 + y^2 = 0$ und die fraglichen Geraden sind als vom Mittelpunkt nach jenen gehend, die Asymptoten des Kreises oder das Paar der Doppelstrahlen seiner rechtwinkligen Durchmesserinvolution (I, §§ 31, 33). Die Gerade ξ, η hat vom Coordinatenanfangspunkt den Abstand r, wenn

$$r^2(\xi^2 + \eta^2) = 1 \qquad \text{ist.}$$

Wir haben jene Punkte als die unendlich fernen imaginären Kreispunkte bezeichnet und wollen sie weiterhin auch kürzer als die absoluten Richtungen und jene Geraden als Gerade von absoluter Richtung benennen.

6) Wenn eine Curve dritter Ordnung durch die drei F.-Punkte gehen soll, so darf ihre Gleichung die Cuben der x_i nicht enthalten; soll A_1 z. B. ein Doppelpunkt in ihr sein, so haben nothwendig auch die Glieder mit $x_1^2 x_2$ und $x_1^2 x_3$ Coefficienten Null. Fordert man, dass auch A_2 ein Doppelpunkt der Curve ist, so verschwinden überdiess $x_2^2 x_3$, $x_2^2 x_1$ und die Gleichung, die im Allgemeinen zehn Glieder enthält, reduciert sich auf die dreigliedrige Form mit $x_3^2 x_1$, $x_3^2 x_2$ und $x_1 x_2 x_3$,

d. h. $$x_3 (a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2) = 0$$

und die Curve besteht also aus der F.-Geraden $A_1 A_2$ und einem durch A_1, A_2, A_3 gehenden Kegelschnitt (vergl. II, § 2, 4); fehlen endlich auch die Glieder mit $x_3^2 x_1$, $x_3^2 x_2$, so ist auch A_3 ein Doppelpunkt, die Curve besteht aber nach der Gleichung $x_1 x_2 x_3 = 0$ aus den drei F.-Geraden.

Wenn A_1 ein Doppelpunkt ist, ohne dass die Curve auch durch A_2, A_3 geht, so müssen die Glieder mit x_1^3, $x_1^2 x_2$, $x_1^2 x_3$ fehlen; und wenn auch noch die beiden Glieder mit $x_3^2 x_1$ und mit $x_2^2 x_1$ die Coefficienten Null haben, so sind die F.-Geraden $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ die Tangenten der Curve im Knotenpunkt A_1 (vergl. II, § 1) und die Gleichung der Curve hat die allgemeine Form $$A x_2^3 + B x_3^3 + C x_2^2 x_3 + D x_2 x_3^2 + E x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Alle Schnittpunkte mit den F.-Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ liegen in A_1.

Unter welchen Bedingungen geht die Curve

$$A x^3 + B y^3 + C x^2 y + D x y^2 + E x y = 0$$

durch die absoluten Richtungen? Man findet, dass die Glieder dritten Grades von der Form $(x^2 + y^2)(x - a y)$ sein müssen.

7) Die Gleichung

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (a_1 x_1 + a_2 x_2) +$$
$$x_3^2 (a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2) = 0$$

stellt eine Curve vierter Ordnung dar, welche je zweimal durch die F.-Punkte A_1, A_2 hindurchgeht. Denn die Substitution von $x_3 = 0$ in die Gleichung der Curve reduciert sie auf das Glied $x_1^2 x_2^2 = 0$, wonach zwei der vier Schnittpunkte nach A_1 und die zwei andern nach A_2 fallen müssen; man sagt, die Curve habe zwei Knotenpunkte in A_1 und A_2. Ihre beiden vom Doppelpunkt A_2 verschiedenen Schnittpunkte mit $x_1 = 0$ sind aus

$$a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0$$

bestimmt; für a_{22} gleich Null fällt noch einer derselben nach A_2, oder dann ist die Gerade A_2A_3 die eine Tangente der Curve im Doppelpunkt A_2. (Vergl. II, § 1.) Dagegen ist mit $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$ die F.-Gerade A_2A_3 eine vom Doppelpunkt A_2 ausgehende die Curve an anderer Stelle berührende Tangente. Endlich wird $x_2 = 0$ eine Wurzel der quadratischen Gleichung für $a_{33} = 0$, die Curve vierter Ordnung geht auch durch A_3 und ihr vierter Schnittpunkt mit A_2A_3 ist durch $a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0$ bestimmt, fällt also wie für $a_{22} = 0$ nach A_2 so für $a_{23} = 0$ auch nach A_3, sodass A_2A_3 die Curve in A_3 berührt; etc. Wenn wird auch A_3 zum Doppelpunkt der Curve?

Sollen zwei Doppelpunkte nicht in den Ecken wohl aber auf einer Seite des F.-Dreiecks liegen, z. B. in x_1, so muss das Resultat der Substitution $x_1 = 0$ in die Gleichung der Curve auf die Form $(ax_2 + bx_3)^2 (a'x_2 + b'x_3)^2 = 0$ kommen; geht die Curve dabei durch A_1, sodass das Glied mit x_1^4 fehlt, so sind die Glieder der Gleichung, welche x_1 enthalten $x_1^3x_2$, $x_1^3x_3$, $x_1^2x_2^2$, $x_1^2x_3^2$, $x_1x_2^3$, $x_1x_3^3$, $x_1x_2^2x_3$ und $x_1x_2x_3^2$. In Cartesischen Coordinaten mit A_1 als Anfangspunkt also x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, x^2y und xy^2; und dazu treten jene Glieder höchster Ordnung $(ax + by)^2 (a'x + b'y)^2$. Sollen die absoluten Richtungen die Doppelpunkte sein, so sind diese Glieder für rechtwinklige Axen gleich $(x + iy)^2 (x - iy)^2$, d. h. $(x^2 + y^2)^2$. Wäre auch der Anfangspunkt A_1 ein Doppelpunkt, so verschwinden ausser dem constanten Glied die Glieder x und y, und wenn die Axen die zugehörigen Tangenten in A_1 sind, die Glieder x^2 und y^2. Schneiden die Axen dann die Curve noch in den Abständen a, b von A_1, so hat die Gleichung der Curve nothwendig die Form

$$(x^2 + y^2)^2 - ax^3 - by^3 + cx^2y + dxy^2 + exy = 0.$$

Mit $b = 0$ berührt $y = 0$ dreifach in A_1, d. h. der Doppelpunkt ist in dem einen Ast zugleich Inflexion und mit $a = 0$ ist er es zugleich in dem andern Ast. (II, § 25, 9.) Sollen dann noch die Winkelhalbierenden der Axen die Curve in reellen vom Anfangspunkt gleich entfernten Punkten schneiden, so müssen c und d verschwinden und e wesentlich negativ sein; eine solche Curve (Lemniscate) stellt also nur die Gleichung dar

$$(x^2 + y^2)^2 = axy,$$

die auch in den Kreispunkten Doppelinflexionsknoten liefert.

8) Wir haben in § 16, 2 die vertauschbare Abhängigkeit der Elemente mit direct reciproken Coordinaten untersucht und bemerken jetzt, dass diese Abhängigkeit uns sofort von Geraden zu Kegelschnitten und von Kegelschnitten zu Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten führt. Wir erläutern diess zuerst an Kegelschnitten und in Punktcoordinaten, bemerken aber, dass die all-

gemeine Entwickelung in Liniencoordinaten die dual entsprechenden Resultate liefert. Den Punkten der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

entsprechen, weil x_i durch $x_j x_k$ zu ersetzen ist, die Punkte des Kegelschnittes durch die F.-Punkte

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0,$$

der E.-Geraden insbesondere der Kegelschnitt von Beisp. 3) — und umgekehrt.

Wir wissen aus § 16,3, dass die Tangenten dieses Kegelschnittes in den F.-Punkten A_1, A_2, A_3 allgemein die Geraden resp.

$$a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0, \quad a_3 x_1 + a_1 x_3 = 0, \quad a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0$$

sind und man sieht sofort, dass ihre Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden F.-Geraden in Uebereinstimmung mit I, § 27,4 auf der Geraden

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

gelegen sind; für den besondern des Beisp. 3) in der E.-Linie.

Jeder Geraden durch einen F.-Punkt entspricht ausser der gegenüberliegenden F.-Geraden eine andere Gerade durch denselben F.-Punkt. (Siehe 9.)

Die sechs Geraden

$$x_2 \pm x_3 = 0, \quad x_3 \pm x_1 = 0, \quad x_1 \pm x_2 = 0$$

und die Schnittpunkte derselben E, E_1, E_2, E_3 (§ 16,3) entsprechen sich selbst und jene überdies $x_1 = 0$, etc. resp. einer F.-Geraden; jeder Geraden durch einen dieser Punkte entspricht ein Kegelschnitt, der auch durch ihn geht. Sind insbesondere die E die Mittelpunkte der die F.-Geraden berührenden Kreise, so sind die Strahlenpaare aus den F.-Punkten nach entsprechenden Punkten symmetrisch zu den Strahlen von denselben nach den E und zwei entsprechende Punkte daher die reellen Brennpunkte eines dem F.-Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes; die Verbindungslinie derselben die Hauptaxe dieses Kegelschnittes. Die Wahl des einen Brennpunktes in einem Punkt E bringt auch den andern dahin und macht den bezüglichen Kegelschnitt zum Kreis.

Zwei verschiedenen Geraden a_i und b_i entsprechen die Kegelschnitte

$$a_1 x_2 x_3 + \ldots = 0, \quad b_1 x_2 x_3 + \ldots = 0,$$

deren vierter gemeinsamer Punkt aus dem Schnittpunkt der Geraden als der der reciproken Coordinaten sofort construiert werden kann.

Construiert man den Kegelschnitt, der der unendlich fernen Geraden entspricht, so liefert jede Gerade, die ihn reell schneidet, als den Ort der Punkte von reciproken Coordinaten eine Hyperbel; jede berührende eine Parabel, jede nicht treffende eine Ellipse.

Für Flächen- und Dreipunkt-Coordinaten (§ 15) ist die unendlich ferne Gerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und die ihr entsprechende Ellipse K_u oder $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ (die Asymptotenrichtungen derselben liefert die Gleichung $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$); die Tangenten in den F.-Punkten sind den gegenüberliegenden F.-Geraden parallel, der Einheitpunkt ist also ihr Mittelpunkt.

9) Dem Kegelschnitt — wir unterdrücken die durch cyklische Indicesverschiebung aus den gegebenen entspringenden Glieder —

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots = 0$$

entspricht die Curve vierter Ordnung

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + \ldots + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + \ldots = 0,$$

die in den F.-Punkten Doppelpunkte hat. Weil der Kegelschnitt die F.-Gerade A_2A_3 in den Punkten aus

$$a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

schneidet, so wird die zugehörige Curve vierter Ordnung in A_1 von den beiden Geraden berührt, deren Gleichung ist

$$a_{22}x_3^2 + a_{33}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Ihre vierten Schnittpunkte mit der Curve liegen auch auf dem Kegelschnitt $a_{11}x_2x_3 + 2a_{12}x_3x_1 + 2a_{13}x_1x_2 = 0$. Sie selbst sind für 1, 1* als die der F.-Geraden A_2A_3 angehörigen Punkte des Kegelschnittes die zu $A_1 1$, $A_1 1^*$ entsprechenden Strahlen in der Involution, welche die Geraden $A_1E E_1$, $A_1E_2E_3$ zu Doppelstrahlen hat; also auch insbesondere mit jenen zugleich reell, vereinigt und conjugiert imaginär. Wenn also der gegebene Kegelschnitt die F.-Geraden sämmtlich schneidet, oder berührt, resp. nicht trifft, so hat die entsprechende Curve vierter Ordnung in allen F.-Punkten Knoten, Rückkehrpunkte resp. isolierte Punkte; schneidet jener eine F.-Gerade, berührt die zweite und trifft die dritte nicht reell, so hat die Curve vierter Ordnung einen Knoten, eine Spitze und einen isolierten Punkt in den F.-Punkten; etc. Je nachdem der gegebene Kegelschnitt den Kegelschnitt K_u in vier oder zwei Punkten oder in keinem Punkt reell trifft, hat die entsprechende Curve vierter Ordnung vier oder zwei oder keine reellen Asymptoten; Doppelberührung, Osculation und vierpunktige Berührung zwischen jenen Kegelschnitten ruft zwei parabolische Aeste, resp. Inflexion oder Undulation mit der unendlich fernen Geraden in der Curve hervor. (Vergl. II, § 24, *16b, p. XXXI.)

10) Wenn die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes nur die Quadrate der Veränderlichen enthält, also die Form hat

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0,$$

sodass seine Punkte sich in Vierergruppen

(y_1, y_2, y_3), $(-y_1, y_2, y_3)$, $(y_1, -y_2, y_3)$, $(y_1, y_2, -y_3)$

ordnen, die die F.-Punkte zu ihren gemeinsamen Diagonalpunkten haben (§ 16), so wird die entsprechende Curve vierter Ordnung

$$a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 = 0$$

die entsprechenden gleichartigen Vierergruppen enthalten. Weil jener mit den F.-Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 die Schnittpunktpaare

$$a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \quad a_3 x_3^2 + a_1 x_1^2 = 0, \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0$$

gemein hat, von denen nach I, § 32, 12 nur zwei reell sind, so sind die Tangentenpaare der zugehörigen Curve vierter Ordnung in A_1, A_2, A_3 resp. ausgedrückt durch

$$a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 = 0, \quad a_3 x_1^2 x_2^2 + a_1 x_2^2 x_3^2 = 0,$$
$$a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 = 0$$

(die Factoren x_1^2, x_2^2, x_3^2 resp. sind verständlich nach dem Vorigen) und auch von ihnen sind nur zwei reell. Aber ihre Gleichungen zeigen, dass sie mit der Curve vierter Ordnung der Reihe nach nur die Elemente gemein haben, welche durch sie selbst und resp.

$$a_1 x_2^2 x_3^2 = 0, \quad a_2 x_3^2 x_1^2 = 0, \quad a_3 x_1^2 x_2^2 = 0$$

bestimmt werden; d. h. die Tangenten in den Doppelpunkten treffen die Curve nur in diesen oder die Doppelpunkte sind Doppelinflexionsknoten; und von den drei Doppelinflexionsknoten einer reellen Curve vierter Ordnung ist nothwendig einer isoliert. Wir haben in den Doppelcurven der Tangentenfläche der Durchdringungscurve aus Kegeln zweiten Grades solche Curven kennen gelernt. (II, § 25, 9.) Für $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ sind die reellen Tangentenpaare aus den F.-Punkten $x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_3^2 - x_1^2 = 0$ und entsprechen sich selbst als Paare der Inflexionstangenten in den reellen Knoten.

11) Auf dieselbe Weise entspricht einer Curve n^{ter} Ordnung, die nicht durch einen der F.-Punkte geht, eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, die in denselben $n$fache Punkte hat. Beide schneiden einander in $2n^2$ Punkten, die einander paarweis entsprechen müssen und somit n^2 Verbindungsgerade liefern, welche doppelt zu zählen sind in dem System von Geraden, welches durch Verbindung der Punkte der Originalcurve mit den zugehörigen Punkten der entsprechenden oder Bildcurve entsteht. Die von demselben System umhüllte Curve ist von der Classe $3n$, d. h. es gehen $3n$ Tangenten derselben durch jeden Punkt ihrer Ebene; sie hat also jene n^2 Geraden zu Doppeltangenten. Jenes folgt aus der Natur des Büschels von Geraden, welche diesen beliebigen Punkt mit den Paaren entsprechender Punkte verbinden, wonach jedem nach Punkten des

Originals gehenden Strahl n Strahlen nach den entsprechenden Bildpunkten und umgekehrt jedem nach Punkten des Bildes gehenden Strahl $2n$ Strahlen nach den entsprechenden Originalpunkten zugeordnet sind, sodass es, wie wir in § 40 sehen werden, $3n$ mal vorkommen muss, dass ein Strahl des Büschels der Verbindungsstrahl von zwei entsprechenden Punkten ist. So entsteht aus den Verbindungsgeraden der Punkte der Originalgeraden mit den entsprechenden Punkten im Bildkegelschnitt eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente in der Geraden, und offenbar mit den Punkten, in denen jene diesen trifft, als Berührungspunkten. Ist die betrachtete Gerade die unendlich ferne und entspricht ihr der umgeschriebene Kreis des F.-Dreiecks, wie dies für E als den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises eintritt, so berührt die unendlich ferne Gerade die Enveloppe in den imaginären Kreispunkten; und dieselbe wird von den Axen aller der Parabeln umhüllt, die dem F.-Dreieck eingeschrieben werden können; denn der umgeschriebene Kreis ist offenbar der Ort der Brennpunkte der eingeschriebenen Parabeln, wie wir auch aus I, § 36, 13 wissen. Die Sätze a. a. O. führen zu andern merkwürdigen Erzeugungen der betrachteten Enveloppe.

12) Den Tangenten der Originalcurve entsprechen Kegelschnitte durch die F.-Punkte, die die Bildcurve in dem zum Berührungspunkt dort entsprechenden Punkte berühren; den $(n-2)$ Schnittpunkten der Tangente mit der Curve n^{ter} Ordnung entsprechen die $(n-2)$ Schnittpunkte des entsprechenden Kegelschnittes mit der Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung ausser dem Berührungspunkt und den $3n$ in die F.-Punkte fallenden gemeinsamen Punkten. Sollen diese Kegelschnitte durch feste Punkte im Unendlichen gehen, so müssen die entsprechenden Tangenten des Originals durch die Punkte des der unendlich fernen Geraden entsprechenden Kegelschnittes gehen, die zu jenen als Bilder gehören; etc.

13) Geht der Kegelschnitt durch eine Ecke des F.-Dreiecks, etwa A_1, so zerfällt die entsprechende Curve vierter Ordnung in die gegenüberliegende F.-Gerade $A_2 A_3$ und eine Curve dritter Ordnung

$$a_{22} x_1 x_3^2 + a_{33} x_1 x_2^2 + 2 a_{23} x_1 x_2 x_3 + 2 a_{31} x_2^2 x_3 + 2 a_{12} x_2 x_3^2 = 0,$$

welche durch A_2, A_3 einfach geht und A_1 zum Doppelpunkt hat. Geht der Kegelschnitt durch zwei F.-Punkte, so besteht die Curve vierter Ordnung aus den gegenüberliegenden F.-Geraden und einem Kegelschnitt durch jene F.-Punkte; einem Kegelschnitt durch alle drei F.-Punkte entspricht ausser den F.-Geraden die Gerade, deren Gleichung dieselben Coefficienten hat. Die construierende Durch- und Weiterführung alles dessen ist sehr zu empfehlen und ohne Schwierigkeit; ebenso die dualistische Uebertragung und die in das Bündel.

Betrachtet man die Strahlen eines Büschels in der F.-Ebene, so entsprechen ihnen die Kegelschnitte eines Büschels durch die

F.-Punkte und den entsprechenden seines Scheitels und es liegt nahe, nach dem Ort der Schnittpunkte jener Strahlen mit ihren entsprechenden Kegelschnitten zu fragen; etc. (Vergl. § 49.)

14) In dem besondern Fall der regulären projectivischen Coordinaten (§ 18, 6) entspricht der unendlich fernen Geraden nach der Construction der dem F.-Dreieck umgeschriebene Kreis; da die Gleichung von jener in diesem Fall

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

ist, so folgt für diesen die Gleichung

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$$

und man leitet daraus für die regulären Coordinaten ihrer Schnittpunkte, der absoluten Richtungen oder imaginären Kreispunkte die Werthe ab — die oberen Zeichen für den einen und die unteren für den andern —

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} : \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = 1 : \omega : \omega^2$$

und

$$= 1 : \omega^2 : \omega$$

resp. für ω als eine imaginäre Cubikwurzel aus Eins. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a_{11} x_1^2 + \ldots + 2 a_{23} x_2 x_3 + \ldots = 0$$

stellt einen durch diese Punkte gehenden Kegelschnitt nur dann dar, wenn ihre Coefficienten die Relationen erfüllen

$$a_{22} + a_{33} - 2a_{23} = a_{33} + a_{11} - 2a_{13} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}.$$

Und da jeder Kegelschnitt, der diese Punkte enthält, ein Kreis ist, so lässt sich die Gleichung jedes Kreises in der Form schreiben

$$(a_1 x_1 + \ldots)(x_1 + \ldots) + k(x_2 x_3 + \ldots) = 0,$$

welche für die gleichzeitigen Relationen

$$x_1 + \ldots = 0, \quad x_2 x_3 + \ldots = 0$$

immer befriedigt wird. (Wir bemerken, dass im Fall allgemeiner projectivischer Coordinaten die Factoren sin A_i zu den Gliedern x_i und resp. $x_j x_k$ hinzutreten. Dann ist offenbar $a_1 x_1 + \ldots = 0$ die im Endlichen liegende gemeinsame Sehne (Radicalaxe) mit dem umgeschriebenen Kreis und für zwei verschiedene Kreise

$$(a_1 x_1 + \ldots)(x_1 + \ldots) + k(x_2 x_3 + \ldots) = 0$$

und

$$(b_1 x_1 + \ldots)(x_1 + \ldots) + k(x_2 x_3 + \ldots) = 0$$

wird die Radicalaxe durch

$$(a_1 x_1 + \ldots) - (b_1 x_1 + \ldots) = 0$$

ausgedrückt; natürlich durch den Schnittpunkt der Radicalaxen beider Kreise mit dem umgeschriebenen Kreis hindurchgehend. Insbesondere ist $a_1 x_1^2 + \ldots = 0$ ein Kreis für $a_1 = a_2 = a_3$. Man sieht auch, dass die absoluten Richtungen einander nach reciproken Coordinaten entsprechen und gelangt leicht zu den Eigenschaften der am Schluss von 11) hervorgehobenen Curve dritter Classe.

15) Bei der Transformation der Inversion oder der reciproken Radien (vergl. II, p. 534) entspricht dem Punkt von den rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y der Punkt x', y' mit

$$x = \frac{px'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{py'}{x'^2 + y'^2};$$

man sieht damit, dass auch sie involutorisch ist. Es entspricht dem Kreis

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

der Kreis

$$c(x^2 + y^2) - 2p(ax + by) + p^2 = 0$$

und die absoluten Richtungen sich selbst; dem Kegelschnitt

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0$$

die Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den imaginären Kreispunkten im Unendlichen

$$c(x^2+y^2)^2+2p(x^2+y^2)(fy+gx)+p^2(ax^2+2hxy+by^2)=0,$$

welche sich beim Durchgang des Kegelschnittes durch den Anfangs- und Nullpunkt der reciproken Radien auf eine Curve dritter Ordnung durch die Kreispunkte reduciert. Insbesondere der gleichseitigen Hyperbel $xy = a^2$ die Curve vierter Ordnung (vergl. 7, Lemniscate)

$$p^2 xy = a^2(x^2 + y^2)^2$$

und der Parabel $y^2 = ax$ die Curve dritter Ordnung

$$py^2 = ax(x^2 + y^2).$$

16) Wir kennen aber aus § 15, 6 auch eine Beziehung, nach welcher jedem Punkt eine Gerade und jeder Geraden als Element ein Punkt in Bezug auf das F.-Dreieck entspricht; nämlich nach dem Zusammenhang der harmonischen Trennung oder der Harmonikale des Punktes in Bezug auf dasselbe. Dieselbe hat überdiess mit den Elementenpaaren von reciproken Coordinaten den engsten Zusammenhang, oder sie ist mit ihr identisch, wenn man nur die Coordinaten des gegebenen Elementes als Punktcoordinaten und die des abgeleiteten als Liniencoordinaten oder umgekehrt interpretiert. Denn die Ecktransversalen eines Punktes y_i bestimmen in den F.-Geraden Punkte, deren Verbindungslinien mit der jeweiligen dritten F.-Geraden einen Punkt bestimmen, für dessen Coordinaten

$x_i y_j y_k + x_j y_k y_i = 0$ ist, und diese drei Punkte liegen also in der Geraden

$$x_1 y_2 y_3 + x_2 y_3 y_1 + x_3 y_1 y_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0.$$

Man schliesst daraus, dass die Harmonikalen der Punkte einer geraden Reihe wie die Geraden von reciproken Coordinaten zu den Strahlen eines Büschels einen Kegelschnitt umhüllen, der dem F.-Dreieck eingeschrieben ist; und man sieht aus der Construction, dass den in den F.-Geraden gelegenen Punkten der Reihe diese Geraden selbst als Harmonikalen entsprechen. Man bildet auch die Gleichung dieses Kegelschnittes durch Elimination der y_i zwischen den homogenen Gleichungen

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0 \text{ und } y_2 y_3 x_1 + y_3 y_1 x_2 + y_1 y_2 x_3 = 0$$

in der aus 28, 3) bekannten Form

$$a_1^2 x_1^2 + \cdots - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - \cdots = 0.$$

Die Berührungspunkte mit den F.-Geraden sind die harmonisch conjugierten zu den Schnittpunkten der Reihe in Bezug auf ihre F.-Punkte. Und dual entspringen aus den Strahlen eines Büschels als den Harmonikalen die zugehörigen Punkte als die Punkte eines dem F.-Dreieck umgeschriebenen Kegelschnittes, insbesondere für jeden Strahl durch einen F.-Punkt dieser selbst; der Kegelschnitt hat zu Tangenten in den F.-Punkten die harmonisch conjugierten jener Strahlen in Bezug auf die betreffenden F.-Geraden. So wie jene durch ihre Gegenseitenschnitte als Verbindungslinie die Polare vom Scheitel des Strahlbüschels im Kegelschnitt.

Die Erläuterung der entsprechenden Constructionen und Sätze für die besonderen Fälle der regulären projectivischen, sodann der Streifencoordinaten und der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten ist nützlich. Aus der Gleichung der Harmonikale zu y_i folgt, dass der Punkt von reciproken Coordinaten resp. von bestimmten Vielfachen derselben (§§ 16, 2; 21, 6) in ihr liegt, wenn die Coordinaten die Bedingung

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 0 \quad \text{resp.} \quad a_1 x_2^2 x_3^2 + \cdots = 0$$

erfüllen. (Vergl. 10.)

29. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den vier x_i ist die Gleichung einer krummen Fläche n^{ter} Ordnung; sie kann als Gleichung mit drei Unbekannten betrachtet werden und es entsprechen ihr also eine zweifach unendliche Menge von Werthcombinationen derselben, d. h. geometrisch eine zweifach unendliche Menge von Punkten. Wir

denken sie coexistierend mit der Gleichung einer Ebene d. i. der in den x_i linearen Gleichung; substituieren wir aus dieser für die eine der x_i ihren Werth in Function der drei andern, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen x_i, d. h. der Ort der Punkte, die die Ebene und der geometrische Repräsentant der Gleichung mit vier Veränderlichen gemein haben, ist eine Curve n^{ter} Ordnung. Wir erhalten die Fläche selbst als Ort solcher Curven, wenn wir die Ebene um eine gerade Linie z. B. vereinfachend um eine Kante des Fundamentaltetraeders drehen, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den vier ξ_i ist die Gleichung einer krummen Fläche n^{ter} Classe; als Gleichung mit drei Unbekannten betrachtet, repräsentiert sie eine zweifach unendliche Menge von Ebenen; mit einer in den ξ_i linearen Gleichung verbunden bestimmt sie die Gesammtheit derjenigen Ebenen, die den dieser linearen Gleichung entsprechenden Punkt enthalten und zugleich dem geometrischen Repräsentanten jener Gleichung angehören; die aus beiden durch Combination hervorgehende Gleichung ist aber homogen in den drei übrig bleibenden ξ_i und daher die Gleichung einer Kegelfläche n^{ter} Classe, die Gleichung des Kegels der Tangentialebenen, die von dem gegebenen Punkt an die fragliche Fläche gehen.

Somit wird auch eine Fläche n^{ter} Ordnung von einer Geraden in n reellen oder in Paaren complex conjugierten Punkten geschnitten und insbesondere eine Fläche von ungerader Ordnungszahl in mindestens einem reellen Punkt, sodass sie nicht imaginär sein kann, wie das bei einer solchen von gerader Ordnung möglich ist. Und eine Fläche n^{ter} Classe hat mit einer Geraden n reelle oder in Paaren complex conjugierte Ebenen gemein, bei ungerader Classenzahl somit wieder mindestens eine reelle. Insbesondere gilt das auch für jede Tangente einer solchen Fläche, bei Flächen mit ungeraden $n > 4$ auch für jede zweifache Tangente und bei ungeraden $n > 6$ für jede dreifache Tangente der Fläche.

Und wenn eine Gerade mehr als n Punkte mit einer Fläche n^{ter} Ordnung resp. mehr als n Tangentialebenen mit einer Fläche n^{ter} Classe gemein hat, so müssen derselben alle ihre

Punkte resp. Ebenen angehören, d. h. sie muss in ihr liegen. Denn die dieselben definierende Gleichung muss unbestimmt sein, d. h. unendlich viele Lösungen haben.

Durch die Coexistenz von zwei auf dieselben F.-Elemente bezogenen Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen x_i werden die gemeinschaftlichen Punkte von zwei Oberflächen d. i. wird ihre Durchdringungscurve dargestellt. Dagegen repräsentieren zwei Gleichungen zwischen den Veränderlichen ξ_i die Gesammtheit der gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen d. h. ihre gemeinsam umgeschriebene Developpable. Jene hat offenbar das Product der Grade der beiden Gleichungen zur Ordnungszahl, diese zur Classenzahl (Bd. II, § 44); denn die Combination der beiden Gleichungen mit einer linearen homogenen Gleichung mit vier Veränderlichen führt nach den Regeln der Algebra auf eine Gruppe von gemeinsamen Wurzelwerthen in dieser Anzahl, d. h. die Durchdringungscurve wird von einer Ebene in so vielen reellen oder in Paaren complex conjugierten Punkten geschnitten, als das Product der Ordnungszahlen der Flächen besagt; und die gemeinsame Developpable hat mit einem Punkt so viele reelle oder in Paaren complex conjugierte Tangentialebenen gemein, als das Product der Classenzahlen der Flächen ausspricht. Im ersten Fall liegen die complex conjugierten Punktepaare nach § 9 in ebenso vielen reellen Geraden der Ebene, welche imaginär schneidende Bisekanten der Curve sind; im zweiten gehen die complex conjugierten Paare der gefundenen Ebenen durch ebenso viele reelle Geraden des Punktes, die als imaginär berührende Doppeltangenten der developpabeln Fläche bezeichnet werden müssen. Bei Curven ungerader Ordnung ist wenigstens einer der Schnittpunkte reell und analog bei Developpabeln von ungerader Classe wenigstens eine der Tangentialebenen. Wenn die Ebene die Curve berührt, also eine ihrer Tangenten enthält, so schneidet sie dieselbe bei ungerader Ordnungszahl mindestens noch einmal reell und von einem Punkt der Developpabeln geht bei ungerader Classenzahl ausser der doppelt zählenden eigenen wenigstens eine reelle Tangentialebene an sie. Dagegen braucht eine Schmiegungsebene der Curve dieselbe bei ungerader Ordnungszahl nicht weiter reell zu schneiden, während sie dies bei gerader Ordnungszahl mindestens einmal

thun muss; mit analogen Ergebnissen für die Tangentialebenen der Developpabeln aus einem Punkt ihrer Rückkehrcurve. Curven von geraden Ordnungen und resp. Developpable von gerader Classe können daher auch ganz imaginär sein, solche von ungeraden nicht. Wir haben Beispiele dafür an den gemeinsamen Curven und Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades, wie leicht näher auszuführen ist. Dieselben führen aber zugleich auf ein anderes.

Denn wir bemerken, dass Durchdringungscurven von Primzahl (also auch ungeraden) -Ordnungen resp. -Classen hiernach zunächst gar nicht anders als in der Form von ebenen Querschnitten resp. Tangentialkegeln entsprechender Ordnungs- und Classen-Flächen erzeugbar scheinen; und sehen an jenem Beispiel, dass sie als partielle Durchdringungen resp. partielle gemeinsame Developpable entstehen: die Flächen zweiten Grades können eine Gerade als Punktreihe und zugleich als Ebenenbüschel gemein haben und die gemeinsamen Punkte resp. Tangentialebenen derselben, die ihr nicht angehören, bilden dann eine Restdurchdringung dritter Ordnung und eine Restdeveloppable dritter Classe. In solchem Fall kann die Curve etc. durch zwei Gleichungen zwischen den x_i, resp. ξ_i nicht dargestellt werden, sondern es ist zur Aussonderung des einen Theils die Hinzufügung von mindestens einer dritten Gleichung erforderlich, welcher zwar der eine aber nicht der andere Theil entspricht. Es ist evident, dass solche drei Gleichungen nicht unabhängig von einander sein können und man hat sie daher als beschränkte Systeme von Gleichungen bezeichnet; sie stellen z. B. drei Flächen zweiten Grades dar, welche dieselbe Curve dritter Ordnung enthalten, sich aber in Paaren in drei verschiedenen Bisekanten derselben schneiden.

Drei von einander unabhängige auf dasselbe F.-System bezogene Gleichungen zwischen den vier x_i repräsentieren die Gruppe der gemeinsamen Punkte von drei Flächen; drei solche Gleichungen zwischen den vier ξ_i die Gruppe der gemeinsamen Tangentialebenen solcher Flächen; ihre Anzahl ist hier wie dort dem Product der drei Grade gleich. Sind zwei von den Gleichungen linear, so ist diese Zahl die Ordnung resp. Classe der Fläche; ist es eine, so wird sie zur

Ordnung der gemeinsamen Curve resp. zur Classe der gemeinsamen Developpablen der durch die zwei andern repräsentierten Flächen.

Wir wollen nun auch sagen — denn die vollständige Ausführung dessen versagen wir uns — dass eine Curve resp. Developpable von der Ordnung resp. Classe m mit einer Fläche von der Ordnung oder Classe n gemeinsame Punkte resp. Tangentialebenen in der Zahl mn besitze und dass sie der Fläche ganz angehören muss, wenn sie mehr als diese Zahl von Punkten oder Ebenen mit derselben gemein hat.

1) Eine Fläche zweiter Ordnung und resp. zweiter Classe im Raum des F.-Systems A_i, E hat eine Gleichung von der Form

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots = 0,$$
$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots + 2\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots = 0.$$

Schneidet man die erste mit einer die F.-Gerade A_3A_4 enthaltenden Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ oder $x_2 = mx_1$, so giebt die Verbindung der beiden Gleichungen in

$$x_1^2(a_{11} + a_{22}m^2 + 2a_{12}m) + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}mx_1x_3$$
$$+ 2a_{34}x_3x_4 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{24}mx_1x_4 = 0$$

den Ausdruck des projicierenden Kegels der Querschnittcurve aus A_2 und den Ausdruck ihrer Projection von da auf die Ebene $A_1A_3A_4$.

Die Schnittpunkte der Fläche mit der F.-Geraden A_1A_2 sind wegen $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ durch die quadratische Gleichung bestimmt

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0;$$

sie fallen in die F.-Punkte A_1, A_2 für $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$ und fallen zusammen, wenn zwischen den Coefficienten die Relation $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ besteht. Wenn geht die Fläche durch drei resp. alle F.-Punkte und wenn berührt die Fläche alle sechs Kanten des F.-Tetraeders?

Man mache die dualen Entwickelungen für die Flächen zweiter Classe.

2) Die Fläche zweiter Classe berührt die F.-Ebene $\mathbf{A}_i$ oder $A_jA_kA_h$, wenn das Glied mit ξ_i^2 in ihrer Gleichung fehlt; sie berührt also die vier F.-Ebenen, wenn ihre Gleichung ist

$$\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots = 0.$$

Dual entsprechend die Fläche zweiter Ordnung.

Wenn die α_{ik} in der vorigen Gleichung alle gleich gross oder gleich Eins sind, und die Ebene von den Coordinaten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ der zugehörigen Fläche angehört, so thun diess auch die Ebenen

$(\beta\gamma\delta\alpha)$, $(\gamma\delta\alpha\beta)$, $(\delta\alpha\beta\gamma)$; ebenso $(\alpha\beta\delta\gamma)$, etc.; $(\alpha\gamma\beta\delta)$, etc.; $(\alpha\gamma\delta\beta)$, etc.; $(\alpha\delta\beta\gamma)$, etc. und $(\alpha\delta\gamma\beta)$, etc. oder die sechsmal vier Ebenen der permutierten Coordinaten (§ 21) gehören zur nämlichen Fläche.

Für die weiterhin zu betrachtende Gleichung, die nur die Quadrate der Veränderlichen enthält, gilt Analoges, wenn die Coefficienten sämmtlich Eins sind; daher ebenso im entsprechenden Fall der allgemeinen Gleichung.

Kann auch ein zu § 28, 2 entsprechender Satz für die Quadrupel der Schnittpunkte solcher Ebenensysteme gebildet werden?

3) Wenn die Fläche zweiter Ordnung die F.-Gerade $A_1 A_4$ ganz enthalten soll, so wird sie von den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$ nothwendig in geraden Linien ausser ihr geschnitten, sagen wir etwa in

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_4 x_4 = 0, \quad d_1 x_1 + d_3 x_3 + d_4 x_4 = 0$$

und die Gleichung der Fläche kann weder x_1^2 noch x_4^2 noch auch $x_1 x_4$ enthalten.

Alle Punkte der Geraden $A_1 A_4$ und alle Ebenen durch dieselbe gehören der Fläche an (vergl. II, § 30), sie ist eine Regelfläche zweiten Grades oder ein einfaches Hyperboloid. Soll sie auch die Gerade $A_2 A_3$ enthalten, so fehlen auch die Glieder mit x_2^2, x_3^2, $x_2 x_3$ in ihrer Gleichung, die also die Form hat

$$a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{34} x_3 x_4 + a_{24} x_2 x_4 = 0.$$

Von den vier übrigen F.-Geraden würde die Fläche $A_1 A_2$ enthalten, wenn $a_{12} = 0$ wäre, und $A_3 A_4$, wenn $a_{34} = 0$; sie enthält dann das windschiefe Vierseit $A_1 A_2 A_3 A_4$ und ihre Gleichung ist

$$a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0.$$

Sollte sie zu $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $A_1 A_2$ noch $A_1 A_3$ oder $A_2 A_4$ enthalten, so müsste entweder a_{13} oder a_{24} verschwinden und die Gleichung wäre $x_4 (a_{34} x_3 + a_{24} x_2) = 0$ oder $x_3 (a_{13} x_1 + a_{34} x_4) = 0$,

und die Fläche ein Ebenenpaar, wie es geometrisch evident ist.

Zwei einfache Hyperboloide durch dasselbe Vierseit

$$a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4 = 0, \quad b_{13} x_1 x_3 + b_{24} x_2 x_4 = 0$$

haben dasselbe zur gemeinsamen Curve und Developpabeln (vergl. II, § 36, 13), sie bestimmen zugleich ein Büschel und eine Schaar solcher Flächen; durch jeden Punkt und an jede Ebene geht eine Fläche derselben, die die Transversalen der Gegenseitenpaare des windschiefen Vierseits aus dem Punkt resp. in der Ebene enthält. Das den E.-Punkt enthaltende ist $x_1 x_3 = x_2 x_4$ und das die E.-Ebene berührende, wie leicht zu sehen, $\xi_1 \xi_3 = \xi_2 \xi_4$.

Das F.-Tetraeder bestimmt mit dem E.-Punkt drei solche

Flächen, nämlich zu dem Vorigen die zwei von den Gleichungen

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 \quad \text{und} \quad x_1 x_4 = x_2 x_3$$

durch die windschiefen Vierseite $A_1 A_3 A_2 A_4$ und $A_1 A_2 A_4 A_3$ resp. Je zwei dieser drei Hyperboloide haben zwei F.-Gerade mit einander gemein, die zwei letzten z. B. $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; sie haben daher noch zwei andere windschiefe Gerade gemein (vergl. II, § 38, 10), von denen wir uns leicht Rechenschaft geben können. Die beiden letzten Hyperboloide enthalten ausser dem Punkt E oder $(1, 1, 1, 1)$ auch den Punkt $E^{(13)}$ oder $(-1, 1, -1, 1)$ und daher auch die Transversalen aus beiden zu den gemeinsamen F.-Geraden $A_1 A_3$, $A_2 A_4$. Das erste und zweite enthalten E und $E^{(14)}$ oder $(-1, 1, 1, -1)$, die F.-Geraden $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ und ihre Transversalen aus jenen; das erste und dritte E und $E^{(12)}$ oder $(-1, -1, 1, 1)$ und $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ und ihre Transversalen aus jenen, was alles die Verbindung ihrer Gleichungen leicht bestätigt. Man discutiere in analoger Weise die einfachen Hyperboloide

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0, \quad x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0, \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

nach ihren Beziehungen zu den Punkten $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, $E^{(4)}$ und den zugehörigen Transversalenpaaren und vergleiche die Resultate mit § 21, 1 und mit I, § 58, 9f.

Auch entwickele und untersuche man die entsprechenden Gleichungen in Ebenencoordinaten und die Beziehungen der zugehörigen Flächen zur E.-Ebene $\mathfrak{E}$ und den sieben Ebenen ihrer Gruppe.

4) Wenn in der Gleichung der Fläche zweiten Grades nur die Quadrate der Veränderlichen vorkommen, so enthält dieselbe alle acht Punkte einer Gruppe mit gleichen numerischen Werthen der Coordinaten, wenn sie einen derselben enthält; d. h. liegt der Punkt (y_1, y_2, y_3, y_4) in der Fläche

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

so auch $Y^{(1)}$ oder $(-y_1, y_2, y_3, y_4)$, ebenso $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$ und $Y^{(4)}$, sodann $Y^{(12)}$ oder $(-y_1, -y_2, y_3, y_4)$ und ebenso $Y^{(13)}$, $Y^{(24)}$ — eine Achtergruppe mit den F.-Punkten als Diagonalpunkten. Man sieht sofort, dass die Punkte einer solchen Gruppe in Paaren in eine F.-Ebene zusammenfallen, wenn eine der Coordinaten Null ist und dass sie bei zwei verschwindenden Coordinaten zu vier in zwei Punkten einer F.-Geraden sich vereinigen, und dass die Tangentialebenen in einer Gruppe der ersten Art nach dem gegenüberliegenden F.-Punkt, in einer Gruppe der zweiten Art nach der gegenüberliegenden F.-Geraden gehen. Jeder F.-Punkt ist der Pol der gegenüberliegenden F.-Ebene in Bezug auf die Fläche nach II, § 39, § 45 und die gegenüberliegenden Paare von F.-Geraden sind einander in Bezug auf dieselbe polar-conjugiert. Von den

F.-Ebenen schneiden drei die Fläche reell, wenn sie elliptisch und alle schneiden sie reell, wenn sie hyperbolisch ist, wie wir noch weiterhin genauer erörtern werden.

5) Die Specialisierungen in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten sind in allen vorhergehenden Fällen leicht durchzuführen. Sie geben in 3) z. B. die hyperbolischen Paraboloide $y = \pm zx$, $z = \pm xy$, $x = \pm yz$, $\eta = \pm \zeta\xi$, etc. mit den E.-Elementen. Für die allgemeine Gleichung der Fläche zweiten Grades in Cartesischen Coordinaten

$$a_{11} + a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + a_{44}z^2 + 2a_{12}x + 2a_{13}y + 2a_{14}z + 2a_{23}xy + 2a_{24}xz + 2a_{34}yz = 0$$

ergiebt sich als Gleichung des Querschnittes mit der unendlich fernen Ebene oder als Gleichung des über ihm am Scheitel A_1 entstehenden Kegels

$$a_{22}x^2 + \ldots + 2a_{23}xy + 2a_{24}xz + 2a_{34}yz = 0.$$

Aus der Gleichung in 4) und unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten erhält man die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung der Fläche zweiten Grades (II, §§ 40, 6; 45, 18) in der Form

$$a_{11} + a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + a_{44}z^2 = 0;$$

unter Weglassung von a_{11} die ihres Asymptotenkegels; mit

$$-a_{11} : a_{22}, \quad -a_{11} : a_{33}, \quad -a_{11} : a_{44}$$

als den Quadraten der in x, y, z resp. liegenden Halbaxenlängen. Insbesondere ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Kugel aus A_1 vom Radius r; weil auch die Enveloppe der um r von A_1 entfernten Ebenen durch

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{r^2}$$

ausgedrückt wird. Ihr Querschnitt mit der unendlich fernen Ebene (oder ihr Asymptotenkegel) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$; also derselbe für alle Kugeln

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

weil die in x, y, z quadratischen Glieder die nämlichen sind. Es ist der unendlich ferne imaginäre Kreis, der Ort aller absoluten Richtungen des Raumes und wie wir auch sagen können, die Enveloppe aller absoluten Stellungen; für jede seiner Berührungsebenen ist wegen $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$

die Distanz von jedem reellen Punkt unendlich gross; und sind

J, J^* zwei Punkte jenes Kreises und P ein reeller Punkt des Raumes, so ist der Winkel JPJ^* unbestimmt, weil die Querschnitte der Ebene JPJ^* mit allen durch P gehenden Kugeln ihn als Peripheriewinkel über JJ^* enthalten, sodass sein Maass mit dem Radius der Kugel sich ändert; analog für einen Punkt J jenes Kreises und zwei Punkte P_1, P_2 im Endlichen bezüglich des Winkels JP_1P_2, etc.

6) Man bilde und untersuche die Gleichung des einfachen Hyperboloids von zweimal vier Geraden beider Regelschaaren aus dem Zeichenwechsel der Strahlencoordinaten in § 25, 4, wo die vier Durchstosspunkte in jeder Coordinatenebene Gruppen von numerisch gleichen Coordinaten bilden.

Wenn ein Hyperboloid durch drei windschiefe Gerade g_1, g_2, g_3 bestimmt ist wie in II, § 35, 2. 3 f., sodass die drei Paare paralleler Ebenen G_{23}, G_{32}; G_{31}, G_{13}; G_{12}, G_{21} — nach der Bezeichnung G_{ik} als die Ebene durch g_i und parallel zu g_k — das zugehörige Parallelepiped mit den parallelen l_i als G_{21}, G_{31}; G_{32}, G_{12}; G_{13}, G_{23} bilden, welches mit der Fläche denselben Mittelpunkt hat, so wird seine Gleichung in Cartesischen Coordinaten leicht erhalten, indem man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt wählt und die Axen zu den drei Paaren paralleler Erzeugenden parallel annimmt. Sind durch $x = \pm a_1$, $y = \pm b_1$, $z = \pm c_1$ die drei Paare paralleler Ebenen, also durch

$$y = b_1,\ z = -c_1;\quad z = c_1,\ x = -a_1;\quad x = a_1,\ y = -b_1$$

die drei Geraden g_i bezeichnet, so wie durch $y = -b_1$, $z = c_1$; etc. die drei Geraden l_1, l_2, l_3, so ist die Gleichung des Hyperboloids

$$(x - a_1)(y - b_1)(z - c_1) = (x + a_1)(y + b_1)(z + c_1)$$

oder

$$\frac{yz}{b_1c_1} + \frac{zx}{c_1a_1} + \frac{xy}{a_1b_1} + 1 = 0;$$

denn die so ausgedrückte Fläche zweiten Grades wird von den Ebenen g_1l_2, l_2g_3, g_3l_1, l_1g_2, g_2l_3, l_3g_1 in den gleichnamigen Punkten berührt. Die ursprüngliche Gleichung bezeichnet die Fläche als den Ort eines Punktes, für den das Product der Abstände von drei in einer Ecke zusammenstossenden Flächen des Parallelepipeds dem Product seiner Abstände von den drei andern Flächen gleich ist.

7) Wenn dem Element von den Coordinaten x_i resp. ξ_i das Element von den Coordinaten x_i^{-1}, ξ_i^{-1} entsprechend gesetzt wird, oder für x_1, x_2, x_3, x_4 resp. $x_2x_3x_4$, $x_3x_4x_1$, $x_4x_1x_2$, $x_1x_2x_3$, so entspricht der Ebene $a_1x_1 + \ldots = 0$ die Fläche dritter Ordnung

$$a_1x_2x_3x_4 + a_2x_3x_4x_1 + \ldots = 0,$$

welche alle sechs F.-Geraden enthält und die F.-Punkte zu Doppel-

punkten hat, weil den Punkten der Originalebene in den F.-Ebenen tangirende Richtungen am gegenüberliegenden F.-Punkt entsprechen oder den Geraden

$$a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \quad a_3x_3 + a_4x_4 + a_1x_1 = 0, \text{ etc.}$$

die Kegel zweiten Grades

$$a_2x_3x_4 + a_3x_4x_2 + a_4x_2x_3 = 0,$$
$$a_3x_4x_1 + a_4x_1x_3 + a_1x_3x_4 = 0, \text{ etc.}$$

Weil aus der Verbindung ihrer Gleichungen in Paaren Gleichungen von der Form — für die eben geschriebenen anzeigend — folgen

$$(a_3x_4 + a_4x_3)(a_1x_2 - a_2x_1) = 0,$$

so berühren sich je zwei solche Kegel längs der gemeinsamen Kante und durchdringen sich ausserdem in Kegelschnitten, deren Ebenen je die Gegenkante und überdiess sämmtlich den Punkt (a_1, a_2, a_3, a_4) enthalten; auch liegen ihre Spuren in den F.-Ebenen offenbar sämmtlich in der Fläche zweiten Grades

$$(a_1 + a_2)x_3x_4 + \ldots + (a_1 + a_3)x_2x_4 + \ldots = 0; \text{ etc.}$$

Jeder Ebene durch eine F.-Gerade entspricht eine andere Ebene durch dieselbe Gerade, nämlich von reciproken Coefficienten, ausser den beiden die Kante nicht enthaltenden F.-Ebenen; $b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ giebt $b_1x_2x_3x_4 + b_2x_1x_3x_4 = 0$ oder $x_3x_4(b_1x_2 + b_2x_1) = 0$; der Ebene $x_1 \mp x_2 = 0$ insbesondere $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und sie selbst, sodass die sechs Ebenenpaare $x_i \mp x_k = 0$ wie auch ihre Durchschnittslinien in Paaren und ihre Schnittpunkte zu dreien als sich selbst entsprechend bezeichnet werden können; letztere die Punkte E, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, .., $E^{(12)}$, $E^{(13)}$, $E^{(14)}$, die wir kennen. Jedem Punkt einer F.-Geraden entspricht ein anderer Punkt derselben; insbesondere den sechs Punkten $a_ix_i + a_kx_k = 0$ in der Ebene a_i die sechs Punkte $\frac{x_i}{a_i} + \frac{x_k}{a_k} = 0$, die sämmtlich in der Ebene mit den reciproken Coefficienten a_i^{-1} liegen. Geht eine Ebene durch einen F.-Punkt, z. B. wie $a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ durch A_1, so entspricht ihr mit

$$x_1(a_2x_3x_4 + a_3x_4x_2 + a_4x_2x_3) = 0$$

die gegenüberliegende F.-Ebene und ein Kegel zweiten Grades aus A_1 durch A_2, A_3, A_4.

8) Die entsprechenden Flächen dritter Ordnung zu zwei Ebenen von allgemeiner Lage und die zu allen Ebenen ihres Büschels haben ausser den sechs F.-Geraden eine Curve dritter Ordnung durch die F.-Punkte gemein, die ihrer Durchschnittsgeraden entspricht und daher durch die entsprechenden zu zwei Punkten derselben bestimmt ist. (Vergl. II, § 24, 6.) Die projicierenden Ebenen der Geraden aus

zwei F.-Punkten führen durch die zerfallenden Flächen, die ihnen entsprechen, auf die Construction dieser Curve aus zwei Kegeln zweiten Grades mit gemeinsamer Mantellinie.

Wenn die Gerade eine F.-Gerade schneidet, so entspricht der Verbindungsebene beider eine andere Ebene durch dieselbe F.-Gerade und der projicierenden aus einem nicht in ihr liegenden F.-Punkt ein Kegel zweiten Grades; der Geraden entspricht also ein Kegelschnitt durch die beiden F.-Punkte jener Geraden. Schneidet die gegebene Gerade zwei Gegenkanten des F.-Tetraeders, so entspricht ihr eine andere Transversale derselben Gegenkanten. Daher liegen in der Fläche dritter Ordnung, die einer Ebene entspricht, immer auch die drei Transversalen der F.-Geraden in gegenüberliegenden Paaren, welche den in jener Ebene liegenden Transversalen gleicher Art entsprechen; es ist evident, dass sie in der Ebene mit den reciproken Coordinaten liegen.

Weil drei Ebenen von den Coefficienten oder Coordinaten a_i, b_i, c_i einen Punkt gemein haben, wenn sie nicht zu demselben Büschel gehören, so haben auch die entsprechenden Flächen dritter Ordnung ausser den F.-Elementen nur einen Punkt gemein, den Schnitt ihrer Durchdringungscurven dritter Ordnung.

9) Einer Fläche zweiter Ordnung

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots = 0$$

entspricht die Fläche sechster Ordnung

$$a_{11}x_2^2x_3^2x_4^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2x_3^2x_4^2 + \ldots + 2a_{13}x_1x_3x_2^2x_4^2 + \ldots = 0,$$

welche in den F.-Punkten vierfache Punkte hat, deren Tangentenkegel sich aus den Querschnitten der Fläche zweiter Ordnung mit den gegenüberliegenden F.-Ebenen ergeben; also z. B. aus dem Schnitt in $\mathbf{A}_1$ oder

$$a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{24}x_2x_4 = 0,$$

der aus A_1 mit

$$a_{22}x_3^2x_4^2 + \ldots + 2a_{23}x_2x_3x_4^2 + \ldots + 2a_{24}x_2x_4x_3^2 = 0,$$

der die F.-Geraden aus A_1 zu Doppelgeraden hat. Die F.-Geraden gehören alle der Fläche sechster Ordnung als Doppelgerade an. Dieselbe enthält, den zwei Systemen von Geraden in der Originalfläche entsprechend, zwei Systeme von Raumcurven dritter Ordnung, von denen je zwei von verschiedenen Systemen sich in einem Punkt ausser den F.-Geraden schneiden, zwei von demselben System aber nicht. Die Frage nach der Uebertragung der bezüglichen Projectivitätsgesetze liegt nahe.

Einem Querschnitt der Fläche zweiter Ordnung entspricht die Durchdringung der zugehörigen Flächen dritter und sechster Ordnung,

die aus den sechs doppelt zählenden F.-Geraden und einer Curve sechster Ordnung besteht. Man zeige, dass dieselbe die F.-Punkte zu Doppelpunkten hat und dass sie in zwei Curven dritter Ordnung zerfällt, sobald sie einen weiteren Doppelpunkt besitzt.

10) Der Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiten Grades entspricht die Durchdringungscurve der bezüglichen Flächen sechster Ordnung, die ausser den vierfach zählenden F.-Geraden eine Curve zwölfter Ordnung mit vierfachen Punkten in den F.-Punkten ergeben. Wie durch jene ein Büschel von Flächen zweiten Grades, so geht durch diese ein Büschel solcher Flächen sechster Ordnung. Diese Curve kann, der Berührung der Originalflächen zweiten Grades entsprechend, einen freien Doppelpunkt, insbesondere Rückkehrpunkt haben; hat sie deren aber zwei, so zerfällt sie entweder in eine Curve dritter Ordnung durch die F.-Punkte und eine Curve neunter Ordnung mit dreifachen Punkten in ihnen, oder in zwei Curven sechster Ordnung mit doppelten Punkten in denselben. Welche andere Zerfällungen kann unsere Curve zwölfter Ordnung erfahren? (Vergl. II, § 45, 5f.)

Den durch besondere Beziehung zu den F.-Elementen ausgezeichneten Flächen zweiten Grades entsprechen besondere Flächen sechster Ordnung, die man erläutern möge. Die einfachen Hyperboloide durch die Punkte der Gruppe E und die windschiefen Vierseite aus den F.-Geraden entsprechen sich selbst.

Welche Rolle spielt die Fläche dritter Ordnung bei diesen Constructionen, die der unendlich fernen Ebene entspricht?

11) In jeder Ebene liegen einfach unendlich viele Punkte, welche anderen Punkten in ihr entsprechen, nämlich die Punkte ihrer Durchschnittscurve mit der Fläche dritter Ordnung, die ihr entspricht. Man charakterisiere dieselbe. Welche Fläche beschreibt diese Curve, wenn die Ebene sich um eine feste Gerade dreht?

Ebenso liegt in jeder Fläche zweiten Grades eine Curve zwölfter Ordnung, deren Punkte anderen Punkten derselben Fläche entsprechen. Welche Fläche durchläuft sie für alle die Flächen zweiten Grades, die dieselbe Durchdringungscurve besitzen? etc. etc.

12) Die besondere Fläche dritter Ordnung $x_2 x_3 x_4 = x_1^3$ entspricht, abgesehen von den F.-Ebenen, sich selbst; jeder der Flächen derselben Art $x_2 x_3 x_4 = a x_1^3$ eine andere von gleicher Art $x_1^3 = a x_2 x_3 x_4$. Man erläutere diess näher unter Betrachtung der Gruppen von Punkten mit permutierten Coordinaten und mit Coordinaten von gleichen numerischen Werthen, die der Fläche angehören.

13) Invers oder nach reciproken Radien mit dem Anfangspunkt rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten als Nullpunkt und p als Radius der Directrixkugel entspricht dem Punkt (x, y, z) der Punkt

$$\left(\frac{px}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{py}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{pz}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

und somit der Ebene und der Kugel resp.

$$\xi x+\eta y+\zeta z+1=0, \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

die Kugeln

$$p(\xi x+\eta y+\zeta z)+(x^2+y^2+z^2)=0,$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)(x^2+y^2+z^2)-2p(\alpha x+\beta y+\gamma z)+p^2=0.$$

Jene geht durch den Anfangspunkt, hat mit der Directrixkugel die gegebene Ebene zur Potenz- oder Radical-Ebene und wird für diese als die unendlich ferne Ebene zur Kugel vom Radius Null um den Anfangspunkt, wie denn mit $x^2+y^2+z^2=0$ die Coordinaten der entsprechenden Punkte den projicierenden Kegel des imaginären Kreises aller Kugeln im Unendlichen oder der absoluten Richtungen liefern. (Vergl. II, p. 536.) Die zweite hat mit der gegebenen Kugel und mit der Directrixkugel dieselbe Potenz- oder Radical-Ebene

$$2(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2+p.$$

Für $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=p$ fällt die gegebene Kugel mit der ihr entsprechenden zusammen, d. h. jede zur Directrixkugel orthogonale Kugel ist selbstentsprechend in der Art, dass zwei ihrer Punkte in demselben Durchmesser aus dem Nullpunkt einander entsprechen.

Einer allgemeinen Fläche zweiten Grades entspricht eine Fläche vierter Ordnung, welche doppelt, einem Paraboloid insbesondere eine Fläche dritter Ordnung, die einfach durch den Kreis der absoluten Richtungen geht — wie diess Alles schon in der Schlussbetrachtung von Bd. II (vergl. p. 539f.) entwickelt ist.

14) Wir wollen nun aber auch hier die durch das Entsprechen zwischen einem Punkt und seiner Harmonikalebene gegebene Abhängigkeit von Gebilden näher betrachten. Die dem Punkt y_i oder dem Pol als Harmonikale entsprechende Ebene hat die Gleichung

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}+\frac{x_4}{y_4}=0 \quad \text{oder} \quad y_2y_3y_4x_1+\ldots=0,$$

und man sieht daraus zunächst, dass für alle Punkte der F.-Ebenen diese selbst die Harmonikalebenen sind.

Dual hierzu ist der der Ebene η_i entsprechende Punkt durch die Gleichung

$$\eta_2\eta_3\eta_4\xi_1+\ldots=0$$

ausgedrückt und für alle Ebenen der F.-Punkte sind diese selbst die entsprechenden Punkte. Durchläuft der Punkt y_i eine Gerade

oder eine Curve, so entsprechen seinen einfach unendlich vielen Lagen einfach unendlich viele Harmonikalebenen in stetiger Folge und somit der Geraden oder der Curve als Punkt eine entwickelbare Fläche; dreht sich die Ebene η_i um eine Gerade oder gehört sie einer festen entwickelbaren Fläche an, so entsprechen der stetigen Aufeinanderfolge ihrer Lagen ebenso viele Punkte in stetiger Folge, d. h. eine Curve. Wenn die Gerade der Reihe und die Axe des Ebenenbüschels zusammenfallen, so ist die zu jener entsprechende entwickelbare Fläche die zu der der letzteren entsprechenden Curve gehörige Tangentenfläche; und ebenso erhält man für eine Curve und ihre entwickelbare Fläche wieder eine entwickelbare Fläche und eine Curve in derselben Zusammengehörigkeit. Wir können das für die gerade Reihe und ebenso für das Ebenenbüschel leicht weiter ausführen. Nach § 19, 7 hat ein Punkt in der Geraden von y_i nach z_i die Coordinaten $y_i + \lambda z_i$ und somit die zugehörige Harmonikalebene eine Gleichung von der Form

$$(y_2 + \lambda z_2)(y_3 + \lambda z_3)(y_4 + \lambda z_4) x_1 + \ldots = 0.$$

Die Forderung, dass dieselbe durch einen gegebenen Punkt w_i gehe, liefert eine in λ cubische Bedingungsgleichung, d. h. in der geraden Reihe liegen drei Punkte, deren Harmonikalebenen durch jenen Punkt gehen oder die entwickelbare Fläche, die ihr entspricht, ist von der dritten Classe. Die dual entsprechende Entwickelung zeigt, dass die den Ebenen eines Büschels entsprechenden Punkte eine Curve dritter Ordnung bilden. Einer Geraden entspricht somit eine die F.-Ebenen berührende entwickelbare Fläche dritter Classe und die als Rückkehrkante zugehörige durch die F.-Punkte gehende Curve dritter Ordnung; wie die Gerade durch zwei Punkte resp. zwei Ebenen bestimmt ist, so diese entwickelbare Fläche dritter Classe durch die zwei zugehörigen Ebenen und die Curve dritter Ordnung durch die zwei entsprechenden Punkte. (Vergl II, § 24, 5 und § 24, 12.)

15) Von den speciellen Fällen der vorigen erwähnen wir wegen ihrer Bedeutung für später zu erörternde Fragen die folgenden. Wenn die Originalgerade eine F.-Linie schneidet, so gehören zu dem Schnittpunkt alle durch diese F.-Linie gehenden Ebenen und der Rest der entwickelbaren Fläche dritter Classe ist ein Kegel zweiter Classe, dessen Spitze der vierte harmonische Punkt zu dem Schnittpunkt der Gegenkante der geschnittenen im F.-Tetraeder mit der Verbindungsebene derselben mit der Geraden in Bezug auf die zugehörigen F.-Punkte ist, zu dessen Tangentialebenen die beiden nicht anliegenden F.-Ebenen gehören, welche ihn längs der Harmonikalen der zugehörigen Durchstosspunkte in Bezug auf die entsprechenden F.-Dreiecke berühren; etc. Geht die Gerade durch einen F.-Punkt, so reduciert sich die Enveloppe der Harmonikalen ihrer Punkte auf das Ebenenbüschel, das die Har-

monikale ihres Durchstosspunktes in der Gegenfläche bezüglich ihres Dreiecks zur Scheitelkante hat. Schneidet die Originalgerade zwei gegenüberliegende F.-Linien in Punkten P_{ik} und P_{lm}, so entsprechen jenem alle Ebenen durch A_iA_k und diesem alle Ebenen durch A_lA_m, den übrigen Punkten der Geraden aber die Ebenen eines Büschels, dessen Scheitelkante die vierten harmonischen Punkte P_{ik}' zu P_{ik} in Bezug auf A_i und A_k und P_{lm}' zu P_{lm} in Bezug auf A_l und A_m mit einander verbindet; und zwar in der Art, dass die entsprechende Ebene zu einem Punkt P der Reihe nach seinem harmonisch conjugierten in Bezug auf P_{ik} und P_{lm} hingeht, sodass nur diesen letzteren selbst die nach ihnen gehenden Ebenen des Büschels entsprechen, die ja auch den Büscheln um A_iA_k und resp. A_lA_m selbst angehören. Den Ebenen des Büschels der Originalgeraden $P_{ik}P_{lm}$ entsprechen die Punkte der Reihe derselben Geraden $P_{ik}'P_{lm}'$, sodass der Schnittpunkt der Ebene in ihr den zugehörigen Pol als den ihm harmonisch conjugierten in Bezug auf die Punkte P_{ik}' und P_{lm}' in den F.-Geraden liefert. Augenscheinlich aber entspricht auch der Geraden $P_{ik}P_{lm}'$ in gleicher Weise die Gerade $P_{ik}'P_{lm}$ und es liefern somit je zwei auf windschiefen F.-Geraden gewählte Paare zu ihren F.-Punkten harmonischer Punkte in ihren Verbindungsgeraden zwei Paare von windschiefen Geraden, welche einander in dieser Art als harmonisch getrennt entsprechen. Da man zu jedem Punkt der einen F.-Geraden als P_{ik} alle Punkte der andern als P_{lm} wählen kann, so erhält man alle die zweifach unendlich vielen Geraden (§ 27, 10), welche die beiden windschiefen F.-Geraden schneiden, durch die Beziehung der harmonischen Trennung in dem durch zwei Punktepaare A_i, A_k und A_l, A_m in jenen bestimmten Tetraeder in einander vertauschbar entsprechende Paare geordnet. Irgend ein Gesetz der Zuordnung der harmonischen Paare auf der einen Geraden zu den harmonischen Paaren auf der andern wird aus dieser zweifachen Unendlichkeit von Geraden eine einfache aussondern, d. h. wie wir sogleich sehen werden, eine Regelfläche, welche aus lauter Paaren einander vertauschbar entsprechender Erzeugenden besteht.

16) Die entsprechende nach reciproken Coordinaten zu der auf ein Quadrupel harmonischer Pole bezogenen Fläche zweiten Grades, deren Gleichung die Coefficienten Eins hat, ist ausgedrückt durch

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=0;$$

man erhält sie auch als den Ort der Punkte, von denen der nach reciproken Coordinaten entsprechende eines jeden in seiner Harmonikalebene liegt. Analog für Ebenencoordinaten. (Vergl. § 28, 16.)

30. Denken wir sodann eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in den sechs p_{ik}, resp. π_{ik}, so erhellt zunächst, dass dieselbe

immer (vergl. § 26) eine dreifach unendliche Schaar von geraden Linien darstellt; man nennt dieselbe einen Linien-Complex. Combinieren wir mit demselben einen Punkt im Raum, so erhalten wir nach den Werthen der p_{ik} die Gesammtheit der Linien des Complexes, welche diesen Punkt enthalten, ausgedrückt durch eine homogene Gleichung zwischen vier Veränderlichen x_i; d. h. die Linien im Complex n^{ten} Grades, welche von einem Punkt ausgehen, bilden einen Kegel n^{ter} Ordnung. Und combinieren wir mit dem Complex eine Ebene, so erhalten wir nach den Werthen der π_{ik} die Gesammtheit der in ihr liegenden Linien des Complexes ausgedrückt durch eine homogene Gleichung zwischen vier Veränderlichen ξ_i; d. h. die Linien im Complex n^{ten} Grades, die in einer Ebene liegen, sind die Tangenten einer Curve n^{ter} Classe. Im Complex ersten Grades oder dem linearen Complex (§ 27,9) bilden also die Linien desselben aus einem Punkt sowohl als in einer Ebene ein Strahlbüschel.

Die Geraden, welche eine feste Gerade schneiden, bilden einen speciellen Complex dieser Art, die Coefficienten seiner Gleichung erfüllen selbst die Bedingung der Coordinaten einer Geraden; in jeder Ebene liegen die Strahlen eines Büschels aus ihrem Schnittpunkt mit der festen Geraden, durch jeden Punkt gehen die Strahlen eines Büschels in seiner Verbindungsebene mit ihr.

Und ein Complex zweiten Grades ist ein dreifach unendliches System von Geraden, von welchem die in einer Ebene liegenden einen Kegelschnitt umhüllen und die durch einen Punkt gehenden einen Kegel zweiter Ordnung erfüllen; sodass einen solchen Complex von specieller Art z. B. bilden die sämmtlichen Tangenten einer Fläche zweiter Ordnung, oder auch die Geraden, welche einen festen Kegelschnitt schneiden, z. B. auch die Geraden von absoluter Richtung (vergl. §§ 27, 28,5 und II, Schlussbetr.); ebenso natürlich einen speciellen Complex höheren Grades die sämmtlichen Tangenten einer beliebigen algebraischen Fläche und die Sekanten einer beliebigen algebraischen Curve. Wenn also eine Fläche in Strahlencoordinaten ausgedrückt wird, d. h. durch eine Gleichung, der die Coordinaten von jeder ihrer Tangenten genügen müssen, so ist sie ein dreifach unendliches System von Elementen; zwei, drei,

vier Flächen haben resp. zweifach und einfach unendlich viele und eine bestimmte Zahl gemeinsamer Tangenten; eine Fläche hat im Allgemeinen zweifach unendlich viele doppelt d. h. zweimal berührende, einfach unendlich viele dreifache und eine bestimmte Zahl vierfache Tangenten; im Besondern auch zweifach unendlich viele dreipunktig berührende, einfach unendlich viele vierpunktig und eine bestimmte Zahl fünfpunktig berührende Tangenten. Für Curven ist ersichtlich, dass ihrer drei im Allgemeinen noch unendlich viele gemeinsame Sekanten, vier Curven also eine bestimmte Zahl von solchen besitzen; und dass insbesondere eine Curve unter zweifach unendlich vielen Bisekanten einfach unendlich viele Trisekanten und eine bestimmte Zahl vierfacher Sekanten haben kann, wenn sie von genügend hoher Ordnungszahl ist. Es sind besondere Fälle der Verbindung mehrerer Complexe. Im Allgemeinen liefert zunächst die Verbindung von zwei Complexgleichungen eine beiden Complexen gemeinsame zweifach unendliche Schaar von Geraden, die man als eine Congruenz bezeichnet; aber nicht jede Strahlencongruenz kann durch zwei Gleichungen in Strahlencoordinaten rein ausgedrückt werden; auch die Congruenzen zerfallen in complete und partielle, und die letzteren werden durch beschränkte Systeme von Gleichungen ausgedrückt sein. Zu den speciellen Congruenzen der vorigen Fälle fügen wir noch die der Sekanten einer Curve, welche zugleich eine Fläche berühren.

Drei homogene Gleichungen zwischen den Coordinaten der geraden Linie im Raum bestimmen mit analogen Unterscheidungen eine einfach unendliche Schaar von Geraden, die im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche bilden.

In jeder Regelfläche begegnen eine bestimmte Anzahl ihrer Geraden einer beliebig gewählten Geraden des Raumes und diese Zahl giebt offenbar zugleich die der Punkte und der Tangentialebenen an, welche die Fläche mit dieser Geraden gemein hat; sie ist also zugleich die Ordnung und die Classe der Regelfläche, d. h. auch bei Regelflächen ist die Ordnung der Classe gleich und man sagt, die Regelfläche sei von dem bezüglichen Grade. (Vergl. II, § 52.) Flächen zweiter Ordnung sind z. B., weil immer Regelflächen, zugleich zweiter Classe, heissen also zweiten Grades; sie sind aus den gemein-

samen Strahlen von drei speciellen linearen Complexen gebildet oder aus denen einer speciellen linearen Congruenz mit einem solchen Complex. Für eine durch drei Gleichungen von den Graden m, n, p rein dargestellte Regelfläche ist nach den Regeln der Algebra der Grad gleich $2mnp$.

In den vorhergehenden besonderen Fällen liefern die gemeinsamen Tangenten von drei Flächen und die dreifachen und die vierpunktig berührenden Tangenten einer Fläche Regelflächen, wie auch wieder die gemeinsamen Sekanten von drei Curven und die Trisekanten einer Curve; wir fügen hinzu die der Sekanten zweier Curven, die eine Fläche, und die der Sekanten einer Curve, welche zwei Flächen berühren, sowie die der Doppeltangenten und der dreipunktigen Tangenten einer Fläche, die eine zweite Fläche berühren. Endlich in allen Fällen, wo Curven auftraten, die dualistisch entsprechenden Fälle von Developpabeln, also die gemeinsamen Tangenten von zwei Developpabeln, die Bitangenten von einer, etc.

Man kann nach Analogie der Regelfläche durch den Grad eine Congruenz durch die Anzahl ihrer Geraden charakterisieren, die zwei beliebige nicht zu ihr gehörige Geraden schneiden oder die sie mit der speciellen linearen Congruenz derselben gemein hat. Und ebenso einen Complex durch die Zahl seiner Geraden, die er mit der Regelfläche aus drei beliebigen ihm nicht angehörenden Geraden d. i. mit drei speciellen linearen Complexen zugleich gemein hat.

Vier homogene Gleichungen in Strahlencoordinaten bestimmen eine Gruppe von Geraden. Ihre Zahl ist durch das doppelte Product der Grade der Gleichungen gegeben und wir wissen schon, dass sie auch sämmtlich imaginär sein können, aus dem Fall der linearen Gleichungen. (§ 26.)

Die Betrachtung der Regelflächen in II, § 54 hat durch das windschiefe Flächenelement, das die zu einer gegebenen unendlich nahe erzeugende Gerade mit ihr begrenzt, das fundamentale Element der Geometrie des Strahlenraumes hervortreten lassen in dem Paar aus Punkt und Ebene, wie sie als Flächenpunkt und Tangentialebene der Fläche in ihm zusammengehören. Da der Punkt in der Reihe und ganz so die Ebene im Büschel zur Bestimmung eine Coordinate (oder das Verhältniss von zwei homogenen Coordinaten) erfordert,

also etwa x und ξ, so drückt jede durch eine Gleichung zwischen diesen ausgedrückte Abhängigkeit eine einfach unendliche Gesammtheit solcher Paare aus und wir wissen, dass dieselbe im windschiefen Flächenelement linear und daher projectivisch ist, sodass die Reihe der Punkte in der Erzeugenden und das Büschel der Ebenen aus derselben zu einander projectivisch sind. Im allgemeinen Fall kann man ein solches System von Paaren durch die Grade der definierenden Gleichung in x und resp. in ξ als ihre Ordnung und Classe charakterisieren; zwei solche Systeme auf derselben Geraden haben gemeinsame Paare in einer Anzahl, die als Summe der beiden Producte aus der Ordnung des einen in die Classe des andern bestimmt ist; in dem besondern Fall der windschiefen Flächenelemente die zwei Berührungen dieser Elemente bezeichnend. Weil Projectivität durch drei Bedingungen bestimmt wird, so giebt es projectivische Systeme von Paaren dreifach unendlich viele, und durch eine resp. zwei Bedingungen werden sie auf zweifach und einfach unendlich viele eingeschränkt, wie im Complex und in der Congruenz.

Auch ein Complex ordnet die Punkte und Ebenen jedes Strahles, der ihm angehört, einander projectivisch zu, da der Strahl in jeder Ebene mit der Enveloppe aller Strahlen in ihr einen bestimmten Berührungspunkt und an jedem Punkt mit dem Kegel aller Strahlen aus ihm eine bestimmte Tangentialebene hat. Ist daher ein Strahl gemeinschaftlich zu zwei Complexen, so werden seinen Punkten die durch ihn gehenden Ebenen auf zweierlei Art und somit diese einander projectivisch zugeordnet, d. h. es giebt im Allgemeinen in ihm zwei Punkte, welche denselben Ebenen in beiden Complexen zugeordnet sind; und nach der geometrischen Entstehung dieser Zuordnung somit: Jeder Strahl einer Congruenz wird von zwei benachbarten Strahlen derselben geschnitten und bestimmt mit ihnen zwei gemeinsame oder Focalpunkte und zwei gemeinsame Ebenen, die Focalebenen.

Die geometrische Repräsentation des windschiefen Flächenelementes durch eine im Centralpunkt auf der Geraden errichtete dem Parameter gleiche Gerade resp. deren Endpunkt (II, § 53, 8) lässt sich entsprechend erweitern.

1) Das F.-Tetraeder bestimmt durch jedes seiner Gegenkantenpaare als Gesammtheit ihrer Transversalen eine Strahlencongruenz,

... Punkt des Raumes ein Strahl geht und ... Die durch den Punkt y_i gehende ... ist die Schnittlinie der von diesen ...

$$\ldots = 0, \quad y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0;$$

$$\ldots = 0, \quad \pi_{23} = y_1 y_4, \quad \pi_{31} = y_2 y_4,$$

$$\ldots = y_2 y_3, \quad \pi_{24} = -y_1 y_3$$

$$p_{12} = p_{34} = 0,$$

$$\ldots : p_{24} = y_2 y_3 : -y_3 y_1 : y_1 y_4 : y_4 y_2.$$

... der Transversale von $A_2 A_3$, $A_1 A_4$

$$p_{12} : p_{31} : p_{24} : p_{34} = -y_1 y_2 : y_3 y_1 : y_2 y_4 : y_3 y_4$$

... Transversale zu $A_1 A_3$, $A_2 A_4$

$$\ldots = 0, \quad p_{12} : p_{23} : p_{14} : p_{34} = y_1 y_2 : -y_2 y_3 : y_1 y_4 : y_3 y_4.$$

... Transversalen aus dem Punkt y_i bestimmen mit einander ... von den Gleichungen mit offenbarem Zeichengesetz — ... der Punkte y_i mit den Zeichencombinationen

..., $+ - - +$, $+ - + -$

$$\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3} - \frac{x_4}{y_4} = 0, \quad \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3} + \frac{x_4}{y_4} = 0,$$

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} - \frac{x_4}{y_4} = 0.$$

... in gleicher Weise liefert eine Ebene η_i drei in ihr liegende ... versalen und drei Durchschnittspunkte derselben.

Man sieht, dass die Punkte y_i, für welche eine jener Ebenen ... durch einen festen Punkt x_i geht, eine Fläche dritter Ordnung ... bilden, die die F.-Geraden enthält und die F.-Punkte zu Doppelpunkten hat. (Vergl. § 29, 7.) Ebenso umhüllen die Ebenen η_i, für welche einer jener Schnittpunkte in einer festen Ebene ξ_i liegt, eine Fläche dritter Classe, die die F.-Ebenen zu singulären Tangentialebenen hat; etc.

2) Nach § 25, 3 lassen sich die Gesammtheiten von Strahlen bilden, welche mit einem festen Tetraeder ein gegebenes Doppelverhältniss Δ bestimmen. Von einer solchen Gesammtheit liegen in jeder Ebene einfach unendlich viele, die einen Kegelschnitt umhüllen, der die Spuren dieser Ebene in den Tetraederflächen zu Tangenten hat und nach I, § 25, 1 hieraus durch das Doppelverhältniss construiert wird. Auch gehen durch jeden Punkt einfach unendlich viele solcher Strahlen, gerade Erzeugende eines Kegels

vom zweiten Grade, zu welchem die vier projicierenden Strahlen des Punktes aus den Tetraederecken auch gehören. Die fragliche Gesammtheit ist also für jeden Werth von Δ ein Complex zweiten Grades, man sagt ein tetraedraler Complex. Für die Punkte in den Kanten und die Ebenen durch die Kanten des Tetraeders zerfallen die Complexkegel und die Complexcurven in je ein Paar von Strahlbüscheln, etc.

Zugleich erhellt, dass zwei und mehrere solcher Complexe für verschiedene Werthe von Δ und dasselbe Tetraeder mit einander nur die Strahlen der Bündel aus den Ecken und die Strahlen in den Flächen gemein haben, für die die Werthe Δ ganz unbestimmt sind.

3) Die Geraden, deren Momente in Bezug auf eine feste Gerade den constanten Werth k haben, bilden einen speciellen Complex zweiten Grades. Denn nach § 26, 3 sind sie für die Axe der z als die feste Gerade durch die Gleichung verbunden

$$p_{23}^2 - k(p_{12}^2 + p_{31}^2 + p_{14}^2) = 0.$$

Aus ihr folgt für den Complexkegel des Punktes (x', y', z') die Gleichung

$$(xy' - x'y)^2 - k\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\} = 0,$$

ein Rotationskegel, dessen Axe normal ist zu der Ebene $xy' = x'y$.

Und da die Gleichung des Complexes in der Form

$$\pi_{14}^2 - k(\pi_{34}^2 + \pi_{24}^2 + \pi_{23}^2) = 0$$

nach den Werthen der π_{ik} in Plücker'schen Coordinaten nach § 26 wird

$$(\xi - \xi')^2 - k\{(\eta\xi' - \eta'\xi)^2 + (\xi\xi' - \xi'\xi)^2 + (\xi\eta' - \xi'\eta)^2\} = 0,$$

so ist die Complexcurve in der Ebene (ξ', η', ζ') ein Kreis um den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der z.

In der That ist wegen $k = d \sin\vartheta$ für die zur Axe z normalen Geraden $k = d$, die Distanz von der Axe ein Minimum und constant, d. h. keine Gerade des Complexes schneidet den Rotationscylinder um seine Axe, welcher das Moment zum Radius hat. Der in der Ebene (ξ', η', ζ') als Complexcurve erhaltene Kreis ist der über der Hauptaxe der zugehörigen Querschnittellipse dieses Cylinders als seinem Durchmesser beschriebene Kreis. Der Complexkegel des Punktes (x', y', z') berührt denselben Cylinder doppelt in der Normalebene durch ihn zur Axe z.

Die Geraden, welche in Bezug auf zwei feste Axen gegebene Momente haben, bilden eine Congruenz vierten Grades, deren Strahlen in jeder Ebene die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise sind, u. s. w. Wenn die Momente in Bezug auf vier feste Gerade vorgeschrieben sind, so entsprechen dem zweiunddreissig Gerade; aber diese wie

die Congruenzen und Regelflächen der vorhergehenden Combinationen haben besondere Eigenschaften der Lage.

Complexkegel und Complexcurve können degenerieren und führen damit zu singulären Punkten als den Spitzen solcher Kegel und zu singulären Ebenen als den Ebenen solcher Curven, sowie zu singulären Geraden als den Doppelgeraden der Kegel resp. der Curven. Im Fall der Complexe höherer Grade entspricht dem das Auftreten einer Doppelgeraden im Kegel, einer Doppeltangente an der Complexcurve oder die Singularität des einen und der andern. Der Kreis unseres Beispiels kann nur für die Radiuswerthe Null und Unendlich singulär werden; d. h. für die Parallelebenen zur Axe mit je zwei Richtungen von Geraden des Complexes und für die Tangentialebenen des absoluten Kreises im Unendlichen mit zwei Strahlbüscheln aus den Punkten, wo die Gerade vom betreffenden Punkt der Axe nach dem Berührungspunkt mit dem absoluten Kreis den Cylinder schneidet. Derselbe Cylinder und die unendlich ferne Ebene sind aber zugleich der Ort der Punkte, deren Complexkegel zerfallen. Welches sind die zugehörigen Doppelgeraden?

4) Es ist allgemein, dass der Ort der singulären Punkte identisch ist mit der Enveloppe der singulären Ebenen, und dass die singulären Linien Tangenten derselben im zugehörigen singulären Punkt und längs der zugehörigen singulären Ebene sind.

5) Sind $p_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(2)}$ die Coordinaten von zwei Geraden, so ist

$$p_{ik} \equiv \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \lambda_2 p_{ik}^{(2)}$$

nur dann eine Gerade, wenn man hat

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 p_{12}^{(1)} + \lambda_2 p_{12}^{(2)})(\lambda_1 p_{34}^{(1)} + \lambda_2 p_{34}^{(2)})\\ &+ (\lambda_1 p_{23}^{(1)} + \lambda_2 p_{23}^{(2)})(\lambda_1 p_{14}^{(1)} + \lambda_2 p_{14}^{(2)})\\ &+ (\lambda_1 p_{31}^{(1)} + \lambda_2 p_{31}^{(2)})(\lambda_1 p_{24}^{(1)} + \lambda_2 p_{24}^{(2)}) = 0,\end{aligned}$$

d. h. für

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2 (p_{12}^{(1)} p_{34}^{(1)} + p_{23}^{(1)} p_{14}^{(1)} + p_{31}^{(1)} p_{24}^{(1)}) + \lambda_2^2 (p_{12}^{(2)} p_{34}^{(2)} + \ldots)\\ &+ \lambda_1 \lambda_2 \{p_{12}^{(1)} p_{34}^{(2)} + p_{34}^{(1)} p_{12}^{(2)} + \ldots\} = 0,\end{aligned}$$

was sich auf das letzte Glied reduciert und aussagt, dass entweder λ_1 oder λ_2 Null sein müssen, was die gegebenen Geraden selbst wiedergiebt; oder dass andernfalls die gegebenen Geraden sich schneiden müssen, wo dann λ_1, λ_2 unbestimmt bleiben. Soll $\lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \lambda_2 p_{ik}^{(2)}$ eine gegebene andere Gerade schneiden, so unterliegt das Verhältniss der λ einer linearen Bedingung, d. h. die so dargestellten Geraden sind die Strahlen des durch $p_{ik}^{(1)}$ und $p_{ik}^{(2)}$ bestimmten Büschels.

6) Für $p_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(2)}$, $p_{ik(3)}$ als drei windschiefe Gerade sind

$$p_{ik} \equiv \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \lambda_2 p_{ik}^{(2)} + \lambda_3 p_{ik}^{(3)}$$

die Coordinaten einer Geraden, wenn man hat

$$p_{12}\,p_{34} + p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(\lambda_1 p_{12}^{(1)} + \lambda_2 p_{12}^{(2)} + \lambda_3 p_{12}^{(3)})(\lambda_1 p_{34}^{(1)} + \lambda_2 p_{34}^{(2)} + \lambda_3 p_{34}^{(3)}) + \ldots = 0,$$

d. h. wenn

$$\lambda_1 \lambda_2 \Sigma p_{ik}^{(1)}\, p_{lm}^{(2)} + \lambda_2 \lambda_3 \Sigma p_{ik}^{(2)}\, p_{lm}^{(3)} + \lambda_3 \lambda_1 \Sigma p_{ik}^{(3)}\, p_{lm}^{(1)} = 0$$

ist. Durch diese Bedingung werden unter den zweifach unendlich vielen möglichen Verhältnissen der λ_1, λ_2, λ_3 einfach unendlich viele ausgeschieden und die zugehörigen Strahlen bilden also eine Regelschaar. Weil für Strahlen p_{ik} derselben, die durch den Punkt x_i gehen, nach § 25

$$x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} = 0, \quad x_2 p_{34} - x_3 p_{24} + x_4 p_{23} = 0$$

sein müssen, so ist diese Regelschaar vom zweiten Grade oder ein einfaches Hyperboloid; denn ihre Gleichung wird durch Elimination der λ_i zwischen den letzten zwei Bedingungsgleichungen als linearen und der ersten quadratischen erhalten. Den Werthepaaren

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

entsprechend gehören die Strahlen $p_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(2)}$, $p_{ik}^{(3)}$ selbst zur Regelschaar.

Vier Gerade gehören zur nämlichen Regelschaar zweiten Grades, wenn sich vier Zahlen λ_i so bestimmen lassen, dass man hat

$$\lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \ldots + \lambda_4 p_{ik}^{(4)} = 0.$$

7) Vier windschiefe Gerade geben aus der Combination

$$p_{ik} \equiv \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \ldots + \lambda_4 p_{ik}^{(4)}$$

durch die aus der Identität der Strahlencoordinaten entspringende Bedingung $(\lambda_1 p_{12}^{(1)} + \ldots)(\lambda_1 p_{34}^{(1)} + \ldots) + \ldots = 0$

ein System von zweifach unendlich vielen Geraden, von welchen diejenigen Strahlen durch einen Punkt x_i gehen, für die die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ aus den zwei linearen Gleichungen von 5) und dieser letzten quadratischen Gleichung erhalten werden, d. h. durch jeden Punkt gehen zwei Strahlen der Congruenz; und aus analogen Gründen liegen auch zwei derselben in jeder Ebene.

Zu dieser Congruenz gehören natürlich die durch die vier Ternen der Geraden $p_{ik}^{(1)}, \ldots p_{ik}^{(4)}$ nach 5) bestimmten Regelschaaren.

8) Zu fünf Strahlen $p_{ik}^{(1)}, \ldots p_{ik}^{(5)}$ ist

$$p_{ik} \equiv \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \ldots + \lambda_5 p_{ik}^{(5)}$$

ein Strahl, wenn die Bedingung der Identität erfüllt ist, d. h. es

sind die Strahlen eines Complexes vom zweiten Grade in dieser Weise darstellbar.

In der Form $p_{ik} \equiv \lambda_1 p_{ik}^{(1)} + \cdots + \lambda_6 p_{ik}^{(6)}$ kann jede Gerade mittelst sechs gegebener Strahlen dargestellt werden.

31. Die Systeme von Elementenpaaren des vorigen Paragraphen geben das einfachste dem Gebilde erster Stufe angehörige Beispiel von Gleichungen, wie wir sie noch zu betrachten haben, nämlich von Gleichungen mit mehr als einer Reihe von Veränderlichen x_i, ξ_i resp. p_{ik}.

Im Gebilde zweiter Stufe können die Veränderlichen x_i und ξ_i zugleich homogen und mit den resp. Geraden n und ν in einer Gleichung auftreten — schreiben wir etwa

$$f(\overset{n}{x_i}, \overset{\nu}{\xi_i}) = 0.$$

Nach einer solchen Gleichung entspricht jedem bestimmten Punkt x_i' der Ebene eine zugehörige Curve von der Classe ν und jeder bestimmten Geraden ξ_i' derselben eine zugehörige Curve von der Ordnung n; insbesondere z. B. für n und ν gleich Eins dem Punkt das Strahlbüschel aus einem andern Punkt und der Geraden die Punktreihe in einer andern Geraden. Dieselbe ordnet also jedem der zweifach unendlich vielen Punkte der Ebene ein einfach unendliches System von Geraden zu oder sie charakterisiert ein dreifach unendliches System von Elementenpaaren, deren jedes ein Punkt und eine Gerade der Ebene ist, sie scheidet dasselbe aus der vierfach unendlichen Menge aller solchen Paare aus. Selbstverständlich kommt dabei jedes Element in unendlich vielen Paaren vor. Wir schliessen, dass erst vier derartige auf dasselbe F.-System bezogene Gleichungen eine bestimmte Gruppe von Elementenpaaren im Gebilde zweiter Stufe festlegen, während ihrer drei einfach unendlich viele solche Paare und zwei Gleichungen zweifach unendlich viele Paare definieren. Es ist offenbar, dass das durch drei Gleichungen solcher Art definierte Gebilde der Ebene im Allgemeinen ein Paar von Curven ist.

Auch hier können natürlich bei der Verbindung von zwei und mehr Gleichungen beschränkte Systeme auftreten, d. h. solche Systeme von mehr als zwei, etc. Gleichungen, welche noch zweifach etc. unendlich viele Lösungen mit einander gemein haben; analog den partiellen gegenüber den totalen Durchdringungen.

Im Raum von drei Dimensionen haben wir Gleichungen analoger Art nach den Typen

$$1)\quad f(\overset{n}{x_i},\ \overset{\nu}{\xi_i}) = 0; \qquad 2)\quad f(\overset{n}{x_i},\ \overset{s}{p_{ik}}) = 0,\quad f(\overset{\nu}{\xi_i},\ \overset{s}{p_{ik}}) = 0;$$

$$3)\quad f(\overset{n}{x_i},\ \overset{\nu}{\xi_i},\ \overset{s}{p_{ik}}) = 0$$

und können über ihre geometrische Bedeutung und diejenige ihrer Verbindungen in Kürze Folgendes sagen. Aus Gleichungen vom ersten Typus erhält man durch Einsetzen bestimmter Werthe für ξ_i resp. x_i eine zu der bestimmten Ebene resp. dem bestimmten Punkt gehörige krumme Fläche von der Ordnung n resp. der Classe ν; d. h. zu jener Ebene die zweifach unendlich vielen Punkte der Fläche n^{ter} Ordnung, und zu dem Punkt die zweifach unendlich vielen Ebenen der Fläche n^{ter} Classe. Der Raum wird also hier nach den sechsfach unendlich vielen Paaren seiner Punkte und Ebenen betrachtet und erst durch die Coexistenz von sechs derartigen Gleichungen wird eine bestimmte Gruppe von solchen Elementenpaaren ausgesondert; während fünf Gleichungen eine einfach unendliche, vier eine zweifach unendliche Anzahl von solchen ausdrücken; jene eine Curve und eine entwickelbare Fläche, diese im Allgemeinen zwei krumme Flächen bildend, deren Gleichungen durch die Elimination der einen oder der andern Reihe von Veränderlichen aus dem System erhalten werden, und wo den Punkten der einen die Tangentialebenen der andern zugeordnet sind. Drei und zwei Gleichungen resp. liefern ein dreifach und ein vierfach unendliches System von Paaren aus Punkt und Ebene, natürlich mit analogem Unterschied von complet und partiell wie früher.

Die Gleichungen von den Typen unter 2) — bei denen natürlich, wie auch beim Typus 3) die Veränderlichen p_{ik} durch die Identität der Strahlencoordinaten beschränkt sind — sondern aus dem siebenfach unendlichen System von Paaren aus Punkt und Strahl resp. aus Ebene und Strahl sechsfach unendliche Systeme dieser Art aus. Und man geht von ihnen durch die Annahme der Coexistenz von zwei, drei, vier, fünf, sechs solchen Gleichungen zu fünf-, vier-, drei-, zwei- und einfach unendlichen Systemen derselben zurück, wobei die letzten zwei Fälle wieder zu Flächen und resp.

Curven und zu zugehörigen Strahlensystemen von der Art der Congruenzen und der Regelschaaren führen. Erst mit sieben solchen Gleichungen sind bestimmte Gruppen von Paaren aus Punkt und Strahl resp. Ebene und Strahl ausgeschieden.

Eine Gleichung vom Typus 3) ordnet jedem bestimmten Paar von Punkt und Ebene die Strahlen in einem Complex vom Grade s zu; jedem bestimmten Paar von Punkt und Strahl die Gesammtheit aller Ebenen einer Fläche ν^{ter} Classe und jedem bestimmten Paar von Ebene und Strahl die Gesammtheit aller Punkte einer Fläche n^{ter} Ordnung. Sie beziehen sich auf die zehnfach unendliche Gesammtheit aller Tripel von Punkt, Ebene und Strahl und jede von ihnen sondert aus derselben eine neunfach unendliche Gesammtheit solcher Tripel ab; durch die Coexistenz solcher Gleichungen in den Anzahlen zwei bis neun werden acht- etc. bis einfach unendliche Gesammtheiten solcher Tripel constituiert und mit zehn Gleichungen erhält man eine bestimmte Gruppe derselben.

Es ist nicht schwer, in allen diesen Fällen die Anzahl der Paare und Tripel, die Ordnungen und Classen der Curven und Developpabeln resp. der Flächen und die Art des Entsprechens ihrer Elemente aus den Graden der Gleichungen in den verschiedenen Reihen ihrer Veränderlichen abzuleiten.

Und wenn wir hier überall vorausgesetzt haben, dass die in unseren Gleichungen auftretenden Veränderlichen auf dasselbe System von F.-Elementen bezogen seien, so könnte natürlich auch das andere angenommen werden, dass zwei oder mehrere Systeme von F.-Elementen zur Interpretation der verschiedenen Reihen der Veränderlichen dienen sollen; und man hätte damit auch die Möglichkeit, Gleichungen von mehreren Reihen von Veränderlichen derselben Art, also der x_i oder ξ_i, p_{ik} der Betrachtung zu unterwerfen.

Zur Abkürzung der Rede kann man, wo bestimmtere Bezeichnung unzweckmässig wäre, das geometrische Bild einer bestimmten Gleichung oder eines Systems von solchen Gleichungen eine geometrische Form nennen.

Es ist offenbar, dass hierin auch die Construction aller Gleichungen und ihrer Verbindungen nach den Methoden der darstellenden Geometrie enthalten ist.

Die nähere Untersuchung hat zu zeigen, welche der vorher

bezeichneten Verbindungen wesentliche Glieder sind in der Lösung der umfassenden Aufgabe, die Geometrie als die anschauliche Deutung der Algebra und die Algebra als den rechnerischen Ausdruck der Welt geometrischer Anschauungen nachzuweisen und darzustellen.

Die Weiterbildung der Geometrie zu einer solchen der Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen scheint dazu unumgänglich zu sein und sie kann nach der Methode der darstellenden Geometrie durch Herausprojicieren von Stufe zu Stufe unter entsprechender Weiterbildung der projectivischen Coordinaten durchgeführt werden. Wir werden jedoch alsbald sehen, dass innerhalb der gewöhnlichen Raumanschauung eine unumgängliche elementare Betrachtung zu algebraisch-geometrischen Gebilden aller Stufen hinführt. Wir müssen vorher nur noch der imaginären Raumelemente gedenken.

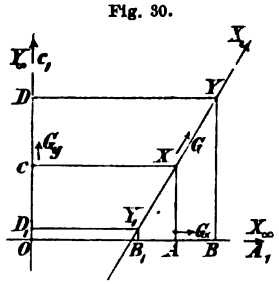
32. Nach dem Vorigen werden Raumelemente durch Verbindung homogener Gleichungen mit reellen Coefficienten bestimmt, welche zwischen den algebraischen Zahlen bestehen, die wir ihre Coordinaten nennen; also zuletzt immer durch Auflösung einer algebraischen homogenen Gleichung mit zwei Veränderlichen d. i. einer Unbekannten, welche für diese soviele Werthe liefert, als ihr Grad Einheiten hat. Diese Werthe sind entweder alle oder nur zum Theil reell und sonst in Paaren conjugiert imaginär oder complex, d. h. von der Form $\alpha \pm \beta i$, und wir nennen die zu den imaginären Wurzeln gehörigen Raumelemente selbst imaginär.

Wir zeigen, wie dieser einheitliche algebraische Ausdruck wieder zu denselben imaginären Raumelementen und ihren Constructionen führt, die wir früher rein geometrisch entwickelt haben. Wir betrachten dazu nach einander die Fälle, wo die berechneten Coordinaten x_i Punkte in der Ebene oder im dreidimensionalen Gebiet oder Gerade im Bündel, die ξ_i Gerade in der Ebene oder Ebenen eines Bündels oder Ebenen im Raum, endlich die p_{ik} oder π_{ik} Strahlen des Raumes ausdrücken. Und wir dürfen für alle Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten als Ausdrucksmittel voraussetzen, weil wir jeden andern Fall darauf construierend und rechnend zurückführen können.

Sind $(x_1 + x_2 i,\ y_1 + y_2 i)$ die Coordinaten eines imaginären Punktes in der Ebene der Axen x und y, so kann derselbe

nach § 9f. geometrisch dargestellt und constructionsfähig gemacht werden. Man hat den Punkt $(1, x_1 + x_2 i, 0)$ der Axe x mit dem Punkt A_3 im Unendlichen der Axe y zu verbinden und diese Gerade mit der Verbindungslinie von $(1, 0, y_1 + i y_2)$ in y mit dem unendlich fernen Punkt A_2 von x zu schneiden, um den Punkt zu erhalten. Dazu trägt man vom Axenschnittpunkt A_1 auf der Axe der x und der y resp. die Längen x_1 und y_1 ab, um nach Fig. 10, § 9 die Punkte M_x, M_y zu erhalten (in der Fig. resp. A und C); schneidet man dann in x von M_x nach beiden Seiten x_2 und in y von M_y ebenso y_2 ab, so erhält man die Punkte N_x und N_{1x}, resp. N_y und N_{1y} des symmetrischen Paares (in Fig. 30 B, B_1 und resp. D, D_1), wobei festzusetzen ist, dass für G_i oder x_2, y_2 als positiv N_x resp. N_y derjenige der beiden Punkte sei, welcher von M_x, M_y aus resp. im positiven Sinn der x oder y liegt, und umgekehrt für x_2, y_2 als negativ oder für den imaginären Doppelpunkt H_i. Dann sind die Punkte $(1, x_1 + x_2 i, 0)$ und $(1, 0, y_1 + y_2 i)$ in den Axen durch die symmetrisch harmonischen Würfe $(M_1 N_1 M N)$ mit ihrem Bewegungssinn, also beide von dem unendlich fernen Punkt M_1 ihrer Axe aus (M_{1x}, M_{1y}) dargestellt; die aus M_{1y} oder A_3 und aus M_{1x} oder A_2 resp. über ihnen gebildeten Parallelenbüschel sind zu einander perspectivisch, weil sie die unendlich ferne Gerade zum entsprechend gemeinsamen Strahl haben, und ihre Perspectivaxe ist die einzige reelle Gerade, welche durch den Punkt $(x_1 + x_2 i, y_1 + y_2 i)$ hindurch geht; die drei Punkte M, N und N_1, die man als Schnitte der Parallelen zu y und x durch M_x, M_y; N_x, N_y und resp. N_{1x}, N_{1y} auf ihr erhält, bilden die symmetrisch harmonische Darstellung desselben.

Fig. 30.



Man sieht sofort, dass die Punkte $(x_1 \pm x_2 i, y_1 \pm y_2 i)$ und $(x_1 \mp x_2 i, y_1 \mp y_2 i)$, die man als aus conjugiert imaginären Wurzeln hervorgegangen als conjugiert imaginär im algebraischen Sinn bezeichnen wird, es auch im Sinn der früher entwickelten geometrischen Theorie sind, weil sie auf derselben reellen Geraden NMN_1 liegen und durch dieselbe

Involution mit beiderlei Bewegungssinn nach einander dargestellt werden. Man sieht auch aus § 19, dass unter den Geraden, welche den Punkt $(1,\ x_1 + x_2 i,\ y_1 + y_2 i)$ mit andern Punkten der Ebene xy verbinden, nur diejenige reell ist, welche nach dem Punkt $(1,\ x_1 - x_2 i,\ y_1 - y_2 i)$ hingeht. Die Darstellung von $(1,\ x_1 + x_2 i,\ y_1 - y_2 i)$ und seinem conjugierten ist hierin enthalten; bei gleichen x_i und y_i sind die Darstellungen nach den durch M gehenden Axenparallelen symmetrisch zu einander.

Sind ferner $\xi_1 + \xi_2 i$, $\eta_1 + \eta_2 i$ die durch Auflösung erhaltenen complexen Werthe der Plücker'schen Coordinaten einer imaginären Geraden in der Ebene der Axen, so sind

$$-\frac{1}{\xi_1 + \xi_2 i}, \qquad -\frac{1}{\eta_1 + \eta_2 i}$$

oder

$$\frac{-\xi_1 + \xi_2 i}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \qquad \frac{-\eta_1 + \eta_2 i}{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

die Coordinaten x und y ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen, als deren Verbindungslinie die Gerade zu construieren ist. Diess geschieht, indem man beide vom Anfangspunkt der Coordinaten aus durch projectivische Würfe vorgeschriebenen Sinnes darstellt, durch die zu beiden Darstellungen perspectivische Involution. Der Scheitel derselben ist der reelle Punkt der Geraden und man berechnet seine Coordinaten mit

$$x = \frac{-\eta_2}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}, \qquad y = \frac{\xi_2}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}.$$

Der Uebergang zum Raum von drei Dimensionen erfordert nur die Wiederholung dieser Constructionen. So für den imaginären Punkt $(x_1 + x_2 i,\ y_1 + y_2 i,\ z_1 + z_2 i)$ die Auftragung von x_1, y_1, z_1 in $A_1 M_x$, $A_1 M_y$ und $A_1 M_z$ resp. und die von x_2, y_2, z_2 von diesen weg zu N_x, N_{1x}; N_y, N_{1y}; N_z, N_{1z}. Die Parallelen zu y aus M_x, N_x, N_{1x} und die Parallelen zu x aus M_y, N_y, N_{1y} schneiden einander resp. in den Punkten M_{xy}, N_{xy}, N_{1xy} einer Geraden, die die Projection des Punktes aus A_4 auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$ symmetrisch harmonisch darstellt; und die zugehörigen projicierenden Geraden aus A_4 werden von den Parallelen zu jener Geraden aus M_z, N_z, N_{1z} in den drei

Punkten M, N und N_1 des reellen Trägers und der symmetrisch harmonischen Darstellung des Punktes selbst getroffen.

Sodann für die imaginäre Ebene von den Coordinaten $(\xi_1+\xi_2 i,\ \eta_1+\eta_2 i,\ \zeta_1+\zeta_2 i)$ durch Auftragung der imaginären Axenschnittpunkte

$$\left(1,\ \frac{\xi_2 i-\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2},\ 0,\ 0\right),\quad \left(1,\ 0,\ \frac{\eta_2 i-\eta_1}{\eta_1^2+\eta_2^2},\ 0\right)$$

und

$$\left(1,\ 0,\ 0,\ \frac{\zeta_2 i-\zeta_1}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\right)$$

und Verbindung derselben mit einander; man erhält so ihre imaginären Spuren in den Coordinatenebenen und als Verbindungslinie der reellen Punkte derselben die reelle Gerade, die in ihr liegt, welche man natürlich auch als Schnittlinie von zwei reellen Ebenen berechnen kann. Die Coordinaten π_{ik} dieser Geraden sind

$$\xi_2,\ \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1,\ -\eta_2;\quad \xi_2,\ \xi_1\zeta_2-\xi_2\zeta_1,\ \eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1;$$

somit die des Durchstosspunktes S_4 in xy und des Durchstosspunktes S_3 in xz resp.

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1,\ -\eta_2,\ \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1,\ -\zeta_2,\ \xi_2$$

oder

$$x=\frac{-\eta_2}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1},\quad y=\frac{\xi_2}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1};$$

resp.

$$x=\frac{-\zeta_2}{\xi_1\zeta_2-\xi_2\zeta_1},\quad z=\frac{\xi_2}{\xi_1\zeta_2-\xi_2\zeta_1}.$$

Endlich bedürfen wir für die imaginäre Gerade erster und zweiter Art, die wir aus den Coordinaten von zweien ihrer Durchstosspunkte oder als Schnittlinie einer reellen und einer imaginären Ebene und resp. als Schnittlinie von zwei imaginären Ebenen ansehen können, auch keiner neuen Constructionsmittel. Ist die erste die Schnittlinie von $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ mit $(\xi_1+\xi_2 i,\ldots)$ und die zweite die von $(\xi_1+\xi_2 i,\ldots)$ mit $(\xi_1'+\xi_2' i,\ldots)$, so sind die Coordinaten von jener $\pi_{12},\ \pi_{23},\ \pi_{31},\ \pi_{14},\ldots$

$$(\xi_1-\xi)+\xi_2 i,\ (\xi\eta_1-\xi_1\eta)+(\xi\eta_2-\xi_2\eta)i,\ (\eta-\eta_1)-\eta_2 i;$$
$$(\xi-\xi_1)+\xi_2 i,\ (\xi\xi_1-\xi_1\xi)+(\xi\xi_2-\xi_2\xi)i,\ (\eta\xi_1-\eta_1\xi)+(\eta\xi_2-\eta_2\xi)i$$

und die Coordinaten von dieser in derselben Folge und indem man für die Differenzen $(a_i b_k'-a_i' b_k)$ stets nur das erste Glied schreibt

$$(\xi_1'-\xi_1)+(\xi_2'-\xi_2)i,\ (\xi_1\eta_1')-(\xi_2\eta_2')+(\xi_1\eta_2'+\xi_2\eta_1')i,$$
$$(\eta_1-\eta_1')+(\eta_2-\eta_2')i;$$

$$(\xi_1' - \xi_1) + (\xi_2' - \xi_2)i, \quad (\xi_1\xi_1') - (\xi_2\xi_2') + (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')i,$$
$$(\eta_1\xi_1') - (\eta_2\xi_2') + (\eta_1\xi_2' + \eta_2\xi_1')i.$$

Man berechnet leicht auch die reelle Gerade, die von einem gegebenen reellen Punkt oder in einer reellen Ebene nach der rein imaginären geht. (§ 10f.)

Mit dieser Einbeziehung der imaginären Raumelemente in die construierende wie in die algebraische Behandlung der Geometrie lässt sich über bezügliche Fragen vollständige und sichere Auskunft geben.

Wenn z. B. die gemeinschaftlichen Transversalen zu vier windschiefen reellen Geraden nicht reell sind, sondern conjugiert imaginär (II, § 38), so sind sie rein imaginäre Gerade in jedem der einfachen Hyperboloide, die aus den Tripeln der vier gegebenen Geraden bestimmt sind; nämlich die Erzeugenden der andern Schaar, welche durch die beiden imaginären Schnittpunkte der jeweil vierten Geraden mit dem Hyperboloid der drei ersten auf diesem gehen. Die gemeinsamen Transversalen zu vier punktiert imaginären Geraden sind punktiert imaginär; denn sie sind die Geraden der andern Schaar in der elliptischen Fläche zweiten Grades, welche durch drei der vier gegebenen Geraden bestimmt ist, aus ihren Schnittpunkten mit der vierten. Und die Transversalen zu vier rein imaginären Geraden sind entweder wieder solche Gerade oder sie sind reell.

Sowie in der reellen Ebene das Paar conjugiert imaginärer Geraden die Uebergangsform ist zwischen dem reellen und dem imaginären Kegelschnitt, so ist unter den Flächen zweiten Grades das elliptische Paraboloid, das die unendlich ferne Ebene in zwei conjugiert imaginären punktierten Geraden schneidet, die Uebergangsform zwischen dem zweifachen Hyperboloid und dem Ellipsoid. Und der Kegel zweiten Grades ist die Uebergangsform zwischen den hyperbolischen und den elliptischen Flächen zweiten Grades, weil es auf ihm nur reelle und punktiert imaginäre Gerade giebt. Das Büschel von Flächen zweiten Grades zeigt uns im Allgemeinen diese Uebergänge (II, § 45, 4); wir wissen aber, dass es (II, § 45, 29) auch nur aus einfachen Hyperboloiden bestehen kann und wir haben gesehen, dass für eine wichtige Specialform des Falles, wo das Büschel nur einfache und zweifache Hyperboloide enthält, näm-

lich (II, § 32f.) für das Büschel der gleichseitigen Rotationshyperboloide mit parallelen Axen, die zahlreichen Eigenschaften, die man aus der Anschauung der rellen Geraden auf den einfachen Hyperboloiden abliest, auch für die zweifachen Hyperboloide mit einfachen Modificationen fortbestehen. So werden wir auch weiterhin bei der allgemeinen Untersuchung derselben Fragen des Flächenbüschels vom zweiten Grade und seiner Grundcurve vierter Ordnung erster Art die Betrachtung der einfachen Hyperboloide im Büschel, die niemals fehlen, als das Hauptmittel der Untersuchung sich bewähren sehen. (§ 54f.) Ausser dieser Wegleitung für eine wichtige Frage ersten Ranges hier nur einige einfache Beispiele.

1) Denkt man einen Kegelschnitt als centrisch collineare Figur eines Kreises und sind die ihm angehörigen Punkte J' und $J^{*'}$ die den imaginären Kreispunkten J, J^* im Unendlichen entsprechenden, so müssen die projicierenden Geraden $\mathfrak{C}JJ'$, $\mathfrak{C}J^*J^{*'}$ conjugiert imaginär sein, wenn das Centrum $\mathfrak{C}$ reell ist. Zugleich hat man, weil sie nach den Kreispunkten gehen, die Distanzen $\mathfrak{C}J' = \mathfrak{C}J^{*'} = 0$, d. h. $\mathfrak{C}$ in der Normalebene zur Geraden $J'J^{*'}$, der Gegenaxe im Bild, und durch die Mitte M der Strecke $J'J^{*'}$ mit $\overline{\mathfrak{C}J'^2} = \overline{\mathfrak{C}M^2} + \overline{MJ'^2} = 0$, d. h. im Abstand $i \,.\, MJ'$.

Damit ergeben sich für die gleichzeitige centrisch collineare Umformung von zwei Kegelschnitten derselben Ebene in Kreise die folgenden Constructionen. (Vergl. I, § 33, 18, 20.) Haben die Kegelschnitte vier reelle gemeinsame Punkte, so sind die Centra für alle sechs gemeinsamen Sehnen imaginär; bei nur zwei reellen Schnittpunkten gehören zu derjenigen reellen gemeinsamen Sehne, deren Endpunkte imaginär sind, zwei reelle Centra in der Normale zu ihr durch M und im reellen Abstand $i \,.\, MJ'$, d. i. in den Gauss'schen Abbildern der imaginären Endpunkte. Sind alle Schnittpunkte imaginär, so findet dasselbe für beide reelle Sehnen statt und es giebt vier reelle Centra. Die Kreise, die in den zusammengehörigen Paaren reeller Centra zur Ebene der Figur normal stehen, sind die Orte der Projectionscentra C, für die auf Parallelebenen zu $CJ'J^{*'}$ sich die Kegelschnitte als Kreise projicieren.

2) Der Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird von dem conjugiert imaginären Linienpaar aus seinem Mittelpunkt

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 0,$$

d. i. dem Polarenpaar seiner Asymptoten in Bezug auf das Paar der imaginären Kreispunkte oder das Absolute $x^2 + y^2 = 0$, in vier paarweis conjugiert imaginären Punkten geschnitten. Man erhält durch Elimination von y^2

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad ex = \pm a \text{ (I, § 36)},$$

und durch Elimination von x^2

$$\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad y = \pm i\,\frac{a}{e}(1 - e^2)$$

als ihre zu den Axen y, x resp. parallelen Verbindungslinien; und dieselben Punkte liegen also auch auf dem Kreis

$$x^2 + y^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} = a^2 + b^2 = a^2(2 - e^2) \text{ (I, § 36)},$$

dem Ort der Schnittpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare. Die reellen Verbindungsgeraden $ex = \pm a$ sind die Directrixen; und ihre Pole in Bezug auf den Kegelschnitt, die conjugierten ihrer Fusspunkte in der Involution auf der Hauptaxe, die die Scheitel zu Doppelpunkten hat, die Brennpunkte des Kegelschnittes. Die Tangenten von den Brennpunkten an den Kegelschnitt, die ja nach den Kreispunkten gehen und daher zu sich selbst normal sind, müssen in der That in den Schnittpunkten mit dem Orthogonalkreis berühren.

Wenn zwei Kegelschnitte in einer imaginären Geraden sich berühren, so thun sie es auch in der conjugiert imaginären und die Sehne der Berührung ist die Polare des reellen Punktes der Imaginären.

3) Die Fläche zweiten Grades (II, § 40, 6) mit Centrum

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo wir $a^2 > b^2 > c^2$ denken und weiterhin c^2 oder c^2 und b^2 negativ setzen können, um zu den Gleichungen für das Ellipsoid die entsprechenden für das einfache und das zweifache Hyperboloid zu erhalten, wird von dem concentrischen nicht reellen Kegel

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = 0,$$

der sich bei jenen Zeichenänderungen selbst nicht ändert, in einer imaginären Raumcurve vierter Ordnung erster Art geschnitten, deren orthogonale Doppelprojectionen in den Hauptebenen xy, yz und zx man durch die Elimination von z^2, x^2, y^2 resp. zwischen beiden Gleichungen ausdrückt. Dieselben sind also resp.

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{a^2-c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{b^2}=1,\quad -\frac{y^2}{b^2}\frac{a^2-b^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\frac{a^2-c^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\frac{b^2-c^2}{c^2}=1,$$

die auf yz also imaginär wie die centrale Doppelprojection auch. Die Orte der Pole ihrer Tangenten, also nach I, § 34 ihre Polarcurven in Bezug auf die entsprechenden Hauptschnitte der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

sind die Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\quad -\frac{y^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{a^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1,$$

welche man die **Focalkegelschnitte der Fläche** nennt. (II, § 47, 26.) Ihre Abhängigkeit von einander ist die in II, § 47, 25 anders erläuterte und man erkennt den Zusammenhang beider Betrachtungsweisen. Der imaginäre Kegel $\frac{x^2}{a^4}+\cdots=0$ ist der Polarkegel vom Asymptotenkegel der Fläche in Bezug auf den Nullkugelkegel $x^2+\cdots=0$; seine Durchdringung mit der Fläche ist die Berührungscurve ihrer mit dem absoluten Kreis gemeinsamen Developpabeln, der Ort der Punkte auf der Fläche in unendlich grossem Abstand vom Centrum. Wir kommen auf diese wichtigen Beziehungen zurück.

4) Wenn zwei reelle Flächen zweiten Grades eine imaginäre Gerade gemein haben, so müssen sie auch die conjugiert imaginäre Gerade gemein haben. Welches ist der Rest ihrer Durchdringung im Fall elliptischer und im Fall hyperbolischer Flächen?

33. Nachdem wir im Vorigen die geometrische Bedeutung der Gleichungen erläutert und entwickelt haben, wenden wir uns zu der Frage nach den Gleichungen bestimmter geometrischer Gebilde, die vorher nur in metrisch speciellen Fällen beantwortet wurde, um dieselbe wenigstens in ihrer einfachsten Form allgemein zu erledigen.

Eine homogene Function n^{ten} Grades mit einer Reihe von zwei, drei, vier und sechs Veränderlichen enthält resp.

$$n+1, \quad \frac{1}{1.2}(n+1)(n+2),$$

$$\frac{1}{1.2.3}(n+1)(n+2)(n+3) \text{ und } \frac{1}{1.2..5}(n+1)\cdots(n+5)$$

Glieder und somit Coefficienten; und da man einen der Coefficienten gleich Eins setzen kann, ohne bei festgestelltem F.-System die geometrische Bedeutung der durch Gleichsetzung mit Null erhaltenen Gleichung zu ändern, so sind

$$n, \quad \tfrac{1}{2}n(n+3) \text{ und resp. } \tfrac{1}{6}n(n^2+6n+11),$$

Coefficienten zu bestimmen, um die durch die drei ersten Arten von Gleichungen ausgedrückten geometrischen Formen zu fixieren.

Diese Bestimmung erfolgt geometrisch am einfachsten und natürlichsten durch die Angabe von solchen Elementen der Form, wie sie die der Gleichung genügenden Werthegruppen der Veränderlichen liefern. Denn da die Coefficienten linear in die Gleichung eingehen, so macht die Substitution jeder solchen Werthegruppe aus ihr eine lineare Gleichung zur Bestimmung der Coefficienten; eine der Zahl der zu bestimmenden Coefficienten gleiche Anzahl solcher Werthegruppen reicht daher aus, um die Gleichung und damit die von ihr repräsentierte geometrische Form zu bestimmen. Und man hat nur ein System von linearen Gleichungen aufzulösen, um diese Bestimmung auszuführen. Sie ist somit immer möglich, wenn diese Gleichungen von einander unabhängig sind, d. h. zunächst, wenn ihre Determinante nicht verschwindet; wir kommen sogleich darauf zurück.

Zunächst die Ergebnisse. Zur Bestimmung einer Gruppe von n Elementen in einem Gebilde erster Stufe gehören bei gegebenem F.-System n Bedingungen, also am einfachsten diese n Elemente selbst. Zur Bestimmung einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung resp. n^{ter} Classe führen $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte resp. Tangenten, die ihr angehören, und ebenso zur Bestimmung eines Kegels n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Classe $\frac{1}{2}n(n+3)$ gerade Erzeugende resp. Tangentialebenen desselben. Zur Bestimmung einer Fläche n^{ter} Ordnung resp. n^{ter} Classe sind ebenso $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)$ Punkte oder Tangentialebenen erforderlich. Für ebene Curven oder Kegel zweiter, dritter und vierter

Ordnung oder Classe also z. B. fünf, neun und vierzehn Punkte oder Erzeugende, Tangenten oder Tangentialebenen; für krumme Flächen zweiter, dritter oder vierter Ordnung resp. Classe ebenso neun, neunzehn und vierunddreissig Punkte oder Tangentialebenen. Nur bei der Bestimmung der Complexe macht die beschränkende Identität vom zweiten Grade ab sich wirksam, indem man durch ihre Verbindung mit der Gleichung einzelne Glieder derselben verschwinden machen kann, so beim Grade zwei eines; daher erfordert ein linearer Complex zwar die Kenntniss von fünf, aber ein Complex zweiten Grades nicht die von zwanzig, sondern nur die von neunzehn ihm angehörigen Geraden.

Diese Punkte, Tangenten, Tangentialebenen, Strahlen des zu bestimmenden algebraischen Gebildes liefern durch Einsetzung der ihnen im gewählten F.-System zukommenden Coordinatenzahlen in die allgemeine Gleichung ebenso viele lineare homogene Gleichungen zwischen den Coefficienten, aus denen sich die Verhältnisse derselben zu einem unter ihnen stets reell ergeben. Wir haben in § 24 gesehen, dass man aus p linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten oder aus p linearen homogenen Gleichungen mit $(p+1)$ Veränderlichen durch Auflösung die Werthe der Unbekannten in Form von Brüchen erhält, deren gemeinsamer Nenner die Determinante Δ der Coefficienten ist, während die Zähler Determinanten $\Delta_1, \ldots \Delta_p$ sind, welche aus jener der Reihe nach hervorgehen, indem man die Coefficienten in ihrer ersten, ... p^{ten} Reihe durch die absoluten Glieder der Gleichungen ersetzt. Dabei sind nun drei Fälle möglich, je nachdem nämlich die Determinante Δ von Null verschieden oder gleich Null ist und mit dem letzteren, je nachdem auch alle Δ_i oder nicht alle gleichzeitig verschwinden. Im ersten Fall werden alle Unbekannten vollständig bestimmt; im zweiten Fall bleiben sie sämmtlich unbestimmt, die linearen Bestimmungsgleichungen sind nicht unabhängig von einander und repräsentieren daher nicht die zur Bestimmung der Unbekannten erforderliche Anzahl. Im zweiten Fall hat man nur nach Einsetzen der gefundenen Werthe der unbekannten Coefficienten den gemeinsamen Nenner Δ zu unterdrücken, um zu sehen, dass die Curve resp. Fläche etc. durch die gegebenen Bedingungen völlig bestimmt ist, und dass nur einzelne Coef-

ficienten in ihrer Gleichung verschwinden. Sie ist also — mit einem sogleich zu begründenden Ausdruck — nur in einem linearen Gebilde niederer Stufe (als das ihrem Grade entsprechende) allgemein bestimmt.

Ob bei dieser Bestimmung Elemente der Curve etc. selbst oder durch lineare Gleichungen zwischen den Coefficienten ausdrückbare Bedingungen anderer Art vorgeschrieben sind (wir werden solche kennen lernen), ist gleichgültig.

Für Gleichungen mit mehr als einer Reihe von Veränderlichen, wie wir sie in § 31 betrachteten, gelten die analogen Verfahrungsweisen; aber wir übergehen sie.

1) Die Gleichung des durch fünf Punkte A, B, C, D, E von den resp. Coordinaten a_i, b_i, c_i, d_i, e_i gehenden Kegelschnittes wird also in der allgemeinen Form erhalten

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_2x_3, & x_3x_1, & x_1x_2 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & a_2a_3, & a_3a_1, & a_1a_2 \\ b_1^2, & b_2^2, & b_3^2, & b_2b_3, & b_3b_1, & b_1b_2 \\ c_1^2, & c_2^2, & c_3^2, & c_2c_3, & c_3c_1, & c_1c_2 \\ d_1^2, & d_2^2, & d_3^2, & d_2d_3, & d_3d_1, & d_1d_2 \\ e_1^2, & e_2^2, & e_3^2, & e_2e_3, & e_3e_1, & e_1e_2 \end{vmatrix} = 0$$

und analog die des Kegelschnittes zu fünf durch ihre Coordinaten gegebenen Tangenten.

2) Der durch die F.-Punkte A_i, den E.-Punkt E und einen Punkt von den Coordinaten a_i gehende Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_1(a_2 - a_3)x_2x_3 + a_2(a_3 - a_1)x_3x_1 + a_3(a_1 - a_2)x_1x_2 = 0.$$

Denn die Ersetzung der Coordinaten von C, D, E durch $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ resp. in der vorigen Determinante macht die Factoren der x_i^2 in der Entwickelung derselben gleich Null, und für die auf die Producte der Veränderlichen reducierte Gleichung liefern die zwei Bedingungen aus den Coordinatengruppen $(1, 1, 1)$ und (a_1, a_2, a_3) die obige Form.

3) Wenn der Kegelschnitt ein Quadrupel von Punkten mit numerisch gleichen Coordinaten enthalten soll, so kann seine Gleichung die Producte der Veränderlichen nicht enthalten, weil bei Einsetzung von (a_1, a_2, a_3), $(-a_1, a_2, a_3)$, $(a_1, -a_2, a_3)$, $(a_1, a_2, -a_3)$ an Stelle von a_i, b_i, c_i, d_i in die Determinante von 1) durch Subtraction der ersten zugehörigen Zeile von den drei folgenden die bezüglichen Coefficienten zu Nullen werden. Ein Punkt von den Coordinaten b_i bestimmt dann den Kegelschnitt vollends, derselbe

enthält aber auch die übrigen Punkte seiner Gruppe. Zwei Vierecke, die dasselbe Tripel von Diagonalpunkten besitzen, haben ihre acht Ecken auf demselben Kegelschnitt (I, § 32, 11) und derselbe enthält die Ecken von unendlich vielen andern Vierecken mit demselben Tripel. So ist die Gleichung des durch die Gruppen Eins und a_i gehenden Kegelschnittes

$$(a_3^2 - a_2^2)\, x_1^2 + (a_1^2 - a_3^2)\, x_2^2 + (a_2^2 - a_1^2)\, x_3^2 = 0.$$

4) Die Gleichung des durch die fünf Punkte von den Coordinaten (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) gehenden Kegelschnittes ist

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_2x_3, & x_3x_1, & x_1x_2 \\ a^2, & b^2, & c^2, & bc, & ca, & ab \\ a^2, & c^2, & b^2, & cb, & ba, & ac \\ b^2, & a^2, & c^2, & ac, & cb, & ba \\ b^2, & c^2, & a^2, & ca, & ab, & bc \\ c^2, & a^2, & b^2, & ab, & bc, & ca \end{vmatrix} = 0$$

und derselbe enthält auch den sechsten Punkt (c, b, a) der Permutationsgruppe (§ 18, 6). Denn mit Hinzufügung der Zeile aus den Elementen $c^2, b^2, a^2, ba, ac, cb$ als letzter statt und also mit Unterdrückung der Zeile der Veränderlichen erhält man durch Addition der Elemente der Zeilen vier und fünf zu den gleichnamigen von eins und ebenso der Elemente der Zeilen drei und sechs zu denen von zwei, als wodurch die Determinante ihren Werth nicht ändert, zwei gleiche Zeilen und somit den Werth Null. Und wenn man die Determinante mit der die Veränderlichen enthaltenden Zeile durch Addition der Elemente der zweiten und dritten Reihe zu denen der ersten und der fünften und sechsten zu denen der vierten umformt, so erkennt man ihren entwickelten Werth als

$$(a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab) \times$$
$$\left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2}{bc + ca + ab} \right\}$$

und somit die Gleichung des Kegelschnittes der Permutationsgruppe als

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc + ca + ab}(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = 0.$$

5) Man schreibe die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Classe, welche von den vier F.-Ebenen und der E.-Ebene, sowie von den Ebenen mit den Coordinatengruppen α_i, β_i, γ_i, δ_i berührt wird.

6) Die Fläche zweiten Grades durch die drei Octupel von

Punkten mit numerisch gleichen Coordinaten aus a_i, b_i, c_i hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & a_4^2 \\ b_1^2, & b_2^2, & b_3^2, & b_4^2 \\ c_1^2, & c_2^2, & c_3^2, & c_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Drei Achtecke mit demselben Quadrupel von Diagonalpunkten — wollen wir sagen — haben ihre Ecken auf der nämlichen Fläche zweiter Ordnung und dieselbe enthält zweifach unendlich viele solche Octupel — und dual. Man zeige nun, dass die Zusammenfassung dieser Ergebnisse für Kegelschnitte (3) und Flächen zweiten Grades die centrisch involutorische Collineation der Curve und Fläche mit sich selbst für jede Ecke des Tripels resp. Quadrupels der Diagonalpunkte als Centrum und die Gegenseite resp. Gegenfläche desselben als Axe resp. Ebene der Collineation ausspricht; für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten insbesondere die Symmetrie nach der Richtung jeder Coordinatenaxe in Bezug auf die andere Axe resp. die Gegenfläche des Systems. Offenbar bilden jene Diagonalpunkte ein Tripel und resp. ein Quadrupel harmonischer Pole (I, § 32; II, § 39) in Bezug auf die Curve resp. die Fläche zweiten Grades.

7) Die vier gemeinsamen Punkte und Tangenten von zwei Kegelschnitten mit dem nämlichen Tripel harmonischer Pole und Polaren bilden mit Bezug auf dasselbe je ein Quadrupel von numerisch gleichen Coordinaten. Denn für die gemeinsamen Punkte folgt z. B. aus

$$a_1 x_1^2 + \cdots = 0, \qquad b_1 x_1^2 + \cdots = 0$$

für die gemeinsamen Punkte

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) : (a_3 b_1 - a_1 b_3) : (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Man zeige und erläutere das Analoge für drei Flächen zweiten Grades mit demselben Quadrupel harmonischer Pole und entwickele die speciellen Fälle der axialen und planaren Symmetrie.

8) Die gemeinsame Curve und die gemeinsame Developpable von zwei Flächen zweiten Grades sind in Bezug auf die Ecken und Flächen ihres gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole (II, § 45) als Centra und Ebenen der Collineation in involutorischer Collineation mit sich selbst. (II, § 47.)

9) Die Punkte der Permutationsgruppe (a, b, c, d) im Raum von drei Dimensionen liegen sämmtlich auf einer Fläche zweiten Grades von der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{ab + bc + ca + ad + bd + cd} \times (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4) = 0.$$

Für die allgemeinen regulären Coordinaten des § 23 wird diese Fläche zur Kugel um den E.-Punkt mit dem Radiusquadrat (§ 27) $= s\sqrt{\frac{3}{2}}(a + \cdots) - \frac{3}{2}(ab + \cdots) - \frac{3}{8}s^2$, für s als die Kantenlänge des F.-Tetraeders und unter Rücksicht auf die identischen Relationen a. a. O.

Man entwickele die analogen Resultate für die sechs Geraden der Permutationsgruppe (α, β, γ) und wiederum für die vierundzwanzig Ebenen der Permutationsgruppe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

10) Man bilde die Gleichungen linearer Complexe für einige einfache Fälle ihrer Bestimmung, z. B. die Zugehörigkeit einer oder mehrerer Kanten des F.-Systems zu denselben.

34. Ist eine Bedingung der im Vorigen erklärten Art und also auch eine solche lineare Gleichung weniger gegeben als erforderlich, so kann man einen der zu bestimmenden Coefficienten willkürlich wählen und erhält für alle ihm beigelegten Werthe bestimmte Werthsysteme aller andern; d. h. man erhält als vollständiges geometrisches Bild der betrachteten Gleichung unter den gegebenen Bedingungen ein einfach unendliches System von Elementengruppen, Curven, Kegeln, Flächen oder Complexen resp., von solcher Beschaffenheit, dass durch jedes weiter vorgeschriebene Bestimmungselement im Allgemeinen eine Gruppe, Curve, ein Kegel, eine Fläche oder ein Complex völlig bestimmt wird. Wenn durch die Gleichungen $U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$ zwei jener Gruppen, Curven, etc. dargestellt sind, so wird in Folge dessen die Gleichung

$$\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} = 0$$

mit dem unbestimmten linearen Coefficienten $\varkappa_1 : \varkappa_0$ das System ausdrücken; weil die von ihr für irgend einen Werth von $\varkappa_1 : \varkappa_0$ repräsentierte geometrische Form erstens allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt, da diess nach der Voraussetzung die von $U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$ dargestellten thun; und weil zweitens eine weitere Bedingung derselben Art den Coefficienten $\varkappa_1 : \varkappa_0$ bestimmt und damit eine einzelne Form des einfach unendlichen Gebildes liefert. Es ist klar, dass sämmtliche Curven etc. des Systems alle diejenigen Elemente mit einander gemein haben, welche den bestimmenden Curven etc.

$U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$ zugleich angehören; also nach § 28 für n als den Grad dieser Gleichungen in den Veränderlichen die ihnen gemeinsamen n^2 Punkte, Tangenten, Erzeugenden, Tangentialebenen, wenn sie Curven in derselben Ebene resp. Kegel an demselben Scheitel darstellen; eine gemeinsame Curve von der Ordnung n^2 resp. eine gemeinsame Developpable von der Classe n^2, wenn sie krumme Flächen bezeichnen; eine gemeinsame Congruenz vom Grade n^2, wenn sie Complexe sind. Man kann die Gesammtheit dieser gemeinsamen Elemente als die Grundpunkte, -Tangenten, Grundcurve etc. des Gebildes bezeichnen. Wenn man von der Bestimmung durch die beiden Formen gleichen Grades $U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$ ausgeht, indem man diese als gegeben ansieht, so hängt die Realität der gemeinsamen Elemente offenbar von diesen bestimmenden Formen ab und ist zur Bestimmtheit des linearen Gebildes nicht erforderlich; die gemeinsamen Elemente können eben zum Theil oder ganz imaginär sein, wie wir diess von den einfachsten Beispielen her schon wissen, wie dem Strahlbüschel mit imaginärem Scheitel, dem Ebenenbüschel mit imaginärer Scheitelkante und dem Kugelbüschel mit oder ohne reellen gemeinsamen Kreis, etc. sowie den Kegelschnittbüscheln.

Da nun, wenn die betrachtete Function linear also die Zahl der Bestimmungselemente — für Gruppe, Curve (Gerade), Fläche (Ebene) — 1, 2, 3 resp. ist, diess auf die Bestimmung der einfach unendlichen Systeme von Elementen zurückkommt, die wir Elementargebilde erster Stufe, speciell Punktreihen, Strahlbüschel und Ebenenbüschel nennen, so wollen wir der wesentlichen Gleichartigkeit solcher Systeme für alle Grade n zufolge sie allgemein als lineare Gebilde erster Stufe bezeichnen und z. B. von linearen Gebilden erster Stufe aus Curven resp. Flächen oder wie schon in gewissen besonderen Fällen von Curvenbüscheln und Flächenbüscheln n^{ter} Ordnung sprechen, wenn diese Curven und Flächen $U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$ n^{ter} Ordnung sind; dagegen von Curvenschaaren und Flächenschaaren n^{ter} Classe, wenn $U^{(0)} = 0$ und $U^{(1)} = 0$ zwei Curven resp. Flächen dieser Classe darstellen.

Ein Flächenbüschel zweiten Grades ist also z. B. bestimmt durch acht Punkte, oder durch fünf Punkte und eine den Flächen angehörende Gerade (vergl. II, § 35, 19 f.) durch drei

Punkte und zwei Gerade, die sich schneiden, durch einen Punkt und zwei Gerade der einen nebst einer der andern Regelschaar, durch zwei Kegelschnitte, die sich in zwei Punkten schneiden, durch eine Raumcurve dritter Ordnung und eine ihrer Bisekanten etc.; eine Flächenschaar zweiten Grades ist bestimmt in den gleichen Fällen, wenn nach dem Gesetz der Dualität die Punkte als Bestimmungselemente durch Ebenen ersetzt werden.

Weil endlich für nur zwei Veränderliche und Functionen zweiten Grades das Gebilde $\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} = 0$ die einfach unendlich vielen Paare einer Involution im Gebilde erster Stufe darstellt, wie leicht zu sehen ist, so wollen wir für den Fall von zwei Veränderlichen allgemein den Ausdruck Involution auf das Gebilde anwenden, und also von Involution n^{ten} Grades reden bei einem System von einfach unendlich vielen Gruppen von n Elementen, die durch zwei unter ihnen bestimmt sind.

In der That, um die Berechtigung des Ausdrucks Involution sofort darzuthun, ein nicht zur Gruppe $U^{(0)} = 0$ oder $U^{(1)} = 0$ gehöriges Element, dessen Coordinaten der Gleichung

$$\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} = 0$$

genügen müssen, bestimmt das Verhältniss $\varkappa_1 : \varkappa_0$ gleich dem Verhältniss der Substitutionsresultate seiner Coordinaten in $- U^{(0)} : U^{(1)}$. Damit sind aber, falls jene Gleichung vom Grade n ist, $(n-1)$ andere Elemente, die übrigen Elemente der bezüglichen Gruppe von n, bestimmt; jedes der Elemente dieser und jeder Gruppe entspricht den $n-1$ übrigen derselben Gruppe in gleicher Art und daher entsprechen einander ebenso die Elemente mehrerer Gruppen. Die Gruppen $U^{(0)} = 0$, $U^{(1)} = 0$, die den Werthen $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_0 = 0$ entsprechen, bestimmen alle andern. Für $n = 2$ erhalten wir die gewöhnliche Involution, die darnach im hier entwickelten Sinn als Involution zweiten Grades zu bezeichnen ist. Mit der Abkürzung λ für $\varkappa_1 : \varkappa_0$ und bei expliciter Schreibung der quadratischen Polynome $U^{(0)}$ und $U^{(1)}$ kann man sie schreiben

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \lambda(b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) = 0,$$

woraus man sofort das der Gruppe eines beliebigen Punktes (y_1, y_2) entsprechende λ und damit den zweiten Punkt dieser Gruppe linear berechnet; oder

$$(a_0 + \lambda b_0) x_1^2 + 2(a_1 + \lambda b_1) x_1 x_2 + (a_2 + \lambda b_2) x_2^2 = 0,$$

woraus man sofort mittelst

$$(a_1 + \lambda b_1)^2 = (a_0 + \lambda b_0)\,(a_2 + \lambda b_2)$$

d. h. $(a_1^2 - a_0 a_2) + \lambda(2a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0) + \lambda^2(b_1^2 - b_0 b_2) = 0$

die beiden Werthe von λ erfährt, für welche die Elemente der zugehörigen Paare je zusammenfallen, oder die Doppelelemente der Involution; dieselben sind also mit den Wurzeln dieser Gleichung reell, conjugiert imaginär oder zusammenfallend oder die Involution ist durch die entsprechenden Relationen der Coefficienten a_i, b_i als hyperbolische, elliptische und parabolische resp. charakterisiert. Und analog im allgemeinen Fall, nur ohne diese nicht mehr passenden Namen, weil mit einer Gleichung höheren Grades, nämlich (§ 41) des $2(n-1)^{\text{ten}}$.

1) Die Gleichung des Kegelschnittes der Permutationsgruppe (a, b, c) in der Ebene (§ 33, 4)

$(bc + ca + ab)\,(x_1^2 + \cdot\cdot) - (a^2 + b^2 + c^2)\,(x_2 x_3 + \cdot\cdot) = 0$

ist für

$$-(a^2 + b^2 + c^2) : (bc + ca + ab) = \varkappa_1 : \varkappa_0$$

gleich einer bestimmten Zahl λ die Gleichung eines bestimmten Kegelschnittes, auf dem alle die Permutationsgruppen von den Zahlen (a, b, c) liegen, für die man hat

$$a^2 + b^2 + c^2 + \lambda(bc + ca + ab) = 0.$$

Für beliebige Werthe von a, b, c ist sie aber die Gleichung eines Gebildes erster Stufe aus Kegelschnitten, welche sämmtlich die vier gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$$

enthalten und von denen daher jeder durch einen weiteren Punkt bestimmt ist. Weil nun durch Addition der ersten dieser Gleichungen $T = 0$ zur doppelt genommenen zweiten $2U = 0$ erhalten wird $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$, das Quadrat der Gleichung der E.-Linie, so ist zu schliessen, dass die vier gemeinsamen Punkte der besagten Kegelschnitte in zwei Punkten auf dieser in Paaren vereinigt sind oder dass die E.-Gerade die Sehne der doppelten Berührung ist, in welcher alle diese Kegelschnitte mit einander stehen. Die fraglichen zwei Punkte der Doppelberührung sind imaginär und haben gleiche Coordinatenverhältnisse $x_2 : x_1$, $x_3 : x_1$; denn aus der Verbindung von $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mit $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$ folgt gleichmässig $x_i^2 + x_i x_k + x_k^2 = 0$ für i, k als irgend ein Paar aus 1, 2, 3 und damit

$$\frac{x_k}{x_i} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Weil aber die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten einer Permutationsgruppe nach § 19,4 Gerade einer Permutationsgruppe sind, und für die Gleichung der von solchen umhüllten Kegelschnitte

$$(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 + \xi_1\xi_2) = 0$$

der E.-Punkt offenbar dieselbe Rolle spielt, wie für die der Punktgruppen die E.-Gerade, so ist der Schnittpunkt jener gemeinsamen Tangenten in den bezeichneten Punkten der E.-Geraden eben der E.-Punkt. Das lineare Gebilde erster Stufe dieser Kegelschnitte ist also zugleich ein Büschel und eine Schaar von Kegelschnitten.

2) Wir construieren die Gleichung des Systems in 1) direct, indem wir bemerken, dass für (a, b, c) als einen Punkt des Kegelschnittes $T = 0$ oder ebenso $U = 0$ auch alle andern Punkte der bezüglichen Permutationsgruppe demselben Kegelschnitt $T = 0$ resp. $U = 0$ angehören (§ 28, 3), und das System aller solchen Kegelschnitte linear aus diesen beiden zusammensetzen, in der Form $T + \lambda U = 0$. Soll dann der durch einen bestimmten Punkt (a, b, c) gehende Kegelschnitt des Systems gefunden werden, so erhalten wir durch Einsetzen dieser Coordinatenwerthe

$$\lambda = -(a^2 + b^2 + c^2) : (bc + ca + ab)$$

wie oben. Für jene besonderen imaginären Coordinatenwerthe wird λ unbestimmt, d. h. alle Kegelschnitte des Systems enthalten die zugehörigen Punkte.

Der die F.-Linien berührende Kegelschnitt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0$$

gehört zu dem betrachteten System; er enthält diejenigen Gruppen (a, b, c), für welche man hat

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc + ca + ab). \quad \text{(Vergl. § 28, 3.)}$$

3) Für die Flächen zweiten Grades aus den Permutationsgruppen (a, b, c, d) resp. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ im Raum folgt die Construction ihrer Gleichungen aus der Bemerkung, dass $T = 0$, $U = 0$ oder mit blosser Andeutung der durch cyklische Verschiebung entstehenden Glieder

$$x_1^2 + \cdots = 0, \qquad x_1x_2 + \cdots + x_1x_3 + \cdot = 0$$

und ebenso für die Coordinaten ξ_i

$$\mathrm{T} = \xi_1^2 + \cdots = 0, \qquad \mathrm{U} = \xi_1\xi_2 + \cdots + \xi_1\xi_3 + \cdot = 0$$

Flächen des von ihnen zusammengesetzten linearen Gebildes erster Stufe sind. Man bestimmt in $T + \lambda U = 0$ den Coefficienten oder Parameter λ aus der Forderung, dass der Punkt (a, b, c, d) und damit seine Gruppe der Fläche angehöre, d. h. aus

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)+\lambda(ab+bc+cd+da+ac+bd)=0, \text{ etc.}$$

Weil wieder $T + 2U = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$

ist, so liegt die gemeinsame Curve der Flächen $T = 0$, $U = 0$, welche die Grundcurve des Systems ist, ganz in der E.-Ebene, d. h. alle Flächen des Gebildes berühren $T = 0$, $U = 0$ und einander längs ihres gemeinsamen imaginären Querschnittes mit der E.-Ebene. Der zugehörige gemeinsame Tangentenkegel hat analog wie in 1) den E.-Punkt zu seinem Mittelpunkt; er ist die durch den E.-Punkt gehende Fläche des Gebildes, sowie der Kegelschnitt in der E.-Ebene die von ihr berührte Fläche desselben ist. Das Gebilde ist zugleich ein Büschel und eine Schaar von Flächen zweiten Grades.

4) Die Punkte der Permutationsgruppe (a, b, c, d) liegen zu sechs resp. zu vier in Ebenen, deren Gleichungen die Formen haben

$$(x_i + x_j + x_k) + \lambda x_l = 0, \quad (x_i + x_j) + \mu (x_k + x_l) = 0;$$

vier und resp. drei nach § 24 leicht näher zu bestimmende Büschel. Der Punkt (a, b, c, d) liegt in der Ebene

$$x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0,$$

wenn $\lambda = -(a + b + c) : d$ ist und in der Ebene

$$(x_1 + x_2) + \mu (x_3 + x_4)$$

für $\mu = -(a + b) : (c + d)$; offenbar enthält die Ebene der ersten Gleichung die sechs Punkte der Gruppe von der vierten Coordinate d, deren drei erste Coordinaten die Permutationen von (a, b, c) liefern; man kann die Gleichung des Kegelschnittes bilden, dem sie angehören. Es giebt also vier solcher Ebenenbüschel.

Ebenso enthält die Ebene der zweiten gewählten Gleichung die vier Punkte, deren zwei erste Coordinaten a, b oder b, a und deren zwei letzte c, d oder d, c sind. Man stelle die Gleichungen aller Ebenen beider Gruppen auf und gebe an, wie viele und welche Ebenen des Gesammtsystems durch jeden Punkt der Gruppe gehen.

5) Die Gleichung des Kegelschnittbüschels stellt auch die Gruppe seiner Grundpunkte, etc. die Gleichung des Büschels von Flächen zweiten Grades die Grundcurve desselben, also die Curve vierter Ordnung erster Art, und die Gleichung der Schaar von Flächen zweiten Grades die gemeinsame Developpable derselben dar, die Developpable vierter Classe erster Art. Man kann die Gleichungen dieser Gebilde daraus ableiten.

6) Die Gleichung

$$a_{34}p_{12}+a_{14}p_{23}+a_{24}p_{31}+a_{23}p_{14}+\cdots+\lambda(b_{34}p_{12}+\cdots)=0$$

mit den p_{ik} als Strahlencoordinaten und den a_{ik}, b_{ik} als bestimmten Coefficienten stellt für λ als einem unbestimmten Parameter ein Büschel von linearen Complexen und damit auch das Gemeinsame derselben, eine lineare Congruenz dar. Die Coefficienten der Veränderlichen in ihr, die $(a_{ik}+\lambda b_{ik})$ können in zwei Arten so bestimmt werden, dass sie selbst die Coordinaten einer Geraden sind, nämlich für diejenigen Werthe λ_1, λ_2 von λ, für welche die Identität der Strahlencoordinaten befriedigt wird oder aus

$$(a_{12}+\lambda b_{12})(a_{34}+\lambda b_{34})+\cdots=0.$$

Für diese zwei Werthe λ_1, λ_2 drückt die Gleichung des Büschels der Complexe aus, dass die Strahlen der gemeinsamen oder Grund-Congruenz je eine feste Gerade schneiden und man darf also sagen, dass die Strahlen einer linearen Congruenz die Gesammtheit der Transversalen zu zwei windschiefen Geraden bilden, für welche

$$p_{ik}^{(1)}=a_{ik}+\lambda_1 b_{ik}, \quad \text{resp.} \quad p_{ik}^{(2)}=a_{ik}+\lambda_2 b_{ik}$$

sind. Als Wurzeln einer quadratischen Gleichung können λ_1, λ_2 reell und verschieden oder conjugiert imaginär und im Besonderen einander gleich sein. Beispiele des ersten Falles sind die Congruenzen im § 30, 1 aus den F.-Geraden; Beispiele des zweiten die Transversalen-Congruenzen zu conjugiert imaginären Geraden zweiter Art, die wir in § 11 kennen lernten. Da die Strahlen einer linearen Congruenz, welche eine gegebene Gerade schneiden, die eine Regelschaar eines einfachen Hyperboloids bilden, welches diese mit den Leitgeraden bestimmt, so wird ersichtlich, dass dem Fall gleicher Wurzeln λ eine lineare Congruenz entspricht, bei welcher alle diese Hyperboloide ein gemeinschaftliches windschiefes Flächenelement (II, § 36, 15; § 54) längs der Geraden

$$p_{ik}=a_{ik}+\lambda_{12}b_{ik} \quad \text{besitzen.}$$

7) Die Permutationsgruppen aus den Strahlencoordinaten p_{ik} oder π_{ik} können wir in linearen Complexen verschiedener Typen ordnen und in einem linearen Gebilde erster Stufe aus gewissen speciellen Complexen zweiten Grades vereinigen. Die Typen der ersten müssen sein

$$\begin{aligned}
&(p_{12}+p_{23}+p_{31}+p_{14}+p_{24})+\lambda p_{34}=0,\\
&(p_{12}+p_{23}+p_{31}+p_{14})+\mu(p_{24}+p_{34})=0,\\
&(p_{12}+p_{23}+p_{31})+\nu(p_{14}+p_{24}+p_{34})=0;
\end{aligned}$$

und in diesen Büscheln linearer Complexe werden durch einen Strahl der Permutationsgruppe (a, b, c, d, e, f), der ihnen angehören soll, die Parameter bestimmt, nämlich resp.

$$\lambda = -(a+b+c+d+e):f,$$
$$\mu = -(a+b+c+d):(e+f),$$
$$\nu = -(a+b+c):(d+e+f).$$

Mit Rücksicht auf das Vorhergegangene kann man dieselben charakterisieren und die zugehörigen Geraden bezeichnen.

Das Büschel der Complexe zweiten Grades der ganzen Permutationsgruppe lässt sich aus den beiden speciellen durch die Permutation der Veränderlichen nicht geänderten Complexen zweiten Grades, dem sechsgliedrigen

$$p_{12}^2 + \cdots + p_{34}^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma p_{ik}^2 = 0$$

und dem fünfzehngliedrigen

$$p_{12}p_{23} + \cdots + p_{12}p_{24} + \cdots + p_{24}p_{34} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma p_{ik}p_{jh} = 0$$

linear zusammensetzen in der Form

$$\Sigma p_{ik}^2 + \lambda \Sigma p_{ik}p_{jh} = 0,$$

in welcher der Parameter λ sich für die Gruppen (a, b, c, d, e, f) als

$$\lambda = -(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$
$$:(ab+ac+\cdots+bc+\cdots+cd+\cdots+de+\cdot+ef),$$

schreiben wir $\lambda = -\Sigma a^2 : \Sigma ab$, bestimmt. Die Congruenz

$$\Sigma p_{ik}^2 = 0, \qquad \Sigma p_{ik}p_{jh} = 0$$

oder dem Parameter -2 entsprechend $(p_{12} + \cdots + p_{34})^2 = 0$ ist die gemeinsame.

8) Die Tripel von Elementen einer Punktreihe

$$a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = 0, \quad b_0x_1^3 + \cdots = 0$$

bestimmen die Involution aus unendlich vielen solchen Tripeln

$$(a_0 + \lambda b_0)x_1^3 + 3(a_1 + \lambda b_1)x_1^2x_2 + \cdots = 0;$$

zu jedem Punkt y_i der Reihe gehört eine durch den Parameter λ aus

$$(a_0y_1^3 + \cdots) + \lambda(b_0y_1^3 + \cdots) = 0$$

bestimmte Gruppe, deren zwei andere Punkte die nach Ausscheidung des zu y_i gehörenden linearen Factors bleibende quadratische Gleichung liefert. Wenn man λ so bestimmt, dass die vorige Gleichung in $x_2 : x_1$ zwei gleiche Wurzeln hat, was auf vier Arten möglich ist, so erhält man die vier Tripel der Involution mit zwei vereinigten Elementen. Ein Tripel aus drei zusammenfallenden Elementen, welches also drei von diesen absorbieren würde, existiert in der Involution dritten Grades im Allgemeinen nicht.

35. Setzt man weiter zur Bestimmung einer geometrischen Form zwei lineare Bedingungen weniger gegeben voraus als erforderlich sind, so erhält man für jede willkürliche Annahme von zwei fehlenden Bedingungen eine bestimmte Form der vorgesetzten Art und kann durch drei von diesen mit zwei veränderlichen Coefficienten oder Parametern das ganze zweifach unendliche System der durch jene Bedingungen verbundenen Formen darstellen.

Hätte man bei drei von einander unabhängigen Annahmen der fehlenden Bedingungen die Formen

$$U^{(0)} = 0, \qquad U^{(1)} = 0, \qquad U^{(2)} = 0$$

resp. erhalten, so stellt die Gleichung

$$\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} + \varkappa_2 U^{(2)} = 0 \qquad \text{oder mit}$$

$\varkappa_1 : \varkappa_0 = \lambda_1, \quad \varkappa_2 : \varkappa_0 = \lambda_2$ also $U^{(0)} + \lambda_1 U^{(1)} + \lambda_2 U^{(2)} = 0$

das System dar; denn alle durch dasselbe ausgedrückten Formen genügen den vorgeschriebenen gemeinsamen Bedingungen und die Hinzufügung von zwei weiteren linearen Bedingungen liefert zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse der Coefficienten $\varkappa_i$ oder der beiden Parameter. Wir bezeichnen daher die vorige Gleichung als die Gleichung eines linearen Gebildes zweiter Stufe. Wenn die Functionen U lineare homogene Functionen von drei Veränderlichen x_i resp. ξ_i sind, so erhalten wir die schon bekannte Ausdrucksweise der Geraden und Punkte der Ebene und der Ebenen und Geraden des Bündels durch drei derselben wieder, im Fall der Reduction jener linearen Functionen auf die einzelnen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 resp. ξ_1, . . selbst die Gleichungen beliebiger Elemente in der zuerst erhaltenen Form.

Die Kegelschnitte durch drei Punkte oder mit drei festen Tangenten in derselben Ebene, die Flächen zweiten Grades durch sieben Punkte, an sieben Tangentialebenen oder was dem äquivalent ist, z. B. also durch eine Gerade und vier Punkte, durch zwei erzeugende Gerade der einen und eine der andern Schaar, etc. sind lineare Gebilde zweiter Stufe; aber die Existenz gemeinsamer Punkte oder Tangenten etc. ist in der Ebene und im Bündel nicht erforderlich, wie uns auch das elementare Beispiel der zu einem festen Kreis orthogonalen Kreise (I, § [36^b]) lehrt. Dieselben bilden ein lineares System

zweiter Stufe, weil die Orthogonalität eines Kreises

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

zu einem festen Kreis

$$x^2 + y^2 + 2\alpha_0 x + 2\beta_0 y + \gamma_0 = 0$$

die lineare Bedingung für die drei Coefficienten liefert

$$\gamma_0 + \gamma + 2(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0) = 0.$$

Ebenso bilden die zu zwei Kugeln orthogonalen Kugeln ein lineares Gebilde zweiter Stufe, weil die verlangte Orthogonalität zwischen den vier unbestimmten Coefficienten der Gleichung der Kugel zwei lineare Bedingungen feststellt. Aber lineare Gebilde zweiter Stufe aus Flächen haben gemeinsame Punkte, weil die drei bestimmenden Flächen $U^{(0)}=0$, $U^{(1)}=0$, $U^{(2)}=0$ für n als Grad der Function U in den Veränderlichen in der That n^3 reelle oder in Paaren conjugiert imaginäre gemeinsame Elemente besitzen — die Kugeln des vorigen Beispiels eine gemeinsame Curve, den absoluten Kreis im Unendlichen. Und lineare Gebilde zweiter Stufe aus Complexen haben eine gemeinsame Regelschaar, dieselbe, die den drei Complexen $U^{(0)}=0$, $U^{(1)}=0$ und $U^{(2)}=0$ zugleich angehört.

In derselben Weise fortschreitend gelangen wir zu den entsprechenden Vorstellungen und Ausdrucksformen für lineare Gebilde dritter, vierter Stufe, etc. und zu dem Begriff eines linearen Gebildes k^{ter} Stufe. Die Verbindung eines solchen mit einem der Raumelemente führt zu dem Begriff einer Involution k^{ter} Stufe in diesem; z. B. der Schnitt des linearen Gebildes zweiter Stufe aus Flächen n^{ter} Ordnung mit einer Geraden zur involutorischen Reihe n^{ter} Ordnung und zweiter Stufe in dieser Geraden. Ein lineares Gebilde dritter Stufe sind die Kreise in einer Ebene, weil sie durch die zwei absoluten Punkte derselben gehen; ein lineares Gebilde vierter Stufe die gleichseitigen Hyperbeln einer Ebene, weil sie die Strecke zwischen den absoluten Punkten derselben harmonisch theilen, aber auch alle Kugeln des Raumes, die mit einander den absoluten Kreis gemein haben, so wie die Kugeln ein lineares Gebilde dritter Stufe bilden, die zu einer festen Kugel orthogonal sind, weil diess eine lineare Bedingung zwischen den vier unbestimmten Coefficienten ihrer Gleichung liefert. Die Punkte und Ebenen des Raumes bilden ein lineares Gebilde

dritter Stufe, durch vier von ihnen wird jeder und jede fünfte bestimmt; das System aller Geraden des Raumes ist kein lineares Gebilde vierter Stufe, weil die fünf eine Gerade bestimmenden Grössen durch eine quadratische Bedingung beschränkt sind.

Wenn wir das lineare Gebilde k^{ter} Stufe in der homogenen Form schreiben

$$x_0 U^{(0)} + x_1 U^{(1)} + \cdots + x_k U^{(k)} = 0,$$

so wird durch jede bestimmte Werthegruppe der Verhältnisse der k letzten Coefficienten $x_1, \ldots x_k$ zum ersten x_0 ein bestimmtes Element des Gebildes, also eine ihm angehörige Gruppe, Curve, Fläche, etc. ausgesondert, und es liegt nahe, die $(k+1)$ Coefficienten der Gleichung als die homogenen Coordinaten des Elementes im linearen Gebilde k^{ter} Stufe zu bezeichnen; es ist in Bezug auf die $(k+1)$ fundamentalen Formen desselben durch ihre Verhältnisse bestimmt, wie der Punkt im Raum als dem linearen Elementargebilde dritter Stufe durch die Verhältnisse seiner vier Coordinaten in Bezug auf vier feste Punkte desselben.

Dividiert man einen, etwa den ersten, Coefficienten heraus oder schreibt man mit der Abkürzung $x_i : x_0 = \lambda_i$ die Gleichung des Gebildes in der Form

$$U^{(0)} + \lambda_1 U^{(1)} + \lambda_2 U^{(2)} + \cdots + \lambda_k U^{(k)} = 0,$$

so kann man die k es bestimmenden Grössen λ die nicht homogenen Coordinaten oder auch die Parameter des Elementes im linearen Gebilde k^{ter} Stufe nennen. Das Gebilde enthält $k$fach unendlich viele Elemente, weil jeder dieser Parameter alle Werthe annimmt unter Veränderung des bezüglichen Elementes, oder es erscheint als ein Gebiet von k Dimensionen. Diess ist die in § 31 gemeinte Art der Bildung von Gebieten oder Räumen von höherer Dimensionszahl im gewöhnlichen Raum sowie in der Ebene resp. im Bündel; die Involutionen k^{ter} Stufe in der Geraden, etc. Abgesehen noch von der geometrischen Deutung der Parameter (vergl. § 37), erläutert sich die Analogie mit den Coordinaten der Elemente in den linearen Elementargebilden durch die Betrachtung der allgemeinen Gleichungen von algebraischen Curven, Flächen, etc. In der Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in der Ebene ist der veränderliche Theil irgend eines

Gliedes $x_1^p x_2^q x_3^{n-(p+q)}$ die linke Seite einer Gleichung, welcher geometrisch eine aus der $p$fachen Wiederholung der F.-Geraden $x_1 = 0$, der $q$fachen von $x_2 = 0$ und der $(n-p-q)$fachen von $x_3 = 0$ zusammengesetzte Curve n^{ter} Ordnung entspricht; in der Gleichung einer Fläche n^{ter} Classe enthält ebenso jedes Glied die linke Seite der Gleichung einer speciellen Fläche n^{ter} Classe, zusammengesetzt aus in Summa n Wiederholungen der vier F.-Punkte; etc. Analog auch für die durch Gleichungen mit mehreren Reihen von Veränderlichen nach § 31 dargestellten Gebilde, was wir hier nicht ausführen wollen.

Die Gleichung der Curve, Fläche, etc. ist also die lineare Verbindung der Gleichungen von

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2), \quad \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), \text{ etc.}$$

solchen speciellen Curven, Flächen, Complexen oder sie ist ein lineares Gebilde von der Stufe

$$\tfrac{1}{2}n(n+3), \quad \tfrac{1}{6}n(n^2+6n+11), \text{ etc.},$$

wenn keiner ihrer Coefficienten Null ist; durch das Verschwinden eines Coefficienten vermindert sich jeweilen die Stufenzahl um Eins. In diesem Sinn kann man die Coefficienten der Gleichung der Curve, der Fläche, des Complexes als ihre homogenen Coordinaten und die Verhältnisse derselben zu einer unter ihnen als ihre Parameter oder nicht-homogenen Coordinaten bezeichnen.

Die Curven dritter Ordnung in bestimmter Ebene und die Flächen zweiten Grades erscheinen so als lineare Gebilde neunter Stufe, zusammengesetzt aus den je zehn speciellen Curven und Flächen dieser Ordnung, die durch die Wiederholung und Verbindung der F.-Geraden und F.-Ebenen entstehen; dem Begriff „Kegelschnitt in einer bestimmten Ebene" entspricht ein lineares Gebilde fünfter Stufe, zusammengesetzt aus den sechs festen speciellen Kegelschnitten, die die doppelt gezählten F.-Geraden und ihre Paare bilden; sie bilden Gebiete von neun, resp. von fünf Dimensionen innerhalb des gewöhnlichen Raumes unserer Anschauung. Durch Verschwinden von Coefficienten werden sie auf lineare Gebilde von geringerer Stufenzahl und in Gebiete von entsprechend geringerer Dimensionszahl zurückgebracht. Sie müssen zerfallen bei der Reduction auf die Dimensionszahl Eins und können es schon bei höheren Dimensionszahlen. So

bilden die Flächen zweiten Grades, die drei oder alle F.-Punkte enthalten, ein lineares Gebilde sechster resp. fünfter Stufe; die Flächen zweiten Grades durch einen festen Kegelschnitt ein lineares Gebilde vierter Stufe, wie z. B. die sämmtlichen Kugeln des Raumes; die einfachen Hyperboloide durch zwei Gegenkanten des F.-Tetraeders bilden ein solches von der dritten, die durch drei aufeinanderfolgende, die kein Dreieck bilden, eines von der zweiten und die durch ein windschiefes Viereck von F.-Geraden ein lineares Gebilde erster Stufe. (§ 29,3.)

Die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in F.-Punkten ist nach § 28,7 ein lineares Gebilde von der Stufe acht; die mit Doppelinflexionsknoten in den drei F.-Punkten nach § 28,10 ein solches von der Stufe zwei.

Auch ist nach § 28,6 die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt A_1 in einem der F.-Punkte ein lineares Gebilde von der Stufe sechs und durch sechs weitere Punkte also bestimmt; kennt man nun vier von diesen B, C, D, E, so ist sie ein Gebilde zweiter Stufe und man kann als die drei das Gebilde bestimmenden Curven $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ die Tripel von Geraden wählen, die aus je einem Paar von Geraden durch den Doppelpunkt und einer dritten bestehen, welche immer alle Punkte enthalten, also A_1B, A_1C, DE; A_1C, A_1D, BE; A_1D, A_1B, CE. Kennt man ihrer fünf $B, C \ldots F$, so kann man als $U^{(0)}$ und $U^{(1)}$ je einen Kegelschnitt und eine Gerade nehmen, die beide durch den Doppelpunkt und zusammen durch die übrigen Punkte gehen.

Die Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt, von der man sechs Punkte $A, \ldots . F$ kennt, erscheint als lineares Gebilde dritter Stufe und man kann als die bestimmenden Curven $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ die Tripel von Geraden wählen, die je alle sechs Punkte enthalten.

Man schreibt leicht die Gleichungen solcher Gebilde; so für das erste unter Anwendung des Symbols $\overline{A_1B}$ für die linke Seite der Gleichung der Geraden von A_1 nach B

$$\overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C} \cdot \overline{DE} + \lambda_1 \overline{A_1C} \cdot \overline{A_1D} \cdot \overline{BE} + \lambda_2 \overline{A_1D} \cdot \overline{A_1B} \cdot \overline{CE} = 0,$$

und für das letzte

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} + \lambda_1 \overline{AC} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{DF} + \lambda_2 \overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE} + \lambda_3 \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF} = 0;$$

die des mittleren schreibt man mit $\overline{ABCDE}$ als Symbol für den Kegelschnitt durch die fünf Punkte

$$\overline{A_1F} \,.\, \overline{A_1BCDE} + \lambda_1 \overline{A_1E} \,.\, \overline{A_1BCDF} = 0.$$

Oder bezeichnen wir durch $a_x = 0$, $b_x = 0$, etc. Gerade derselben Ebene, nämlich resp.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad b_1x_1 + \cdot\cdot = 0, \text{ etc.}$$

so ist $$\varkappa_1 b_x c_x + \varkappa_2 c_x a_x + \varkappa_3 a_x b_x = 0$$

ein lineares Gebilde zweiter Stufe von Kegelschnitten durch ihre Schnittpunkte; unter Hinzufügung der vierten Geraden $d_x = 0$ ist $$\varkappa_1 b_x c_x + \varkappa_2 d_x a_x = 0$$

das Büschel von Kegelschnitten durch die vier reellen Schnittpunkte der Geraden b und c mit den Geraden a und d; insbesondere $$\varkappa_1 b_x c_x + \varkappa_2 a_x^2 = 0$$

die Gesammtheit der Kegelschnitte — Büschel und Schaar —, die in Punkten von $a_x = 0$ durch die Geraden b und c berührt werden.

Kegelschnittbüschel mit theilweise oder ganz imaginären gemeinsamen Punkten werden durch

$$U + \lambda a_x b_x = 0, \qquad U + \lambda V = 0$$

dargestellt, für $U = 0$ und $V = 0$ als Gleichungen von Kegelschnitten. Und wenn insbesondere $a_x = 0$ den Kegelschnitt $U = 0$ berührt und $b_x = 0$ durch den zugehörigen Berührungspunkt geht, so werden nach I, § 35 die Kegelschnitte des ersten Büschels einander in dem zugehörigen Punkt osculieren.

Wir sehen damit eine unerschöpfliche Menge von Uebungen zugänglich gemacht, die wir aber nicht weiter vermehren, sondern nur empfehlen wollen.

Wir fügen nur noch die Bemerkung hinzu, dass also solche Gebilde höherer Stufen sich ebenso aus denen niederer Stufen zusammensetzen lassen, wie die elementaren Gebilde zweiter und dritter Stufe aus denen der ersten im Vorhergehenden.

1) Wenn $(k + 2)$ Elemente, also Curven, Flächen, etc. zu demselben linearen Gebilde k^{ter} Stufe gehören, so ist die Summe ihrer mit bestimmten Coefficienten multiplicierten Gleichungen Null. So für drei Strahlen oder Ebenen im Büschel, für drei Punkte einer Geraden bei den Elementargebilden § 19, 6. Es sind nur verschiedene Ausdrücke für dieselbe Sache.

2) Es ist offenbar, dass die linearen Gebilde erster Stufe mit zwei Veränderlichen, d. h. die Involutionen aus Curven- oder Kegel-Büscheln und aus Flächenbüscheln und aus Curven- oder Kegel- und Flächen-Schaaren als Reihen der Schnittpunkte der Büschel mit einer Geraden in der Ebene oder im Raum, der Gruppen von Schnittgeraden mit einer Ebene des Bündels, der Gruppen von Tangenten aus einem Punkt in der Ebene, von Tangentialebenen aus einer Geraden im Bündel, von Tangentialebenen aus einem Strahl im Raum entstehen. (Vergl. § 34.) Man erläutere die Involutionen k^{ter} Stufe an dem System von Elementen im Elementargebilde erster Stufe, die aus seiner Combination mit linearen Gebilden zweiter, dritter, etc. k^{ter} Stufe von Flächen entspringen.

3) Die Curvenbüschel und die linearen Gebilde von Curven in der Ebene werden als ebene Querschnitte der Flächenbüschel und der linearen gleichstufigen Gebilde von Flächen erhalten; und dualistisch entsprechend im Bündel.

4) Wenn im linearen Gebilde zweiter Stufe aus $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ das durch drei Punkte 1, 2, 3 gehende Element gefunden werden soll, so kann man die Büschel aus $U^{(0)}$, $U^{(1)}$; $U^{(0)}$, $U^{(2)}$; $U^{(0)}$, $U^{(3)}$ und ihre durch 3 gehenden Elemente betrachten. Dieselben bilden ein lineares Gebilde zweiter Stufe, von dessen Elementen wir diejenigen bestimmt denken, die der Bedingung 2 genügen; dieselben bestimmen ein Büschel, in welchem ein Element der Bedingung 1 genügt, und diess ist das gesuchte. Diese Construction ist offenbar allgemein für lineare Gebilde k^{ter} Stufe gültig.

5) Die Gleichung der Kugel vom Mittelpunkt (a, b, c) und dem Radius r in Cartesischen Coordinaten

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

zeigt, dass die Kugeln des Raumes ein Gebilde vierter Stufe bilden. Dasselbe ist linear, weil in Bezug auf fünf beliebig gewählte Kugeln

$$K_i \equiv (x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2-r_i^2=0 \quad (i=1,2,3,4,5)$$

jede beliebige Kugel durch die lineare Zusammensetzung

$$K \equiv \varkappa_1 K_1 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 + \varkappa_4 K_4 + \varkappa_5 K_5$$

mit eindeutig bestimmten Coefficienten $\varkappa_i$ ausgedrückt werden kann; die $\varkappa_i$ werden die homogenen Coordinaten der Kugel K in Bezug auf die fünf F.-Kugeln K_i genannt.

Sind dann $\varkappa_i^{(1)}$ und $\varkappa_i^{(2)}$, etc. die Coordinaten bestimmter Kugeln, so lassen sich die Coordinaten der linearen Systeme erster, zweiter, dritter Stufe aus Kugeln ausdrücken als

$$\lambda_1 \varkappa_i^{(1)} + \lambda_2 \varkappa_i^{(2)}, \qquad \lambda_1 \varkappa_i^{(1)} + \lambda_2 \varkappa_i^{(2)} + \lambda_3 \varkappa_i^{(3)}$$

und resp. $$\lambda_1 \varkappa_i^{(1)} + \lambda_2 \varkappa_i^{(2)} + \lambda_3 \varkappa_i^{(3)} + \lambda_1 \varkappa_i^{(4)}.$$

6) Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Coordinaten x_i scheidet aus sämmtlichen Kugeln des Raumes eine dreifach unendliche Menge derselben aus, die man als einen Kugelcomplex n^{ten} Grades bezeichnet; zwei solche Gleichungen bestimmen die zweifach unendlich vielen gemeinsamen Kugeln von zwei Complexen, eine Congruenz von Kugeln; drei eine einfach unendliche Menge derselben und vier eine Gruppe von Kugeln. Die Analogie der Bezeichnungen mit denen der Strahlensysteme hat tiefere Bedeutung. Die durch lineare Gleichungen also bestimmten Systeme werden als Netze, Bündel und Büschel von Kugeln bezeichnet. (II, § 33.)

7) Die Kugel

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2(a_{14}x + a_{21}y + a_{31}z) + a_{44} = 0$$

hat in Cartesischen rechtwinkligen Coordinaten das Centrum von den Coordinaten

$$-\frac{a_{14}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

und das Radiusquadrat

$$\frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{31}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}^2}.$$

Dagegen ist die Cartesische Gleichung der Kugel von den homogenen Coordinaten x_i in 5)

$$\Sigma x_i(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\Sigma a_i x_i \,.\, x + \Sigma b_i x_i \,.\, y + \Sigma c_i x_i \,.\, z) + \Sigma(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2)\, x_i = 0$$

und hat also die Mittelpunktscoordinaten

$$x = \Sigma a_i x_i : \Sigma x_i, \quad y = \Sigma b_i x_i : \Sigma x_i, \quad z = \Sigma c_i x_i : \Sigma x_i$$

und das Radiusquadrat

$$r^2 = \{(\Sigma a_i x_i)^2 + (\Sigma b_i x_i)^2 + (\Sigma c_i x_i)^2 - \Sigma x_i \Sigma(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2)\, x_i\} : (\Sigma x_i)^2.$$

Der Zähler des letzten Ausdruckes kann geschrieben werden

$$\Sigma(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)\, x_i^2 + 2\Sigma\Sigma(a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k)\, x_i x_k - \Sigma\Sigma(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2 + a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 - r_k^2)\, x_i x_k - \Sigma(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 - r_i^2)\, x_i^2$$

oder auch

$$\Sigma r_i^2 x_i^2 - \Sigma\Sigma\{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2 + (c_i - c_k)^2 - (r_i^2 + r_k^2)\}\, x_i x_k.$$

Hier ist die Summe der drei ersten Quadrate der Klammergrösse des zweiten Gliedes das Quadrat der Centraldistanz der Kugeln K_i und K_k, sodass die ganze Klammer verschwindet, wenn diese Kugeln orthogonal zu einander sind.

Wenn also die fünf F.-Kugeln in Paaren orthogonal zu einander sind, so wird das Radiusquadrat der Kugel $\varkappa_i$ gleich

$$\Sigma r_i^2 \varkappa_i : (\Sigma \varkappa_i)^2$$

in stricter Analogie zu der Distanzformel der rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten.

8) Man nennt die Differenz vom Quadrat der Centraldistanz d_{ik}^2 und der Summe der Radienquadrate $(r_i^2 + r_k^2)$ zweier Kugeln die Potenz derselben und bezeichnet sie etwa mit π_{ik}. Für die beiden Kugeln

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}'x + \cdots = 0$$

ist dieselbe

$$\pi_{1,2} = a_{44} + a_{44}' - 2a_{14}a_{14}' - 2a_{24}a_{24}' - 2a_{34}a_{34}'.$$

Die Potenz ist auch das doppelte Product der Radien in den Cosinus des Winkels der beiden Kugeln.

Für Kugel und Ebene wird die Potenz zum doppelten Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene; für zwei Ebenen zum doppelten des Cosinus ihres Winkels.

9) Eine Kugel wird bestimmt durch ihre Potenzen in Bezug auf irgend fünf nicht zu einem linearen Gebilde dritter Stufe gehörige, also nicht zu einer Kugel orthogonale Kugeln, die man als F.-Kugeln bezeichnen kann. Man erhält so die Potenzcoordinaten der Kugeln als der Elemente des linearen Gebietes von vier Dimensionen, welches alle Kugeln bilden. Die Annahme, dass die fünf F.-Kugeln zu einander orthogonal sind, giebt die einfachsten Ausdrucksformen.

36. Wir sprechen zur Erläuterung des Vorhergehenden und zur Anknüpfung einiger für weitere Entwicklungen im nächsten Abschnitt wichtigen Ergebnisse noch insbesondere von den linearen Gebilden erster Stufe aus Curven in der Ebene und von denen zweiter Stufe aus Flächen.

Ein lineares Gebilde erster Stufe in der Ebene

$$\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} = 0 \quad \text{oder} \quad U^{(0)} + \lambda_1 U^{(1)} = 0,$$

aus Curven n^{ter} Ordnung resp. Classe ist durch zwei derselben und durch $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ lineare Bedingungen oder Elemente gegeben; aber die Zahl der gemeinsamen Elemente aller Curven des Gebildes ist n^2, oder alle Curven n^{ter} Ordnung resp. Classe, welche $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ Elemente gemein haben, besitzen noch $n^2 - \frac{1}{2}n(n+3) + 1$ also $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gemeinsame feste Elemente derselben Art. Und

durch jene sind diese bestimmt*). Diese Zahl ist für $n = 1$ und $n = 2$ Null, für $n = 3$, 4 und 5 resp. im allgemeinen Fall gleich 1, 3, 6 etc. und für die Theorie der bezüglichen Curven von grosser Bedeutung. Alle Curven dritter Ordnung, die durch acht feste Punkte gehen, enthalten noch einen neunten Punkt; alle Curven vierter Ordnung durch dreizehn feste Punkte enthalten drei weitere feste Punkte; etc.

Ein lineares Gebilde zweiter Stufe von Flächen

$$U^{(0)} + \lambda_1 U^{(1)} + \lambda_2 U^{(2)} = 0$$

erfordert $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 3$ Punkte resp. Ebenen zu seiner Bestimmung. Und da alle Flächen des Gebildes die n^3 Elemente gemein haben, in denen die bestimmenden Flächen sich durchdringen, so erhält man den analogen Satz: Alle Flächen n^{ter} Ordnung resp. Classe, welche

$$\frac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 11n) - 2$$

gemeinsame Elemente haben, enthalten noch

$$\frac{1}{6}(n-1)(5n^2 - n - 12)$$

andere durch jene mitbestimmte gemeinsame Elemente derselben Art. Diese Zahl ist für $n = 1$ Null, für $n = 2$ ist sie Eins, für $n = 3$ bereits zehn u. s. w. Alle Flächen zweiten Grades durch sieben feste Punkte gehen noch durch einen achten festen Punkt, alle Flächen dritter Ordnung durch siebzehn feste Punkte gehen durch zehn andere solche.

In analoger Weise ist ein lineares Gebilde dritter Stufe aus Complexen zweiten Grades durch sechszehn seiner Strahlen bestimmt, während die vier bestimmenden Complexe mit einander zweiunddreissig Strahlen gemein haben, durch die alle Complexe des Gebildes gehen müssen; sodass sechszehn Strahlen hier andere sechszehn bestimmen.

Aber wir wollen auch, wenigstens für ebene Curven n^{ter} Ordnung, erwähnen, inwiefern das Auftreten singulärer Punkte die bezüglichen Sätze modificiert. Wir erläutern zunächst an dem Fall der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Durch diese Doppelpunkte als solche und sieben andere Punkte ist ein Büschel solcher Curven bestimmt und da die gemein-

*) Dass der Satz seine unmittelbare Gültigkeit verliert, wenn die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte einer Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung angehören, wollen wir nur anmerken.

samen Doppelpunkte für acht Schnittpunkte solcher Curven zählen, so sehen wir, dass dieselben mit sieben anderen Curvenpunkten einen achten bestimmen, den alle Curven des Büschels enthalten. Und sofort allgemein für Curven n^{ter} Ordnung mit σ gegebenen singulären Punkten. Ein Büschel solcher Curven fordert zu seiner Bestimmung $\frac{1}{2}n(n+3) - 3\sigma - 1$ andere Punkte und wenn man diese einfach und die singulären vierfach gezählt von n^2 abzieht, so erhält man als Rest

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sigma.$$

Es ist die Zahl, die man als das Geschlecht der Curve bezeichnet. (Vergl. II, § 1, Anm.) σ ist die Summe der Anzahlen δ und $\varkappa$ der Doppel- und Rückkehrpunkte a. a. O. Es ist sofort klar, dass die dual entsprechende Formel die analoge Bedeutung hat.

Weil diese Zahl ihrer geometrischen Bedeutung nach nicht negativ sein kann, so ist der mögliche Maximalwerth von σ durch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gegeben, d. h. eine eigentliche Curve n^{ter} Ordnung kann nicht mehr als

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

singuläre Punkte und eine eigentliche Curve n^{ter} Classe nicht mehr als so viel singuläre Tangenten haben.

Bei Büscheln von Curven mit gemeinsamen singulären Punkten im Maximum der Zahl sind sämmtliche Grundpunkte zur Bestimmung erforderlich und hinreichend; bei Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt fünf, bei Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten vier, bei solchen fünfter mit sechs Doppelpunkten noch einer; und man sieht, dass von der sechsten Ordnung an die Doppelpunkte nicht sämmtlich gegeben sein können. Man nennt solche Curven vom Geschlecht Null auch rationale Curven.

Mit diesen wichtigen Ergebnissen brechen wir die Entwickelung einstweilen ab, um für den Parameterbegriff die geometrische Deutung und Brauchbarkeit zu gewinnen.

B. Der Zusammenhang zwischen den neun Durchschnittspunkten von zwei Curven dritter Ordnung kann mittelst der Abhängigkeit der Punkte von reciproken Coordinaten erläutert und zu einer Construction des neunten aus acht bekannten mittelst des Pascalschen Satzes entwickelt werden.

Man denke drei der Punkte als F.-Punkte projectivischer Coordinaten und bezeichne die fünf übrigen bekannten durch A, B, C, D, E mit den Coordinaten a_i, b_i, c_i, d_i und e_i, den letzten zu bestimmenden durch P mit den Coordinaten p_i. Für einen bestimmten E.-Punkt der Coordinaten erhalten wir nach der Construction in § 16,2 die Punkte der reciproken Coordinaten zu $A, \ldots$ in bestimmten Lagen A', B', C', D', E'. Die Gleichung einer durch die F.-Punkte nach A, B, C und P gehenden Curve dritter Ordnung kann aus den linearen Functionen a_x und b_x der Gleichungen der Geraden AP und BP und aus den quadratischen Functionen $\mathbf{A}_x^2$, $\mathbf{B}_x^2$ der Gleichungen der Kegelschnitte durch die F.-Punkte und das Paar BC resp. durch die F.-Punkte und das Paar AC mittelst eines Parameters zusammengesetzt werden, weil a_x, $\mathbf{A}_x^2$ und b_x, $\mathbf{B}_x^2$ zwei Curven dritter Ordnung durch diese Punkte sind. Dass diese Curve dritter Ordnung auch durch die Punkte D und E geht, wird ausgedrückt, indem wir die Coordinaten d_i und e_i in die Gleichung einsetzen und den Parameter dadurch eliminieren. Wir können das Resultat in der Form schreiben

$$a_d b_e : a_e b_d = \mathbf{A}_e^2 \mathbf{B}_d^2 : \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_e^2,$$

wenn wir mit Ersetzung des Index x durch d, resp. e das Substitutionsresultat dieser Einsetzung in die betreffende Function bezeichnen; es ist die Relation zwischen den neun Punkten. Man kann nun zeigen, dass das zweite dieser Verhältnisse das Doppelverhältniss des Büschels $C'.\ A'D'B'E'$ ist, während das erste das Doppelverhältniss von $P.\ ADBE$ bezeichnet, sodass man die Gleichheit hat

$$(C'.\ A'D'B'E') = (P.\ ADBE) \text{ oder } (C'.\ D'E'A'B') = (P.\ DEAB);$$

und dass ebenso erhalten wird

$$(A'.\ B'C'D'E') = (P.\ BCDE), \text{ etc.}$$

Es ist klar, dass diese Relationen eine einfache lineare Construction des Punktes P mit Hülfe der Punkte von den reciproken Coordinaten A, B, C, D, E liefern.

B. Die Parameter und die Projectivität. Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe.

37. Behufs der geometrischen Deutung der Parameter wenden wir uns zu den Elementargebilden erster Stufe zurück, weil durch Zurückführung auf sie die Erledigung der entsprechenden Fragen für lineare Gebilde beliebiger Stufe erreicht wird.

Ist $\varkappa_0 U^{(0)} + \varkappa_1 U^{(1)} = 0$ oder $U + \lambda V = 0$

ein solches, z. B. eine geradlinige Punktreihe, sodass $U = 0$, $V = 0$ je einen Punkt ausdrücken oder dass mit y_i, z_i als deren Coordinaten

$U \equiv y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 + y_4 \xi_4$ und $V \equiv z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 + z_1 \xi_1$

ist, oder also

$$U + \lambda V \equiv (y_1 + \lambda z_1)\, \xi_1 + (y_2 + \lambda z_2)\, \xi_2 + \cdot\cdot,$$

so sind die Coordinaten x_i eines beliebigen Punktes X in der Reihe YZ gleiche Vielfache von $y_i + \lambda z_i$; man hat also für ϱ als eine beliebige Constante

$x_i = \varrho (y_i + \lambda z_i)$, oder z. B. für $i = 1$ und $i = 2$

sowohl $\varrho = \dfrac{x_1}{y_1 + \lambda z_1}$ als auch $\varrho = \dfrac{x_2}{y_2 + \lambda z_2}$,

und erhält somit für λ die Bestimmungsgleichung

$$x_1 (y_2 + \lambda z_2) = x_2 (y_1 + \lambda z_1), \quad \text{also} \quad \lambda = -\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 z_1 - x_1 z_2},$$

aus welcher die geometrische Bedeutung von λ sofort erhellt. Denn man schreibe

$$\lambda = -\frac{y_1}{z_1} \cdot \frac{1 - \dfrac{x_1}{x_2} : \dfrac{y_1}{y_2}}{1 - \dfrac{x_1}{x_2} : \dfrac{z_1}{z_2}},$$

so folgt durch Einführung der geometrischen Definitionen der Verhältnisse $x_1 : x_2$, etc. nach § 20 mit Bezug auf Fig. 31

$$\lambda = -\frac{y_1}{z_1}\frac{1-(A_1A_2E_{12}X_{12}):(A_1A_2E_{12}Y_{12})}{1-(A_1A_2E_{12}X_{12}):(A_1A_2E_{12}Z_{12})}$$

$$= -\frac{y_1}{z_1}\frac{1-(A_1A_2Y_{12}X_{12})}{1-(A_1A_2Z_{12}X_{12})} = -\frac{y_1}{z_1}\frac{(A_1Y_{12}A_2X_{12})}{(A_1Z_{12}A_2X_{12})}$$

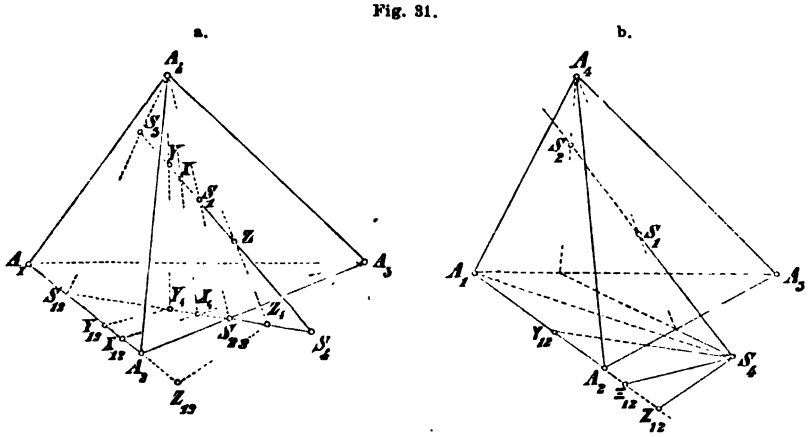
$$= -\frac{y_1}{z_1}(X_{12}A_2Y_{12}Z_{12}).$$

Aus der Fig. 31 erhält man aber durch Projection aus A_3 und sodann aus A_4

$$(X_{12}A_2Y_{12}Z_{12}) = (X_4S_{23}Y_4Z_4) = (XS_1YZ).$$

Der Parameter ist also ein constantes Vielfaches vom Doppelverhältniss des laufenden Punktes mit einem Durchstosspunkt

Fig. 31.



der Reihe und ihren beiden F.-Punkten; die Constante ist das negative Verhältniss der mit jenem Durchstosspunkt gleichnamigen Coordinaten der F.-Punkte.

Da aber überdiess

$$y_1 = \frac{p_{1y}}{e_1}, \quad z_1 = \frac{p_{1z}}{e_1} \quad \text{also} \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{p_{1y}}{p_{1z}} = \frac{S_1Y}{S_1Z}$$

ist, so erhält man scheinbar noch einfacher

$$\lambda = -\frac{S_1Y}{S_1Z}\cdot\frac{XY}{S_1Y}\cdot\frac{S_1Z}{XZ} = -\frac{XY}{XZ};$$

d. h. der Parameter des Elementes der Reihe YZ ist das negative Theilverhältniss desselben in Bezug auf die Grundpunkte.

Ebenso findet man für ein Ebenenbüschel mit den Grundebenen η_i, ξ_i zu dem Ausdruck der Coordinate ξ_i für eine beliebige seiner Ebenen

$$\xi_i = r(\eta_i + \lambda \xi_i)$$

und aus den ξ_1 und ξ_2 z. B. zwei Werthe von r, durch deren Gleichsetzung man λ bestimmt

$$\lambda = -\frac{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2}{\xi_2\zeta_1 - \xi_1\zeta_2} = -\frac{\eta_1}{\zeta_1}\,\frac{1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\eta_1}{\eta_2}}{1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\zeta_1}{\zeta_2}};$$

durch Einführung der geometrischen Bedeutungen aber

$$\lambda = -\frac{\eta_1}{\zeta_1}\,\frac{1 - (A_2A_1\mathbf{E}_{12}\Xi_{12}) : (A_2A_1\mathbf{E}_{12}\mathbf{Y}_{12})}{1 - (A_2A_1\mathbf{E}_{12}\Xi_{12}) : (A_2A_1\mathbf{E}_{12}\mathbf{Z}_{12})}$$

$$= -\frac{\eta_1}{\zeta_1}\,\frac{(A_2\mathbf{Y}_{12}A_1\Xi_{12})}{(A_2\mathbf{Z}_{12}A_1\Xi_{12})} = -\frac{\eta_1}{\zeta_1}\,(\Xi_{12}A_1\mathbf{Y}_{12}\mathbf{Z}_{12})$$

$$= -\frac{\eta_1}{\zeta_1}\,(\Xi\,\Sigma_1\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}),$$

wenn wir mit Ξ, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ die bewegliche Ebene des Büschels und seine beiden Grundebenen resp. bezeichnen, mit Σ_1 aber diejenige seiner Ebenen, welche durch A_1 geht. Es ist ein ganz wie oben zu formulierendes Ergebniss. Dann ist aber noch

$$\eta_1 = \frac{\pi_{1\eta}}{\varepsilon_1}, \quad \zeta_1 = \frac{\pi_{1\zeta}}{\varepsilon_1} \quad \text{und somit} \quad \frac{\eta_1}{\zeta_1} = \frac{\pi_{1\eta}}{\pi_{1\zeta}} = \frac{\sin(\Sigma_1, \mathbf{Y})}{\sin(\Sigma_1, \mathbf{Z})},$$

also endlich

$$\lambda = -\frac{\sin(\Xi, \mathbf{Y})}{\sin(\Xi, \mathbf{Z})},$$

der Parameter des Elementes im Ebenenbüschel ist das negative Theilverhältniss der Ebene in Bezug auf die Grundebenen des Büschels.

1) Die Ebene vom Theilverhältniss λ in dem durch zwei Ebenen $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ bestimmten Büschel für

$$\mathbf{A} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4, \qquad \mathbf{B} \equiv b_1x_1 + \cdots$$

ist daher durch

$$(a_1 + \lambda b_1)\,x_1 + (a_2 + \lambda b_2)\,x_2 + \cdots = 0$$

und für $\lambda = n : m$ durch $(ma_1 + nb_1)\,x_1 + \cdots = 0$ dargestellt.

Man bilde die analogen Ausdrücke für Punktreihe und Strahlbüschel und in Cartesischen resp. Plücker'schen Coordinaten.

2) Die Ebenen $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = 0$ und $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = 0$ sind zu den Ebenen $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ harmonisch conjugiert und die Ebenen $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} = 0$ bilden mit ihnen das Doppelverhältniss $\lambda : \mu$.

Die Gleichung $\mathbf{A}^2 - \lambda^2\mathbf{B}^2 = 0$ d. i. $(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}) = 0$ repräsentiert daher für veränderliches λ eine Involution zweiten Grades mit rellen Doppelelementen $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ im Grundgebilde erster Stufe.

Kann die Vereinigung von zwei projectivischen Gebilden erster Stufe in Bezug auf ihre reell gedachten Doppelelemente analog ausgedrückt werden?

3) Das Doppelverhältniss der vier Durchstosspunkte einer Geraden mit den Flächen eines Tetraeders ist dem entsprechenden Doppelverhältniss der vier Verbindungsebenen derselben mit den Gegenecken desselben Tetraeders gleich. Wir denken das betrachtete Tetraeder als fundamental.

Von den vier Ebenen, welche die Durchstosspunkte mit einer Tetraederkante verbinden, z. B. den Ebenen

$$A_3A_1S_1, \quad A_3A_4S_2, \quad A_3A_1S_3, \quad A_3A_4S_4$$

haben die ersteren als identisch mit den Ebenen $A_3A_1A_2$, $A_3A_4A_1$ die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, die letzteren Gleichungen von der Form $x_1 + \lambda x_2 = 0$, $x_1 + \mu x_2 = 0$ und da nach § 25 die Coordinaten x_1, x_2 von S_3, S_4 resp. gleich π_{24}, $-\pi_{14}$; $-\pi_{23}$, $-\pi_{31}$ sind, so hat man $\lambda = \frac{\pi_{24}}{\pi_{14}}$, $\mu = -\frac{\pi_{23}}{\pi_{31}}$ und das Doppelverhältniss der Durchstosspunkte

$$(S_1S_2S_3S_4) = -\frac{\pi_{24}\cdot\pi_{31}}{\pi_{14}\cdot\pi_{23}} = -\frac{\pi_{31}}{\pi_{23}} : \frac{\pi_{14}}{\pi_{24}}.$$

Ebenso folgt das Doppelverhältniss der projicierenden Ebenen als das der Schnitte mit der Kante A_1A_2 von den Gleichungen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_1 + \lambda\xi_2 = 0$, $\xi_1 + \mu\xi_2 = 0$ mit $\lambda = \frac{p_{24}}{p_{14}}$, $\mu = -\frac{p_{23}}{p_{31}}$ gleich $(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4) = -\frac{p_{24}\cdot p_{31}}{p_{14}\cdot p_{23}}$, d. h. auch $= -\frac{\pi_{31}\cdot\pi_{24}}{\pi_{23}\cdot\pi_{14}}$. (Vergl. § 25, 3.)

Aus $-\frac{p_{24}p_{31}}{p_{14}p_{23}} = k$ oder $p_{24}p_{31} + kp_{14}p_{23} = 0$ ersieht man, dass die Geraden von einerlei Doppelverhältniss zum F.-Tetraeder einen Complex zweiten Grades von sehr specieller Art bilden, wie wir in § 30, 2 schon sahen.

Man bilde die übrigen Doppelverhältnisse des Strahles p_{ik} aus

den Coordinaten. Die Gedächtnissregel für dieselben ist offenbar aus den gegebenen Ausdrücken.

4) Wenn eine Gerade durch ihren Durchstosspunkt in der F.-Ebene $x = 0$ oder S_2 und ihre Richtung S_1 (§ 26) bestimmt ist, so sind für diese $x : y : z = p_{12} : -p_{31} : p_{24}$ und für diesen $y = -\frac{p_{23}}{p_{12}}$, $z = -\frac{p_{24}}{p_{12}}$. Die bei beiden nicht auftretende Coordinate p_{34} erhält aber den Werth $y p_{14} + z p_{31}$.

5) Den Textentwickelungen analog hat man im Elementargebilde zweiter Stufe

$$x_1 = \varrho (u_1 + \lambda v_1 + \mu w_1), \qquad x_2 = \varrho (u_2 + \lambda v_2 + \mu w_2),$$
$$x_3 = \varrho (u_3 + \lambda v_3 + \mu w_3)$$

und daraus

$$\lambda (x_2 v_1 - x_1 v_2) + \mu (x_2 w_1 - x_1 w_2) = x_1 u_2 - x_2 u_1,$$
$$\lambda (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \mu (x_3 w_1 - x_1 w_3) = x_1 u_3 - x_3 u_1;$$

somit

$$\lambda = -\frac{x_1 (u_2 w_3 - u_3 w_2) + x_2 (u_3 w_1 - u_1 w_3) + x_3 (u_1 w_2 - u_2 w_1)}{x_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + x_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + x_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)},$$

woraus der Werth von μ durch Vertauschung von v mit w hervorgeht. Zähler und Nenner sind die dreireihigen Determinanten hier aus den Tripeln der x_i, u_i, w_i und resp. der x_i, v_i, w_i; der Ausdruck des Parameters für die Elementargebilde erster Stufe ward ebenso aus den zweireihigen Determinanten der Paare der x_i, y_i und z_i gebildet. Mit der Lage der Punkte u, v, w in einer Geraden wäre auch x_i stets ein Punkt dieser Geraden.

Es entspringt die Frage: Welches ist die geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke?

6) Man bilde die analogen Ausdrücke der Parameter im Gebilde dritter Stufe und deute sie. (Vergl. § 24.)

Für X, U, V, W, Z als die fünf betheiligten Punkte des Raumes sind die λ, μ, ν proportional den Verhältnissen der Volumina der Tetraeder $XUWZ$, $XUVZ$, $XUVW$, resp. zum Tetraeder $XVWZ$.

38. Auf Grund der vorhergegangenen geometrischen Deutung des Parameters in Elementargebilden erster Stufe zeigen wir nun zuerst, wie sie zum algebraischen Ausdruck der Projectivität solcher Gebilde und zu den Anwendungen derselben führt; und sodann, in wiefern diese Ausdrucksweise gültig und dieselbe bleibt für lineare Gebilde erster Stufe aus Curven, Flächen, etc.

Wir denken vier Elemente X_1, X_2, X_3, X_4 eines solchen Gebildes durch die Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 oder $n_1 : m_1, \ldots$ in Bezug auf zwei willkürlich gewählte feste Elemente Y, Z desselben bestimmt und suchen den Werth ihres Doppelverhältnisses in Function der Parameter. Wir haben für die beispielsweise gedachte Punktreihe zur Zurückführung auf das Gesetz des Theilungsverhältnisses in § 37

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = (X_1 X_2 X_3 Y) : (X_1 X_2 X_4 Y)$$

$$= \frac{(X_1 Z X_3 Y)}{(X_2 Z X_3 Y)} : \frac{(X_1 Z X_4 Y)}{(X_2 Z X_4 Y)} = \frac{(X_1 X_3 Z Y) - 1}{(X_2 X_3 Z Y) - 1} : \frac{(X_1 X_4 Z Y) - 1}{(X_2 X_4 Z Y) - 1}$$

$$= \frac{(S_1 X_1 Y Z) : (S_1 X_3 Y Z) - 1}{(S_1 X_2 Y Z) : (S_1 X_3 Y Z) - 1} : \frac{(S_1 X_1 Y Z) : (S_1 X_4 Y Z) - 1}{(S_1 X_2 Y Z) : (S_1 X_4 Y Z) - 1}$$

$$= \frac{(X_3 S_1 Y Z) : (X_1 S_1 Y Z) - 1}{(X_3 S_1 Y Z) : (X_2 S_1 Y Z) - 1} : \frac{(X_4 S_1 Y Z) : (X_1 S_1 Y Z) - 1}{(X_4 S_1 Y Z) : (X_2 S_1 Y Z) - 1}$$

$$= \frac{\lambda_3 : \lambda_1 - 1}{\lambda_3 : \lambda_2 - 1} : \frac{\lambda_4 : \lambda_1 - 1}{\lambda_4 : \lambda_2 - 1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4};$$

oder auch

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = \frac{m_1 n_3 - m_3 n_1}{m_2 n_3 - m_3 n_2} : \frac{m_1 n_4 - m_4 n_1}{m_2 n_4 - m_4 n_2}.$$

Ebenso ist

$$(X_2 X_3 X_1 X_4) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4}$$

und

$$(X_3 X_1 X_2 X_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_4}$$

und man erhält daraus für die mit d_1, d_2, d_3 resp. bezeichneten Werthe dieser drei fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppe von vier Elementen die Relationen (vergl. I, § 16, 9)

$$d_1 + \frac{1}{d_3} = 1, \quad d_2 + \frac{1}{d_1} = 1, \quad d_3 + \frac{1}{d_2} = 1; \quad d_1 d_2 d_3 = -1.$$

Fällt X_1 in Y, X_2 in Z, so haben wir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$ oder $n_1 = 0$, $m_2 = 0$ und das Doppelverhältniss der Gruppe YZX_3X_4 wird

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4} \quad \text{oder} \quad \frac{n_3}{m_3} : \frac{n_4}{m_4}.$$

Für $\lambda_3 = -\lambda_4$ ist die Gruppe also harmonisch. Dieselbe Betrachtung und dasselbe Resultat gilt auch für Strahlbüschel und Ebenenbüschel.

1) Wenn (YZX_3X_4) eine harmonische Gruppe ist, so sind auch

$$(ZYX_3X_4), \quad (YZX_4X_3), \quad (ZYX_4X_3);$$
$$(X_3X_4YZ) \text{ und } (X_3X_4ZY)$$

harmonische Gruppen (§ 5). Nach den Parametern $0, \infty, \lambda, -\lambda$ der Elemente Y, Z, X_3, X_4 sind ihre Doppelverhältnisse sämmtlich der negativen Einheit gleich; z. B. für die zweite und die letzte der Gruppen resp.

$$\frac{0+\lambda}{\infty+\lambda}\cdot\frac{\infty-\lambda}{0-\lambda} \text{ und } \frac{\lambda-\infty}{\lambda-\infty}\cdot\frac{\lambda-0}{-\lambda-0}.$$

2) Die Doppelverhältnisse der Gruppen $(X_1X_2X_3X_4)$ oder (1234) und (2143), (3412), (4321) sind dieselben. (§ 7.) Die Werthe der letzten drei sind in den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Elemente resp.

$$\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_4}\cdot\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}, \quad \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_4-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}, \quad \frac{\lambda_4-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}.$$

3) Wenn zwei Büschel von vier Strahlen a, b, c, d und a', b', c', d' in derselben Ebene und an verschiedenen Scheiteln T, T' gleiche Doppelverhältnisse $(abcd)$ und $(a'b'c'd')$ haben, so sind auch die Doppelverhältnisse $(b'a'd'c')$, $(c'd'a'b')$ und $(d'c'b'a')$ dem Doppelverhältniss $(abcd)$ gleich. Somit liegen die Punktegruppen

$$aa', \; bb', \; cc', \; dd'; \quad ab', \; ba', \; cd', \; dc';$$
$$ac', \; bd', \; ca', \; db'; \quad ad', \; bc', \; cb', \; da'$$

je auf einem Kegelschnitt durch die Scheitel T, T'; oder die sechszehn Schnittpunkte von zwei vierstrahligen Büscheln mit gleichem Doppelverhältniss liegen viermal zu vier in vier Kegelschnitten durch die Scheitel. Analog bei zwei Reihen von vier Punkten in Geraden derselben Ebene und von gleichem Doppelverhältniss.

Mit der Forderung der perspectivischen Lage sind durch das Zusammenfallen des Scheitelstrahles mit seinem entsprechenden die übrigen Zuordnungen ausgeschlossen.

4) Zwei Büschel von je vier Ebenen **ABCD** und **A'B'C'D'** mit gleichen Doppelverhältnissen **(ABCD)** und **(A'B'C'D')** erzeugen durch den Schnitt der Ebenen des ersten mit denen des zweiten sechszehn Gerade, welche viermal zu vier mit den beiden Scheitelkanten je demselben Hyperboloid angehören.

Dualistisch ebenso für zwei Punktegruppen auf Geraden, welche zu einander windschief sind.

39. Sollen nun zwei Elementargebilde erster Stufe projectivisch, d. h. für alle entsprechenden reellen Elementen-

gruppen von gleichem Doppelverhältniss sein, so müssen drei feste entsprechende Elementenpaare X_1, X_2, X_3; X_1', X_2', X_3', die wir in Bezug auf willkürlich gewählte F.-Elemente Y, Z; V', W' resp. durch Parameterwerthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ bestimmt denken, mit einem vierten beweglichen Paar X, X' entsprechender Elemente von den Parametern λ, λ' in jeder Lage gleiche Doppelverhältnisse bestimmen, d. h. man muss haben

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda} = \frac{\lambda_1' - \lambda_3'}{\lambda_2' - \lambda_3'} : \frac{\lambda_1' - \lambda'}{\lambda_2' - \lambda'}$$

oder

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_2' - \lambda_3')(\lambda_1' - \lambda') = (\lambda_1' - \lambda_3')(\lambda_2' - \lambda')(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda);$$

es besteht somit zwischen den Parametern der entsprechenden Elemente von zwei projectivischen Gebilden erster Stufe eine Gleichung von der Form

$$a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' - d = 0$$

mit a, b, c, d als constanten Coefficienten, die durch die drei Paare gegebener entsprechender Elemente der Gebilde bestimmt sind. (Vergl. I, § 17 und oben 6.)

Drei Elementenpaare bestimmen durch ihre Parameterwerthe α, α'; β, β'; γ, γ' die Gebilde und die Gleichung ihrer Projectivität; die Elimination von a, b, c, d zwischen den vier Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' - d &= 0, \\ a\alpha\alpha' - b\alpha + c\alpha' - d &= 0, \\ a\beta\beta' - b\beta + c\beta' - d &= 0, \\ a\gamma\gamma' - b\gamma + c\gamma' - d &= 0 \end{aligned}$$

giebt

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda, & \lambda', & 1 \\ \alpha\alpha', & \alpha, & \alpha', & 1 \\ \beta\beta', & \beta, & \beta', & 1 \\ \gamma\gamma', & \gamma, & \gamma', & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. man erhält

$$\begin{aligned} a &= \alpha(\beta' - \gamma') + \beta(\gamma' - \alpha') + \gamma(\alpha' - \beta'), \\ b &= \alpha\alpha'(\beta' - \gamma') + \beta\beta'(\gamma' - \alpha') + \gamma\gamma'(\alpha' - \beta'), \\ c &= \alpha\alpha'(\beta - \gamma) + \beta\beta'(\gamma - \alpha) + \gamma\gamma'(\alpha - \beta), \\ d &= \alpha\alpha'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + \beta\beta'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + \gamma\gamma'(\alpha\beta' - \alpha'\beta). \end{aligned}$$

Man erhält aus der Projectivitätsgleichung durch Auflösung

$$\lambda = \frac{d - c\lambda'}{a\lambda' - b}, \qquad \lambda' = \frac{d + b\lambda}{a\lambda + c};$$

also für

$$\lambda' = 0, \quad \lambda = -\frac{d}{b}; \quad \text{für} \quad \lambda = 0, \quad \lambda' = \frac{d}{c};$$

$$\lambda' = \infty, \ \lambda = -\frac{c}{a}; \qquad \lambda = \infty, \ \lambda' = \frac{b}{a};$$

die geometrische Deutung der Coefficienten. Nach ihr sind $-\frac{d}{b}$ und $-\frac{c}{a}$ und resp. $\frac{d}{c}, \frac{b}{a}$ die Parameter derjenigen Elemente des ersten Gebildes, welche den F.-Elementen V' und W' des zweiten entsprechen, also der Elemente V und W; resp. die Parameter derjenigen Elemente Y', Z' des zweiten Gebildes, die den F.-Elementen Y, Z des ersten entsprechen.

Von dieser Einsicht aus gelangt man zu den möglichen einfacheren Formen der Gleichung der Projectivität. Wenn man die F.-Elemente des zweiten Gebildes nicht willkürlich annimmt, sondern sie denen des ersten ganz oder theilweise direct oder verkehrt entsprechend wählt, so hat man folgende Fälle:

1) V' dem Y oder V' dem Z entsprechend, d. h. mit $\lambda' = 0$ auch $\lambda = 0$ oder aber $\lambda = \infty$, also entweder $d = 0$ oder $b = 0$ und somit

$$a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' = 0, \qquad a\lambda\lambda' + c\lambda' - d = 0.$$

2) W' dem Y oder W' dem Z entsprechend, d. h. mit $\lambda' = \infty$ auch $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$, also entweder $c = 0$ oder $a = 0$ und somit

$$a\lambda\lambda' - b\lambda - d = 0, \qquad -b\lambda + c\lambda' - d = 0.$$

3) V' dem Y und zugleich W' dem Z entsprechend, d. h. mit $\lambda' = 0$ auch $\lambda = 0$ und mit $\lambda' = \infty$ auch $\lambda = \infty$ oder $d = 0$, $a = 0$, also

$$-b\lambda + c\lambda' = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda : \lambda' = c : b.$$

Wenn also in zwei Elementargebilden erster Stufe die Parameter entsprechender Elemente in constantem Verhältniss (also auch wenn sie gleich) sind, so sind dieselben projectivisch mit direct entsprechenden F.-Elementen.

4) V' dem Z und zugleich W' dem Y entsprechend, d. h. mit $\lambda' = 0$, $\lambda = \infty$ und mit $\lambda' = \infty$, $\lambda = 0$ oder $b = 0$, $c = 0$, also für verkehrt entsprechende F.-Elemente

$$a\lambda\lambda' - d = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda\lambda' = d : a.$$

In den Fällen 1) und 2) ist ein Paar entsprechender Elemente gegeben und darum bleiben zwei Coefficienten zu bestimmen, was durch Festsetzung von zwei weiteren Paaren am einfachsten geschieht; in den Fällen 3) und 4) hat man zwei entsprechende Paare festgesetzt und daher nur einen Coefficienten zu bestimmen.

Sind α, α'; β, β' in den Fällen 1) und 2) die gegebenen weiteren Elemente, so hat man die Gleichungen der projectivischen Gebilde durch Elimination der unbestimmten Coefficienten zwischen den drei Gleichungen des Problems resp.

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda, & \lambda' \\ \alpha\alpha', & \alpha, & \alpha' \\ \beta\beta', & \beta, & \beta' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda', & 1 \\ \alpha\alpha', & \alpha', & 1 \\ \beta\beta', & \beta', & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda', & \lambda, & 1 \\ \alpha\alpha', & \alpha, & 1 \\ \beta\beta', & \beta, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda', & 1 \\ \alpha, & \alpha', & 1 \\ \beta, & \beta', & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

und entwickelt

$$\lambda\lambda'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) - \lambda(\alpha - \beta)\alpha'\beta' + \lambda'(\alpha' - \beta')\alpha\beta = 0,$$
$$\lambda\lambda'(\alpha' - \beta') - \lambda'(\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha - \beta)\alpha'\beta' = 0;$$
$$\lambda\lambda'(\alpha - \beta) - \lambda(\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha' - \beta')\alpha\beta = 0,$$
$$\lambda(\alpha' - \beta') - \lambda'(\alpha - \beta) + (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

In den beiden Fällen 3) und 4) erhält man aber resp.

$$\lambda\alpha' - \lambda'\alpha = 0, \qquad \lambda\lambda' - \alpha\alpha' = 0.$$

Die Gleichung der Projectivität der Elementargebilde erster Stufe ist die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen ihren Parametern λ und λ' oder die allgemeine bilineare Relation zwischen denselben; sie drückt jede solche geometrische Abhängigkeit zwischen denselben aus, bei welcher jedem Element des einen wieder ein und nur ein Element des andern entspricht. Die Uebereinstimmung der Doppelverhältnisse oder

die Projectivität ist die nothwendige Folge eines solchen Entsprechens; denn die Function

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

wird durch Ueberführung von λ_i in $\dfrac{d + b\lambda_i}{a\lambda_i + c}$ nicht geändert; zu jeder ihrer vier Differenzen tritt dadurch nur der Factor $(bc - ad)$ hinzu.

Wenn wir in diese Parametergleichung der Projectivität für λ und λ' ihre Werthe aus § 37 wieder einsetzen, also für Reihen mit den F.-Punkten y_i und z_i und v_i', w_i' in der einen und der andern resp.

$$\lambda = -\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 z_1 - x_1 z_2}, \quad \lambda' = -\frac{x_2' v_1' - x_1' v_2'}{x_2' w_1' - x_1' w_2'},$$

so entsteht aus ihr eine allgemeine bilineare Gleichung zwischen den Coordinatenverhältnissen $x_2 : x_1$ und $x_2' : x_1'$ der laufenden Elemente beider Gebilde, die wir mit Einführung der Zeichen a_{ik} für die constanten aus den y_i, z_i, v_i', w_i', a, b, c, d zusammengesetzten Factoren in der Form schreiben wollen

$$a_{12}\frac{x_2}{x_1}\frac{x_2'}{x_1'} - a_{22}\frac{x_2}{x_1} + a_{11}\frac{x_2'}{x_1'} - a_{21} = 0.$$

Sie giebt

$$x_2' : x_1' = \left(a_{22}\frac{x_2}{x_1} + a_{21}\right) : \left(a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{11}\right)$$
$$= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) : (a_{11}x_1 + a_{12}x_2),$$

oder

$$\mu x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2,$$

d. h. die Coordinaten eines Elementes im gestrichenen Gebilde sind allgemein lineare homogene Functionen der Coordinaten des entsprechenden Elementes im ungestrichenen Gebilde.

Analog für Büschel oder für Reihe und Büschel, mit Ersetzung der x_i durch ξ_i und der x_i' durch ξ_i'. Sind die betrachteten Gebilde gleichartig und liegen sie vereinigt und sind auf dieselbe fundamentale Gruppe bezogen, so findet Vertauschbarkeit der entsprechenden Elemente oder Involution statt für $a_{22} = -a_{11}$. Man bildet leicht die Gleichungen für die sich selbst entsprechenden Elemente im allgemeinen wie in diesem besondern Fall. (Vergl. 5, 6.)

Zu Ende dieses Abschnittes führen wir diess weiter.

1) Zwei projectivische Strahl- oder Ebenenbüschel enthalten immer ein entsprechendes Paar rechter Winkel.

Um diess zu zeigen, denken wir die Büschel auf rechtwinklige Paare von F.-Strahlen y, z, v', w' bezogen, die also als nicht entsprechend vorausgesetzt werden, sodass die allgemeine Projectivitätsgleichung

$$a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' - d = 0$$

gilt mit $$\lambda = \frac{d - c\lambda'}{a\lambda' - b}, \quad \lambda' = \frac{d + b\lambda}{a\lambda + c}.$$

Wären nun λ, λ_1 die Parameter von zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen x, x_1 des ersten Büschels, so hätte man

$$\lambda = -\frac{\sin(x, y)}{\sin(x, z)}, \quad \lambda_1 = -\frac{\sin(x_1, y)}{\sin(x_1, z)};$$

und wegen der Rechtwinkligkeit von x, x_1 sind λ, λ_1 entgegengesetzt reciprok zu einander oder das Product der Theilverhältnisse rechtwinkliger Strahlen in Bezug auf rechtwinklige F.-Strahlen ist $\lambda\lambda_1 = -1$. Ist nun das zu einem solchen Strahlenpaar entsprechende Paar wieder rectangulär, so muss die gleiche Relation auch für dieses erfüllt sein, d. h. man hat für den Parameter λ des einen Schenkels in einem Paar entsprechender rechter Winkel die Bedingung

$$\frac{d + b\lambda}{a\lambda + c} \cdot \frac{-d\lambda + b}{a - c\lambda} = -1$$

oder

$$\lambda^2 - \lambda\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ac + bd} - 1 = 0;$$

dieselbe zeigt einerseits, dass es stets zwei reelle Werthe des Parameters λ giebt, die ihr genügen und anderseits, dass das Product derselben die negative Einheit ist, oder dass die zugehörigen Strahlen ein einziges rechtwinkliges Paar bilden, dessen entsprechendes wieder rechtwinklig ist.

2) Wählt man die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zu den fundamentalen Strahlen, was danach stets möglich ist, so erhält man für das directe Entsprechen derselben $\lambda : \lambda' = c : b$ und für das verkehrte Entsprechen $\lambda\lambda' = d : a$. Bezeichnet man also diese Strahlen durch q, r im ersten und entsprechend durch q', r' im zweiten Büschel, so ist im ersten Fall

$$\lambda = -\frac{\sin(x, q)}{\sin(x, r)} = -\tan(x, q), \quad \lambda' = -\tan(x', q'),$$

also $$\tan(x, q) : \tan(x', q') = c : b; \qquad \text{(I, § 18,4)}$$

im anderen aber

$$\lambda = -\tan(x, r), \quad \lambda' = -\tan(x', q')$$

und somit $$\tan(x, r) \cdot \tan(x', q') = d : a. \qquad \text{(I, § 18,4.)}$$

3) Wenn die Constanten der vorigen Relationen gleich ± 1 sind, so hat man gleiche Büschel von gleichem oder entgegengesetztem Sinn; dann ist entweder $b = -c$, $a = d$; oder $b = c$, $a = -d$ und somit $ac + bd = 0$, $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0$, d. h. die Gleichung der Rechtwinkelstrahlen wird unbestimmt, es giebt unendlich viele Rechtwinkelpaare.

4) Schneidet man das auf das Rechtwinkelpaar bezogene Büschel durch eine zum einen F.-Strahl parallele Gerade und das zu ihm projectivische auf das entsprechende Rechtwinkelpaar mit verkehrtem Entsprechen bezogene durch eine zum andern F.-Strahl parallele Gerade, so erhält man für R, Q' als die endlich entfernten Schnitte mit den Rechtwinkelstrahlen als Relation der Projectivität

$$XR \,.\, X'Q' = \text{const.} \quad \text{(Vergl. I, § 15; § 16, 5.)}$$

5) Die Abscissengleichung der Projectivität der Reihen wird

$$x' = (a_{21} + a_{22}x) : (a_{11} + a_{12}x)$$

und bei demselben Anfangspunkt der auf derselben Geraden gemessenen Abscissen erhält man Involution mit $a_{22} = -a_{11}$. Ist dann für $x = 0$ $x' = \infty$, d. h. der Anfangspunkt der Centralpunkt der Involution, so muss noch $a_{11} = 0$ sein oder (I, § 20, 12)

$$a_{12}xx' = a_{21}$$

und für die Doppelelemente $x = \pm\sqrt{a_{21} : a_{12}}$.

6) Ebenso ist die Abscissengleichung der Reihen für die Gegenpunkte R und Q' als Anfangspunkte (I, § 15)

$$a_{12}xx' = a_{22}.$$

Man bilde und discutiere die Gleichungen der Projectivität der Büschel in Plücker'schen Coordinaten.

7) Die projectivische Beziehung zwischen den Punkten einer erzeugenden Geraden und den zugehörigen Tangentialebenen einer windschiefen Regelfläche (§ 30) ist Folge und Ausdruck ihrer eindeutigen Zusammengehörigkeit.

Die um den Strahl eines Complexes sich drehende Ebene und sein Berührungspunkt mit der zugehörigen Complexcurve (§ 30) entsprechen einander eindeutig und somit projectivisch.

8) Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels in derselben Ebene gehen durch einen und denselben Punkt; denn die Reihen, in denen sie von beliebigen Geraden der Ebene geschnitten werden, müssen alle unter einander projectivisch sein.

Die Polarenbüschel von zwei beliebigen Punkten der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels sind mit einander projectivisch und erzeugen durch den Schnitt ihrer entsprechenden

Strahlen einen Kegelschnitt. Und dual. Insbesondere erzeugen die zu zwei beliebigen Richtungen conjugierten Durchmesser der Kegelschnitte des Büschels den Mittelpunktskegelschnitt desselben. (I, Tafel I, II, III, p. xxif.) Und die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Kegelschnittschaar liegen in einer Geraden.

40. Wenn die beiden projectivischen Elementargebilde erster Stufe gleichartig sind (Reihen oder Büschel) und in einander liegen, oder wenn sie ungleichartig sind und jedes Element des einen in einem Element des andern liegt (Reihe und Ebenenbüschel, Reihe und Strahlbüschel in derselben Ebene, Strahlbüschel und Ebenenbüschel, dessen Scheitelkante den Scheitel des erstern enthält), so wird man sie auf dieselben zwei F.-Elemente $(y, z; v', w')$ im ersten Fall und im andern Fall auf zwei F.-Elementenpaare $(Y, Z; v', w')$ beziehen, von denen die einen die andern enthalten; und da diese im Allgemeinen einander nicht entsprechen, so wird die Projectivität der Gebilde durch die allgemeine Gleichung

$$a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' - d = 0$$

dargestellt; wenn aber nun λ und λ' denselben Werth hätten so würden die beiden so bestimmten entsprechenden Elemente im Fall gleichartiger Gebilde sich decken, im Fall ungleichartiger Gebilde aber in einander liegen. Die Annahme $\lambda = \lambda'$ giebt dafür die Bedingung

$$a\lambda^2 - (b - c)\lambda - d = 0,$$

aus welcher zwei Werthe von λ sich ergeben

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}}{2a},$$

die entweder reell und verschieden sind, oder einander gleich, oder conjugiert imaginär; und diese bestimmen zwei Doppelelemente der projectivischen in einander liegenden Gebilde oder zwei in einander liegende entsprechende der bezeichneten ungleichartigen Gebilde. (Vergl. I, § 21 und oben § 7.)

Im Fall reeller Doppelelemente kann man diese als F.-Elemente wählen und erhält die Projectivitätsgleichung in der Form 3), also $\lambda : \lambda' = c : b$, d. h. das Doppelverhältniss, welches ein Elementenpaar mit den Doppelelementen bildet, die Charakteristik Δ von früher, ist constant. (I, § 19, oben § 6, 4.)

Alles das gilt offenbar für lineare Gebilde erster Stufe überhaupt ohne Rücksicht auf die Art ihrer Elemente, also auch für lineare Gebilde erster Stufe aus Curven und aus Flächen, zunächst als rein algebraische Bestimmung; wir werden zum construierenden Vollzug derselben übergehen, sobald wir noch an den Erzeugnissen der Verbindung projectivischer Elementargebilde erster Stufe ein Beispiel zur vorigen Entwickelung behandelt haben.

Wenn aber noch allgemeiner in zwei linearen Gebilden erster Stufe zwei Reihen von Elementen einander algebraisch-geometrisch so entsprechen, dass jedem Element der ersten n Elemente der zweiten und jedem Element der zweiten m Elemente der ersten entsprechen, so muss für λ, λ' als die Parameter entsprechender Elemente bei beliebiger Wahl der F.-Elemente eine algebraische Relation von der Form bestehen

$$(a_0\lambda'^m + a_1\lambda'^{m-1} + \cdots + a_m)\lambda^n$$
$$+ (b_0\lambda'^m + \cdots + b_m)\lambda^{n-1} + \cdots + (t_0\lambda'^m + \cdots + t_m)\lambda^0 = 0.$$

Und wenn beide Gebilde vereinigt liegen und auf die nämlichen F.-Elemente bezogen sind, sodass demselben Parameterwerth, ob λ oder λ', nothwendig dasselbe Element entspricht, so wird durch Einführung von $\lambda = \lambda'$ in diese Relation die Bestimmung der sich selbst entsprechenden Elemente beider Gebilde ausgedrückt, mittelst einer algebraischen Gleichung vom Grade $(m+n)$ in λ; d. h. es existieren $(m+n)$ Elemente, die mit einem ihrer entsprechenden zusammenfallen.

1) Für den Parameter φ eines Doppelelementes der durch die Paare α, α'; β, β'; γ, γ' bestimmten vereinigten projectivischen Elementargebilde erster Stufe und resp. für φ_1, φ_2 als Parameter der beiden Doppelelemente mit den Paaren α, α'; β, β' ist

$$\begin{vmatrix} \varphi^2, & \varphi, & \varphi, & 1 \\ \alpha\alpha', & \alpha, & \alpha', & 1 \\ \beta\beta', & \beta, & \beta', & 1 \\ \gamma\gamma', & \gamma, & \gamma', & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \varphi_1^2, & \varphi_1, & \varphi_1, & 1 \\ \varphi_2^2, & \varphi_2, & \varphi_2, & 1 \\ \alpha\alpha', & \alpha, & \alpha', & 1 \\ \beta\beta', & \beta, & \beta', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen entsprechen den Doppelverhältnissgleichheiten

$$\frac{\varphi-\beta}{\alpha-\beta} : \frac{\varphi-\gamma}{\alpha-\gamma} = \frac{\varphi-\beta'}{\alpha'-\beta'} : \frac{\varphi-\gamma'}{\alpha'-\gamma'}$$

und

$$\frac{\varphi_1-\alpha}{\varphi_2-\alpha} : \frac{\varphi_1-\beta}{\varphi_2-\beta} = \frac{\varphi_1-\alpha'}{\varphi_2-\alpha'} : \frac{\varphi_1-\beta'}{\varphi_2-\beta'}.$$

2) Die Gleichung

$$(a_0\lambda'^2 + a_1\lambda' + a_2)\lambda + (b_0\lambda'^2 + b_1\lambda' + b_2) = 0$$

zwischen den Parametern zweier linearen Gebilde erster Stufe giebt für jeden Werth von λ' einen bestimmten reellen Werth von λ und folglich ein Element im ungestrichenen Gebilde; für jeden Werth von λ ein bestimmtes reelles oder conjugiert imaginäres Werthepaar λ' und λ_1', also ein Elementenpaar im gestrichenen Gebilde. Für die aus

$$(a_1\lambda + b_1)^2 = 4(a_0\lambda + b_0)(a_2\lambda + b_2)$$

bestimmten Werthe von λ fallen die entsprechenden beiden Werthe von λ' je in einen Werth zusammen.

Es kommt bei vereinigter Lage und denselben F.-Elementen dreimal und mindestens einmal reell vor, dass ein Element λ mit einem seiner beiden entsprechenden Elemente λ', λ_1' zusammenfällt, nämlich für die Wurzeln von

$$a_0\lambda^3 + (a_1 + b_0)\lambda^2 + (a_2 + b_1)\lambda + b_2 = 0.$$

3) Denken wir den Träger vereinigter projectivischer Reihen als Axe der x und die λ, λ' als die aus der Mitte der Strecke zwischen den Gegenpunkten (I, § 21) gezählten Abscissen, so ist die Projectivitätsgleichung

$$a\lambda\lambda' + b(\lambda - \lambda') + d = 0;$$

die Abscissen der Gegenpunkte als die zu den unendlich grossen λ', λ entsprechenden λ, λ' sind resp.

$$\lambda_Q' = -\frac{b}{a}, \qquad \lambda_R = \frac{b}{a}.$$

Für die Doppelpunkte ist

$$a\lambda^2 + d = 0;$$

sie sind also für gleiche Zeichen von a und d durch rein imaginäre Abscissen bestimmt. Trägt man dann im Anfangspunkt rechtwinklig zur Axe den reellen Factor ihres Werthes $\sqrt{d:a}$ auf, so bestimmt der so erhaltene Punkt als Scheitel mit den Paaren entsprechender Punkte der projectivischen Reihen Winkel von constanter Grösse und einerlei Drehungssinn, weil die Doppelstrahlen der von ihnen gebildeten Reihen nach den Kreispunkten der Ebene gehen (I, § 31, 10). Es ist auch leicht rechnend nachzuweisen, dass für diesen constanten Winkel θ die Relationen

$$\cos^2\theta = \frac{b^2}{ad + b^2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{ad}{ad + b^2}, \qquad \tan^2\theta = \frac{ad}{b^2}$$

bestehen, die man aus der besprochenen Figur sofort abliest für den Winkel, den die nach den Gegenpunkten gehenden Strahlen mit der Axe der Reihen bilden.

4) Für das Doppelverhältniss Δ der von den Doppelelementen $\pm\sqrt{-d:a}$ der Projectivität

$$a\lambda\lambda' + b(\lambda - \lambda') + d = 0$$

mit einem beliebigen Paar λ, λ' derselben gebildeten Gruppe

$$\frac{\lambda - \sqrt{-d:a}}{\lambda' - \sqrt{-d:a}} \cdot \frac{\lambda' + \sqrt{-d:a}}{\lambda + \sqrt{-d:a}}$$

erhält man wegen

$$\lambda\lambda' + \frac{d}{a} = -\frac{b}{a}(\lambda - \lambda')$$

sofort den Ausdruck

$$\Delta = \frac{b + \sqrt{-ad}}{b - \sqrt{-ad}} = \frac{b^2 - ad + 2b\sqrt{-ad}}{b^2 + ad},$$

und mittelst der in 3) begründeten Werthe für $\sin\theta$, $\cos\theta$ also auch

$$\Delta = \cos 2\theta \pm i \sin 2\theta = e^{\pm 2i\theta}$$

und somit für l als Zeichen Neper'scher Logarithmen die Definition des Winkels von zwei Geraden

$$\theta = \pm \frac{1}{2i} ld,$$

wonach er das mit $\frac{1}{2i}$ multiplicierte Doppelverhältniss ist, welches seine Schenkel mit den vom Scheitel nach den absoluten oder Kreispunkten seiner Ebene gehenden Strahlen bilden; mit $\theta = \frac{1}{2}\pi$ folgt $d = -1$ wieder wie bekannt (I, § 31, 3 f.). Eben weil die Maassbeziehungen der Elemente durch ihre Beziehungen auf diese festen nicht reellen Elemente gewonnen werden, hat man dieselben die absoluten Elemente des Raumes oder das Absolute desselben genannt.

5) Allgemein ist das Doppelverhältniss, welches die Doppelelemente von

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

mit einem beliebigen Paar bestimmen, aus

$$(RR'F_1F_2) = RF_1 : RF_2 \quad (\text{I, § 19,1} = \mathfrak{S}R : SR)$$

für λ_1 und λ_2 als die Abscissen der Doppelpunkte F_1 und F_2

$$= \frac{a\lambda_1 + c}{a\lambda_2 + c} = \frac{c - b + \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{c - b - \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}},$$

weil

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b - c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{2a}$$

sind.

41. Unter den vorher gemachten Voraussetzungen können die projectivischen Elementargebilde auch involutorisch liegen, sodass ihre entsprechenden Elemente Paare bilden, weil sie sich vertauschbar entsprechen (vergl. I, § 20 und § 8); diess findet entweder für kein Paar oder für alle Paare statt, und zwar dann, wenn durch Vertauschung von λ und λ' die beiden Ausdrücke dieser Grössen aus der Projectivitätsgleichung $\frac{d - c\lambda'}{a\lambda' - b}$ und $\frac{d + b\lambda}{a\lambda + c}$ in einander übergehen, d. h. wenn $c = -b$ ist. Dann ist die Gleichung der Projectivität in λ, λ' symmetrisch, wir schreiben

$$a\lambda\lambda_1 - b(\lambda + \lambda_1) - d = 0.$$

Die Involution wird durch zwei Paare α, α_1; β, β_1 bestimmt, ihre Gleichung ist mittelst derselben

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda_1, & \lambda + \lambda_1, & 1 \\ \alpha\alpha_1, & \alpha + \alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta + \beta_1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. man hat

$$a = (\alpha + \alpha_1) - (\beta + \beta_1), \qquad b = \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1,$$
$$d = \beta\beta_1(\alpha + \alpha_1) - \alpha\alpha_1(\beta + \beta_1).$$

Den Doppelelementen entsprechen die Parameterwerthe aus $a\lambda^2 - 2b\lambda - d = 0$; d. h.

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + ad}}{a}$$

und, die Realität derselben vorausgesetzt, geht durch Wahl derselben zu F.-Elementen die Gleichung in die Form 3)

$$\lambda : \lambda_1 = -1$$

über, welche die harmonische Gruppierung jedes Paares mit dem Paar der Doppelelemente ausspricht. (Vergl. I, § 20 und oben § 8.)

Wegen $b = -c$ erhält man aus der die Rechtwinkelpaare bestimmenden Gleichung des § 39, 1 im Fall der Involution die die Axen bestimmende Gleichung (§ 8)

$$b\lambda^2 + (a + d)\lambda - b = 0,$$

welche mit $b = 0$, $a = -d$ unbestimmt wird; diess giebt nach dem Vorigen die Involution rechter Winkel, den wichtigsten Specialfall der elliptischen Involution. (I, § 31, 6f.)

Ihre Gleichung ist somit bezogen auf rechtwinklige F.-Strahlen $\lambda\lambda_1 + 1 = 0$ (§ 39, 2) und für ihre Doppelstrahlen erhält man $\lambda^2 = -1$, also $\lambda_{1,2} = \pm i$. Das Product der Gleichungen $x \pm yi = 0$ giebt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ des Nullkreises um den Scheitel oder die seiner Asymptoten, die wir als die Doppelstrahlen der Rechtwinkel-Involution seiner conjugierten Durchmesser kennen. (I, § 33, 5.)

1) Für η als den Parameter eines Doppelelementes in der Involution aus den Paaren α, α_1; β, β_1 und für η_1, η_2 als die Parameter beider Doppelelemente mit dem Paar α, α_1 ist resp.

$$\begin{vmatrix} \eta^2, & 2\eta, & 1 \\ \alpha\alpha_1, & \alpha+\alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta+\beta_1, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \eta_1^2, & 2\eta_1, & 1 \\ \eta_2^2, & 2\eta_2, & 1 \\ \alpha\alpha_1, & \alpha+\alpha_1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung der letzten giebt

$$(\eta_1 - \eta_2)\{2(\alpha\alpha_1 + \eta_1\eta_2) - (\alpha + \alpha_1)(\eta_1 + \eta_2)\} = 0$$

und das Verschwinden der Klammergrösse $\{\ \}$ drückt aus, dass das Paar α, α_1 mit dem Paar der Doppelelemente eine harmonische Gruppe bildet.

2) Weil die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \alpha, & \alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta, & \beta_1, & 1 \\ \gamma\gamma_1, & \gamma, & \gamma_1, & 1 \\ \delta\delta_1, & \delta, & \delta_1, & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \alpha+\alpha_1, & \alpha, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta+\beta_1, & \beta, & 1 \\ \gamma\gamma_1, & \gamma+\gamma_1, & \gamma, & 1 \\ \delta\delta_1, & \delta+\delta_1, & \delta, & 1 \end{vmatrix}$$

einerlei Werth haben und die zweite, wie die Entwickelung nach den Elementen der vorletzten Reihe lehrt, immer dann verschwindet, wenn die Paare α, α_1; etc. Paare der nämlichen Involution sind, während die erste durch ihr Verschwinden die Projectivität der Reihen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ausspricht, so folgt, dass vier Elemente einer Involution immer mit den vier entsprechenden gleiche entsprechende Doppelverhältnisse bestimmen.

3) Aus der Projectivitätsrelation mit einem vertauschungsfähig entsprechenden Paar α, α_1

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \alpha, & \alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta, & \beta_1, & 1 \\ \gamma\gamma_1, & \gamma, & \gamma_1, & 1 \\ \alpha\alpha_1, & \alpha_1, & \alpha, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{folgt durch} \quad \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \alpha+\alpha_1, & 1, & \alpha \\ \beta\beta_1, & \beta+\beta_1, & 1, & \beta \\ \gamma\gamma_1, & \gamma+\gamma_1, & 1, & \gamma \\ \alpha\alpha_1, & \alpha+\alpha_1, & 1, & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0$$

und Subtraction der Elemente der ersten Zeile von denen der letzten

$$(\alpha_1 - \alpha)\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \alpha + \alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \beta + \beta_1, & 1 \\ \gamma\gamma_1, & \gamma + \gamma_1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die Vertauschbarkeit aller Paare α, α_1; etc. oder die Involution derselben wie im Text hier, in § 8 und I, § 20,9.

4) Wenn drei Paare von Elementen α, α_1; etc. in Involution sind, so folgt für die Coefficienten der quadratischen Gleichungen $U_a = 0$, $U_b = 0$, $U_c = 0$ oder resp.

$$a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2 = 0, \qquad b_0\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_2 = 0,$$
$$c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_2 = 0$$

wegen

$$\alpha\alpha_1 = a_2 : a_0, \quad \alpha + \alpha_1 = -2a_1 : a_0; \qquad \beta\beta_1 = b_2 : b_0, \text{ etc.}$$

aus der Determinantenbedingung der Involution auch

$$\begin{vmatrix} a_2, & a_1, & a_0 \\ b_2, & b_1, & b_0 \\ c_2, & c_1, & c_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ b_0, & b_1, & b_2 \\ c_0, & c_1, & c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

in der That nur ein anderer Ausdruck für die lineare identische Relation zwischen den drei Formen

$$\varkappa_1 U_a + \varkappa_2 U_b + \varkappa_3 U_c = 0. \qquad \text{(Vergl. § 34.)}$$

Man bilde die analogen Relationen für cubische Gleichungen und ihre Wurzelgruppen.

5) Wenn man zu den Elementenpaaren α, α_1; etc. einer Involution im Gebilde erster Stufe die conjugiert harmonischen λ_α, etc. von einem beliebigen Element λ derselben bildet, so haben irgend vier derselben ein von λ unabhängiges Doppelverhältniss, oder die $\mu_\alpha, \ldots$ zu einem beliebigen andern Element μ des Gebildes gehören einer zu der der $\lambda_\alpha, \ldots$ projectivischen Reihe an. Man sagt, die Elemente $\lambda_\alpha, \ldots$ bilden eine zur Involution der Paare $\alpha, \alpha_1; \ldots$ projectivische Reihe. Für $\lambda = 0$ und $\mu = \infty$, welche Werthe nach § 39 ohne Verlust der Allgemeinheit gewählt werden können, hat man

$$\lambda_\alpha = \frac{2\alpha\alpha_1}{\alpha + \alpha_1}, \text{ etc.} \quad \text{und} \quad \mu_\alpha = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}, \text{ etc.}$$

und die Bedingung der Projectivität zwischen den λ_α und den μ_α somit

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha_1, & \frac{\alpha\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}, & \alpha+\alpha_1, & 1 \\ \beta\beta_1, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma\gamma_1, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta\delta_1, & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

eine im Fall der Involution der Paare α, α_1; etc. nothwendig erfüllte Gleichung. Insbesondere bilden die Mitten der Segmente einer Involution eine zur Involution projectivische Reihe.

6) Die Relation der Involution ist die allgemeine symmetrische bilineare Relation zwischen den Parametern. Wenn also zwischen zwei Reihen von Elementen im Elementargebilde erster Stufe eine solche algebraisch-geometrische Beziehung besteht, dass jedem Element der ersten Reihe nur eines der zweiten und jedem Element der zweiten zwei Elemente der ersten in gleicher Weise entsprechen, so bilden diese Paare eine Involution und entsprechen den zugehörigen Elementen der ersten Reihe projectivisch. Durch Schnitt- und Scheinbildung erhält man die Erweiterung auf beliebige und nicht vereinigte Elementargebilde. Die Projectivität von zwei Involutionen begründet sich sofort durch ihre Projectivität zu demselben Elementargebilde erster Stufe.

Eine solche Beziehung construiert man z. B. mittelst eines Kegelschnittes für einen seiner Punkte T und einen beliebigen Punkt P seiner Ebene, indem man die Paare der Schnittpunkte der Strahlen $a', b', \ldots$ aus P mit dem Kegelschnitt mit T durch Strahlenpaare $a, a_1; b, b_1; \ldots$ verbindet. Jedes zu a', b', c' projectivische Elementargebilde erster Stufe ist auch projectivisch zu der Involution $a, a_1; b, b_1$. Und wenn man eine zweite Involution zu einem derselben projectivisch macht, so sind beide Involutionen auch projectivisch zu einander, rücksichtlich der Paare, welche in beiden Gebilden entsprechenden Elementen entsprechen.

Man bemerke, dass beim ersten Entstehen der Involution aus projectivischen Reihen resp. Büscheln ihre Perspectivität also Projectivität mit einem der erzeugenden Gebilde stattfand. (I, § 20, 14.)

42. Die projectivische Erzeugung der Kegelschnitte und der Kegel- und Regelflächen zweiten Grades aus Elementargebilden erster Stufe bietet ein Beispiel zum Gebrauch der vorigen Entwickelungen.

Mit den Symbolen $a_x, \ldots, \alpha_\xi, \ldots$ für die linearen homogenen Polynome $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3, \ldots, \alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3, \ldots$ werden

$a_x+\mu b_x=0$, $a_{x'}+\mu b_{x'}=0$, resp. $\alpha_\xi+m\beta_\xi=0$, $\alpha_{\xi'}+m\beta_{\xi'}=0$

zwei projectivische Strahlbüschel resp. Punktereihen der Grundebene ausgedrückt, in denen die Paare

$$a_x=0,\ a_x'=0;\ b_x=0,\ b_x'=0;\quad a_x+b_x=0,\ a_x'+b_x'=0$$

und dual einander entsprechen. Die Elimination von μ resp. m zwischen den Gleichungspaaren giebt als Gleichung der erzeugten Kegelschnitte

$$a_x b_x' - a_x' b_x = 0 \quad \text{und resp.} \quad \alpha_\xi \beta_\xi' - \alpha_\xi' \beta_\xi = 0$$

oder in entwickelter Form

$$x_1^2 (a_1 b_1' - a_1' b_1) + \cdot\cdot$$
$$+ x_1 x_2 \{(a_1 b_2' + a_2 b_1') - (a_1' b_2 + a_2' b_1)\} + \cdot\cdot = 0, \text{ etc.}$$

Irgend zwei andere Punkte des Kegelschnittes (und dual irgend zwei andere Tangenten desselben) aus den Strahlen

$$a_x+\mu b_x=0,\ a_x'+\mu b_x'=0 \quad \text{und} \quad a_x+\nu b_x=0,\ a_x'+\nu b_x'=0$$

als Scheitel liefern denselben Kegelschnitt als Erzeugniss der projectivischen Büschel

$$(a_x+\mu b_x)+\lambda(a_x'+\mu b_x')=0,\quad (a_x+\nu b_x)+\lambda(a_x'+\nu b_x')=0$$

in der Form

$$(a_x + \mu b_x)(a_x' + \nu b_x') - (a_x' + \mu b_x')(a_x + \nu b_x) = 0;$$

denn diess ist auch

$$(\mu - \nu)(a_x b_x' - a_x' b_x) = 0.$$

Die Punkte eines Kegelschnittes werden also mit irgend zweien seiner Punkte durch projectivische Büschel verbunden; ebenso werden seine Tangenten durch irgend zwei unter ihnen in projectivischen Reihen geschnitten.

Wenn die Büschel den gemeinsamen Strahl zum sich selbst entsprechenden Strahl haben, sodass ihre Gleichungen sind

$$a_x + \mu b_x = 0, \qquad a_x + \mu b_x' = 0,$$

so wird die Gleichung des erzeugten Kegelschnittes

$$a_x(b_x - b_x') = 0,$$

d. h. er besteht aus dem gemeinsamen Strahl und einer Geraden, die die Schnitte aller übrigen Paare entsprechender Strahlen enthält, der perspectivischen Axe. (I, § 17.) Und dual für perspectivische Reihen.

Weil die Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, $b_x' = 0$, $a_x' = 0$ die

auf einander folgenden Seiten AA', $A'B$, BB', $B'A$ eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks $AA'BB'$ bilden, so kann man nach § 18,2 die erhaltene Gleichung des Kegelschnittes durch den Satz interpretieren: Für alle Punkte P eines Kegelschnittes, der durch die Ecken eines Vierecks geht, sind die Producte der Abstände von den Paaren seiner Gegenseiten in constantem Verhältniss zu einander. Und dual.

In Plücker'schen Coordinaten führen wir die Untersuchung der Enveloppe aus den projectivischen Reihen auf den Geraden (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2), indem wir die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte mit dem Anfangspunkt durch $y : x = m_1$, $y : x = m_2$ und deren Projectivität durch die bilineare Relation

$$Am_1m_2 + Bm_1 + Cm_2 + D = 0$$

festsetzen. Wir erhalten dann aus den für einen Punkt der ersten Reihe geltenden Gleichungen

$$\xi x + \eta y + 1 = 0, \quad \xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0, \quad m_1 x - y = 0$$

durch Elimination von x, y, $m_1 = \dfrac{\xi_1 - \xi}{\eta - \eta_1}$ und ebenso für den entsprechenden der zweiten resp. $m_2 = \dfrac{\xi_2 - \xi}{\eta - \eta_2}$; sodann durch Einsetzen dieser Werthe in die Projectivitätsbedingung die Gleichung der Enveloppe

$$\begin{gathered} A(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) + B(\xi - \xi_1)(\eta_2 - \eta) \\ + C(\xi - \xi_2)(\eta_1 - \eta) + D(\eta_1 - \eta)(\eta_2 - \eta) = 0 \end{gathered}$$

oder

$$\begin{gathered} A\xi^2 + D\eta^2 - (B+C)\xi\eta - \{A(\xi_1 + \xi_2) - B\eta_2 - C\eta_1\}\xi \\ - \{D(\eta_1 + \eta_2) - B\xi_1 - C\xi_2\}\eta + A\xi_1\xi_2 - B\xi_1\eta_2 - C\xi_2\eta_1 \\ + D\eta_1\eta_2 = 0. \end{gathered}$$

Für $A = D = 1$ und $B = -C$ sind nach § 39,3 die Büschel aus dem Coordinatenanfang über den erzeugenden Reihen gleiche Büschel vom nämlichen Drehungssinn und der Anfangspunkt ist somit ein Brennpunkt des Kegelschnittes (I, § 36,9)

$$\begin{gathered} \xi^2 + \eta^2 - \{\xi_1 + \xi_2 - B(\eta_1 - \eta_2)\}\xi - \{\eta_1 + \eta_2 - B(\xi_1 - \xi_2)\}\eta \\ + \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - B(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) = 0. \end{gathered}$$

In der That hat man für die Tangenten mit unendlich grossen ξ und η nur $\xi^2 + \eta^2 = 0$, die Geraden nach den Kreispunkten der Ebene.

Diese Erzeugungen enthalten die Parameterdarstellung der Elemente des Kegelschnittes. Wir erhalten sie in der einfachsten Form, wenn wir die F.-Strahlen der erzeugenden Büschel a_x, b_x, a_x' und b_x' als die F.-Geraden x_1, x_2, x_2, x_3 resp. festsetzen, also a_x und b_x' als die dem gemeinsamen Strahl entsprechenden Strahlen nehmen. Dann ist die Gleichung des die Strahlen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ in den Schnitten mit $x_2 = 0$ berührenden Kegelschnittes aus den Büscheln

$$x_1 = \mu x_2, \qquad x_2 = \mu x_3, \qquad x_1 x_3 - x_2^2 = 0$$

und zugleich $\qquad x_1 : x_2 : x_3 = \mu^2 : \mu : 1.$

Der Parameter μ des erzeugenden Strahles ist der Parameter des zugehörigen Punktes im Kegelschnitt; Projectivität und Involution in Strahlbüscheln aus Punkten des Kegelschnittes wird übertragbar auf die Punkte des Kegelschnittes selbst, sodass wir (I, § 24) von projectivischen Reihen und von Involutionen aus Punkten des Kegelschnittes sprechen dürfen. Und ebenso dual entsprechend für die Tangenten des Kegelschnittes. Ueberdiess nicht nur so für die Involutionen zweiten Grades, sondern für die Involutionen aller Grade, wovon einiges unter den Beispielen.

Die Sehne zwischen den Punkten von den Parametern μ_1 und μ_2 ist

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \mu_1^2, & \mu_1, & 1 \\ \mu_2^2, & \mu_2, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 - (\mu_1 + \mu_2) x_2 + \mu_1 \mu_2 x_3 = 0;$$

somit hat die Tangente im Punkt μ die Gleichung

$$x_1 - 2\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0.$$

Sie zeigt, dass durch jeden Punkt der Ebene zwei Tangenten des Kegelschnittes gehen, die nur in eine zusammenfallen, wenn man hat $x_1 x_3 = x_2^2$, d. h. wenn der Punkt x_i auf dem Kegelschnitt liegt.

Wenn a_x und a_x' resp. auf x_1 und x_3, b_x auf x_2 reduciert werden, während b_x' als durch den F.-Punkt A_1 gehender Strahl die Gleichung $\qquad a_3 x_2 + a_2 x_3 = 0$

hat, so wird der Kegelschnitt aus den projectivischen Büscheln mit der Tangente $a_3 x_2 + a_2 x_3 = 0$ in A_1

$$a_3 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 - x_2 x_3 = 0.$$

Für $a_3 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_1 x_2 x_3 = 0$

gilt die Parameterdarstellung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mu(a_1 + a_2\mu) : (a_1 + a_2\mu) : -a_3\mu.$$

Dual analog für den dem F.-Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt.

Dass alle diese Betrachtungen mit demselben algebraischen Ausdruck auf das Bündel, also auf Strahlbüschel von demselben Scheitel in verschiedenen Ebenen und auf Ebenenbüschel mit sich schneidenden Scheitelkanten und somit auf Kegel zweiter Ordnung resp. Classe übergehen, braucht nur bemerkt zu werden.

1) Die Parameterdarstellung der Hyperbel für die Asymptoten als Axen oder $xy = k^2$ (I, § 27, 9) ist $x = k : \mu$, $y = k\mu$ und die Sehne $\mu_1 \mu_2$ wird

$$\mu_1 \mu_2 x - k(\mu_1 + \mu_2) + y = 0.$$

Für den auf einen Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkt bezogenen Kegelschnitt

$$a_{22} x^2 + a_{33} y^2 + 2 a_{12} x = 0$$

erhält man aus $y = \mu x$ den zweiten Punkt des Kegelschnittes in diesem Strahl mit

$$x = \frac{-2 a_{12}}{a_{22} + a_{33}\mu^2}, \qquad y = \frac{-2 a_{12}\mu}{a_{22} + a_{33}\mu^2}.$$

2) Die Parameterausdrücke für den Punkt des Kegelschnittes im Text und in 1) sind besondere Formen der allgemeinen als quadratische Functionen eines Parameters $\lambda : \mu$

$$x_1 = a_0\lambda^2 + a_1\lambda\mu + a_2\mu^2, \quad x_2 = b_0\lambda^2 + \cdots, \quad x_3 = c_0\lambda^2 + \cdots.$$

Betrachtet man in denselben λ^2, $\lambda\mu$ und μ^2 als Unbekannte, so erhält man mit **D** als der Determinante der Coefficienten und mit $A_0, B_0, C_0, A_1, \ldots$ als den Elementen ihres adjungierten Systems (§ 24)

$$\mathbf{D}\lambda^2 = A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0 x_3,$$

$$\mathbf{D}\lambda\mu = A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3, \quad \mathbf{D}\mu^2 = A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3.$$

Alle Punkte des Ortes liegen also auf dem durch

$$(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3)^2 = (A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0 x_3)(A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3)$$

dargestellten Kegelschnitt.

Für die Schnitte mit der Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

hat man durch Einsetzen

$$(\xi_1 a_0 + \xi_2 b_0 + \xi_3 c_0)\lambda^2 + (\xi_1 a_1 + \cdot\cdot)\lambda\mu + (\xi_1 a_2 + \cdot\cdot)\mu^2 = 0$$

und die Gerade berührt also den Kegelschnitt, wenn ihre Coordinaten ξ_i der Gleichung genügen

$$(\xi_1 a_1 + \xi_2 b_1 + \xi_3 c_1)^2 = 4(\xi_1 a_0 + \xi_2 b_0 + \xi_3 c_0)(\xi_1 a_2 + \xi_2 b_2 + \xi_3 c_2).$$

Aus dieser Gleichung in Tangentialcoordinaten lässt sich die Parameterdarstellung der Tangenten ganz analog entnehmen

$$\mathrm{D}\xi_1 = A_0 l^2 + 2A_1 lm + A_2 m^2,$$
$$\mathrm{D}\xi_2 = B_0 l^2 + 2B_1 lm + B_2 m^2, \qquad \mathrm{D}\xi_3 = C_0 l^2 + \cdots$$

3) Man interpretiere die cubischen Gleichungen

$$d_x e_x f_x + \lambda a_x b_x c_x = 0, \qquad d_x e_x f_x + \lambda' a_x^2 c_x = 0,$$
$$d_x e_x f_x + \lambda'' a_x^3 = 0$$

analog wie die quadratische im Text durch die Abstände des die Curve beschreibenden Punktes von den festen Geraden.

Wenn für die zweite $a_x = 0$ die unendlich ferne Gerade ist, so sagt sie aus, dass das Product der Abstände eines Punktes der Curve dritter Ordnung von ihren Asymptoten $d_x = 0$, $e_x = 0$, $f_x = 0$ zum Abstand desselben Punktes von der Verbindungsgeraden ihrer Schnittpunkte mit der Curve im Endlichen $c_x = 0$ ein constantes Verhältniss λ' hat. In der dritten sind $d_x = 0$, $e_x = 0$, $f_x = 0$ drei reelle Inflexionstangenten der Curve und $a_x = 0$ ist die gerade Verbindungslinie der zugehörigen Inflexionspunkte.

4) Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots = 0$$

zwischen zwei Veränderlichen x_1, x_2 drückt als Gleichung eines Büschels von n Strahlen aus A_3 eine Gruppe von n Punkten auf jedem Kegelschnitt aus, der durch den Scheitel A_3 geht; enthalten ihre Coefficienten einen Parameter linear, d. h. sind sie von der Form $(a_k + \lambda b_k)$, so bezeichnet sie eine Involution n^{ten} Grades im Strahlbüschel und auf einem solchen Kegelschnitt.

5) Wenn die bestimmenden Gruppen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und $b_1, b_2, \ldots b_n$ einer Involution n^{ten} Grades im Strahlbüschel auf dem durch ihren Scheitel gehenden Kegelschnitt K die Punktegruppen $A_1, A_2, \ldots A_n$ und $B_1, B_2, \ldots B_n$ ausschneiden, so bestimmen diese eine Punktinvolution n^{ten} Grades auf dem Kegelschnitt. Sowie bei der Involution zweiten Grades die Sehnen der Paare durch einen Punkt gehen, den wir den Pol der Involution im Hülfskegelschnitt nannten und der uns die wichtigsten Dienste leistete, so erhalten wir hier aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ geraden Verbindungslinien zwischen den Punkten einer Gruppe für alle Gruppen eine Curve als Enveloppe, von welcher wir sagen können, dass sie

von der Classe $(n-1)$ und von der Ordnung $(n-1)(n-2)$ ist. Für die Involutionen dritten und vierten Grades resp. ein Kegelschnitt und eine Curve dritter Classe und sechster Ordnung.

Der Beweis wird durch folgende Ueberlegungen geführt. Durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene des Kegelschnittes gehen $(n-1)$ Sehnen der Involution n^{ten} Grades, oder Verbindungslinien zweier Punkte derselben Gruppe, weil das von ihm ausgehende projicierende Strahlbüschel der Involution den Kegelschnitt in einer zweiten Involution n^{ten} Grades schneidet, die zur gegebenen projectivisch ist und somit $2n$ Elemente mit ihr gemein hat; weil aber unter diesen die Berührungspunkte der von P an den Kegelschnitt gehenden Tangenten sind, so bleiben $2n-2$ gemeinsame Punkte in $(n-1)$ durch P gehenden Sehnen — letzteres die Classenzahl der Enveloppe. Weil man ferner die Punkte X_i einer Gruppe X aus einem unter ihnen etwa X_1 mittelst der von ihm an die Enveloppe gehenden $(n-1)$ Tangenten erhält, so giebt es $2(n-1)$ Gruppen der Involution mit je einem doppelten Punkt, nämlich diese in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten der Enveloppe und des Kegelschnittes mit diesem. Für jeden Doppelpunkt aber bestimmen sich die übrigen Punkte seiner Gruppe durch die von ihm aus an die Enveloppe gehenden Tangenten, die den Kegelschnitt nicht berühren und da jede derselben, weil der Doppelpunkt zwei Punkte seiner Gruppe vertritt, für zwei vereinigte Tangenten von ihrem andern Endpunkt aus zählt, so ist sie Tangente der Enveloppe in diesem Endpunkt oder derselbe ist ein Schnittpunkt des Kegelschnittes mit ihr. Hiernach giebt es solcher Schnittpunkte $2(n-1)(n-2)$ und die Enveloppe muss daher eine Curve von der Ordnung $(n-1)(n-2)$ sein.

6) In Bezug auf die Involution n^{ten} Grades der Tangenten des Kegelschnittes in den Punkten der vorher betrachteten Involution gelten die dualen Ueberlegungen und Sätze. Wir wollen im Folgenden nur im Sinn der erstdurchgeführten sprechen.

7) Zwei Involutionen von den Graden n_1 und n_2 mit demselben Träger besitzen $(n_1-1)(n_2-1)$ gemeinschaftliche Elementenpaare, nämlich auf den gemeinsamen Tangenten ihrer Enveloppen; zwei quadratische Involutionen eines, zwei cubische vier, etc.

8) Weil ein Büschel von Curven oder Flächen n^{ter} Ordnung aus einer Geraden eine Involution n^{ten} Grades ausschneidet, in welcher $2(n-1)$ Gruppen mit Doppelpunkt enthalten sind, so wird eine Gerade seiner Ebene oder resp. im Raum von $2(n-1)$ Curven resp. Flächen des Büschels berührt, nämlich in diesen Doppelpunkten; also von zwei Kegelschnitten eines Büschels (I, § 25, 4), von zwei Flächen zweiten Grades im Büschel, von vier Curven dritter Ordnung, etc.

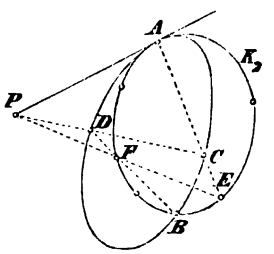
9) Der Ort dieser Doppelpunkte auf allen Strahlen eines Büschels ist eine den Scheitel enthaltende und dort die durch ihn gehende

Curve des Büschels berührende Curve von der Ordnung $2n - 1$; für ein Kegelschnittbüschel also eine Curve dritter Ordnung etc.

10) Involutionen auf einem Kegelschnitt können aber offenbar auch durch Büschel algebraischer Curven in seiner Ebene hervorgebracht werden, z. B. durch ein Kegelschnittbüschel Involutionen vierten, dritten und zweiten Grades, je nachdem der Kegelschnitt keinen oder einen Grundpunkt resp. zwei Grundpunkte des Büschels enthält; durch ein Büschel von Curven dritter Ordnung Involutionen sechsten, fünften, vierten, dritten und zweiten Grades, je nachdem die Zahl der auf dem Kegelschnitt liegenden Grundpunkte des Büschels 0, 1, 2, 3 oder 4 ist. So enthält ein Büschel von Kegelschnitten zwei Kegelschnitte, die einen durch zwei seiner Grundpunkte gehenden Kegelschnitt berühren — in den Doppelpunkten der von jenem auf ihm erzeugten Involution zweiten Grades, etc. So ein Kreisbüschel mit jedem Kreis seiner Ebene.

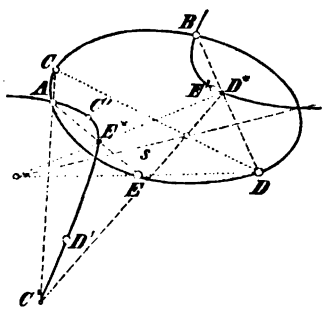
11) Sind A, B die beiden gemeinsamen Grundpunkte, G, H die Doppelpunkte der Involution auf K_2, so wird, falls der Pol der Involution in der Tangente zu K_2 in A liegt, der eine derselben z. B. H in CA liegen und man erhält einen Kegelschnitt des Büschels, der in A eine dreipunktige Berührung mit dem Kegelschnitt K_2 hat. Soll derselbe durch zwei Punkte C, D gehen, so schneidet die Gerade CD in der Tangente von K_2 in A den Pol P der Involution aus. Zieht man also AC und bestimmt ihren Schnitt E mit K_2, sowie EP und ihren Schnittpunkt F mit K_2, so geht DF durch B, den zweiten Grundpunkt, d. h. den vierten Schnittpunkt des in A an K_2 osculierenden Kegelschnittes mit K_2.

Fig. 32.



12) Zwei Kegelschnitte sind durch zwei gemeinsame Punkte A, B und durch je drei andere C, D, E; C', D', E' bestimmt; man soll die Verbindungslinie s ihrer beiden andern gemeinsamen Punkte mit dem Lineal construieren. Man betrachtet A, B, C, D als Grundpunkte des Büschels und die Geraden AC, BD als einen Kegelschnitt desselben; schneiden sie den Kegelschnitt $ABC'D'E'$ in C^*, D^* zum zweiten Mal, so ist der Punkt CD, C^*D^* ein Punkt von s. Die Geraden AE, BD; AC, BE oder AD, BE etc. liefern in gleicher Weise je einen weitern Punkt von s. (Vergl. den Specialfall in II, § 32, 7.)

Fig. 33.



Für $U = 0$ als homogene quadratische Gleichung mit drei Veränderlichen und $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ als homogen und linear in denselben Veränderlichen folgt aus $U + \lambda \mathbf{AB} = 0$, $U + \lambda' \mathbf{AC} = 0$ immer $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{C}) = 0$; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ ist Pol resp. Polare der Involution, d. h. der Pol liegt in der Verbindungsgeraden der zwei andern Grundpunkte und dual; daraus folgen die Constructionen.

Man sieht zugleich, dass die Realität der Grundpunkte etc. nicht wesentlich ist für die Richtigkeit der Schlüsse.

43. Wenn aber mit a_x, etc. lineare homogene viergliedrige Polynome $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$, etc. symbolisch bezeichnet werden, so sind durch

$$a_x + \mu b_x = 0 \quad \text{und} \quad a_x' + \mu b_x' = 0$$

resp. $$\alpha_\xi + m\beta_\xi = 0, \qquad \alpha_\xi' + m\beta_\xi' = 0$$

zwei projectivische Ebenenbüschel und zwei projectivische Punktereihen mit Trägern von unabhängiger Lage ausgedrückt und die Elimination von μ resp. m liefert in den oben erhaltenen Formen die Gleichungen der durch den Schnitt aller entsprechenden Ebenenpaare und dual erzeugten Regelschaaren durch das windschiefe Vierseit aus

$a_x = 0$, $a_x' = 0$; $a_x = 0$, $b_x = 0$; $b_x' = 0$, $a_x' = 0$; $b_x' = 0$, $b_x = 0$

resp. $\alpha_\xi = 0$, $\alpha_\xi' = 0$; etc.

mit der Transversale der zweiten und dritten unter ihnen

$$a_x + b_x = 0, \quad a_x' + b_x' = 0 \qquad \text{resp. dual.}$$

Irgend zwei Strahlen der so erzeugten Regelschaar, etwa aus den Paaren

$a_x + \mu b_x = 0$, $a_x' + \mu b_x' = 0$; $a_x + \nu b_x = 0$, $a_x' + \nu b_x' = 0$

erzeugen dieselbe Fläche mittelst ihrer zweiten Regelschaar, der Transversalen der ersten aus den Büscheln

$(a_x + \mu b_x) + \lambda(a_x' + \mu b_x') = 0$, $(a_x + \nu b_x) + \lambda(a_x' + \nu b_x') = 0$

mit der Gleichungsform

$$(\mu - \nu)(a_x b_x' - a_x' b_x) = 0; \text{ etc.}$$

Beide zu einander duale Constructionen sind, wie wir wissen, die beiden Formen der Construction der Aufgabe, alle Transversalen zu drei windschiefen Geraden zu bestimmen (II, § 35), was wir auch schon in Strahlencoordinaten in § 26, 10 ausgeführt haben.

Wenn a_x, b_x, a_x', b_x' sich resp. auf x_1, x_4, x_2, x_3 reducieren, sodass die F.-Geraden A_2A_3, A_1A_4 die Scheitelkanten der Büschel sind, so folgt aus $x_1 + \mu x_1 = 0$, $x_2 + \mu x_3 = 0$ durch Elimination $x_1x_3 = x_2x_4$ und man erhält dual entsprechend $\xi_1\xi_3 = \xi_2\xi_4$, die die E.-Elemente enthaltenden Hyperboloide von § 29, 3.

Diess Hyperboloid enthält das F.-Linien-Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ und den E.-Punkt. Die Ebenen der Büschel aus A_2A_3, A_1A_2

$$k_1x_1 = k_4x_4 \quad \text{und} \quad k_3x_3 = k_4^*x_4$$

schneiden sich in noch einem Punkte der Fläche, für die man hat

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{k_4}{k_1} : \frac{k_4}{k_1}\frac{k_4^*}{k_3} : \frac{k_4^*}{k_3} : 1,$$

wir setzen $= \lambda : \lambda\mu : \mu : 1$.

Betrachtet man die beiden ihn hiernach bestimmenden Verhältnisse $k_4 : k_1$ und $k_4^* : k_3$ als die Coordinatenverhältnisse eines Punktes in der Ebene $A_1'A_2'A_3'$, also etwa $x_2' : x_1'$ und $x_2' : x_3'$, so bildet man die Centralprojection des Hyperboloids aus seinem Punkte A_4 auf die Ebene $A_1'A_2'A_3'$. Der ebene Querschnitt

$$\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 + \xi_4x_4 = 0$$

erscheint in ihr als durch die Spuren der Erzeugenden

$$\xi_1x_2'x_3' + \xi_2x_2'^2 + \xi_3x_1'x_2' + \xi_4x_1'x_3' = 0$$

dargestellt, einen durch A_1', A_3' gehenden Kegelschnitt, wie auch geometrisch klar ist. Für $x_4 = 0$ zerfällt er in die Geraden $x_1'x_3' = 0$ oder A_2A_3, A_1A_2, für $x_2 = 0$ wird er zur Doppellinie $x_2' = 0$, etc. Wenn $\xi_1\xi_3 = \xi_2\xi_4$ ist, so zerfällt diese Gleichung stets in lineare Factoren, nämlich

$$\xi_1\xi_2x_2'x_3' + \xi_2^2x_2'^2 + \xi_2\xi_3x_1'x_2' + \xi_1\xi_3x_1'x_3'$$

ist $$(\xi_1x_3' + \xi_2x_2')(\xi_2x_2' + \xi_3x_1')$$

und man erhält zwei durch A_1' resp. A_3' gehende Gerade als Bild des Querschnittes der Tangentialebene, natürlich die Bilder der ihr angehörigen Geraden der Fläche.

Wenn so ein Punkt des Hyperboloids mittelst der Parameter λ, μ ausgedrückt wird, so wird jede Gleichung zwischen diesen Parametern eine Curve auf der Fläche darstellen und es gilt der Satz, dass dieselbe von der Ordnung $(p + q)$ ist, wenn der Grad ihrer Gleichung in λ gleich p und in μ gleich

q ist oder umgekehrt. Denn aus dem Parameterausdruck der Ebene ξ_i $\quad (\xi_2\lambda + \xi_3)\mu + (\xi_1\lambda + \xi_4) = 0,$
zugleich der Projectivitätsrelation zwischen λ und μ (vergl. B. 1), folgt $\quad \mu = -(\xi_1\lambda + \xi_4) : (\xi_2\lambda + \xi_3)$
und durch Einsetzen dessen für μ verwandelt sich eine solche Gleichung in eine Gleichung vom Grade $(p + q)$ in λ oder $k_4 : k_1$ und liefert die $(p + q)$ Werthe, die diesem Parameter für die in besagter Ebene liegenden Punkte der Curve zukommen.

Insbesondere liefert eine Gleichung vom Grade n in λ allein n gerade Erzeugende der A_2A_3 und A_1A_4 schneidenden Schaar; ebenso eine solche in μ allein n Erzeugende der andern Schaar. Die in λ und μ zugleich linearen Gleichungen sind die der Kegelschnitte in der Fläche oder der ebenen Querschnitte; die in λ quadratischen und in μ linearen und umgekehrt repräsentieren die Raumcurven dritter Ordnung in ihr, also $\quad (a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mu + (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) = 0,$
die die Erzeugenden der einen Schaar zweimal und die der andern einmal schneiden: ihre Durchdringungen mit andern Flächen zweiten Grades, die eine Mantellinie jener Schaar enthalten. Die Curven vierter Ordnung auf der Fläche theilen sich in zwei Arten nach ihren Gleichungsformen

$$(a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mu^2 + (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)\mu + (c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) = 0,$$
$$(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)\mu + (b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) = 0;$$

sodass die erste Art jede Erzeugende zweifach schneidet, wie es bei der Durchdringung der Fläche mit einer andern Fläche zweiten Grades geschieht; während die zweite Art von den Erzeugenden der einen Schaar dreifach, von denen der andern nur einfach geschnitten wird; so geschieht es bei der Durchdringungscurve des Hyperboloides mit einer Fläche dritten Grades, die eine seiner Erzeugenden zur Doppelgeraden hat. (II, § 45, 30; § 60, 3.) Wir erhalten die Gleichungen ihrer Projectionen aus A_4 auf $A_1'A_2'A_3'$ durch Einführung der x_i', nämlich die des Bildes der Raumcurve dritter Ordnung

$$a_0x_2'^3 + a_1x_1'x_2'^2 + a_2x_1'^2x_2' + b_0x_2'^2x_3' + b_1x_1'x_2'x_3' + b_2x_1'^2x_3' = 0,$$

eine Curve dritter Ordnung, die A_1 einfach und A_3 doppelt enthält.

Die Gleichung des Bildes der Curve vierter Ordnung erster Art ist

$$a_0 x_2'^4 + a_1 x_1' x_2'^3 + a_2 x_1'^2 + b_0 x_2'^3 x_3' + b_1 x_2'^2 x_1' x_3' + b_2 x_1'^2 x_2' x_3' + c_0 x_2'^2 x_3'^2 + c_1 x_1' x_2' x_3'^2 + c_2 x_1'^2 x_3'^2 = 0,$$

eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A_1 und A_3.

Und die Gleichung des Bildes der Curve vierter Ordnung zweiter Art, durch welche nur eine Fläche zweiten Grades geht, ist

$$a_0 x_2'^4 + a_1 x_1' x_2'^3 + a_2 x_1'^2 x_2'^2 + a_3 x_1'^3 x_2' + b_0 x_2'^3 x_3' + b_1 x_1' x_2'^2 x_3' + b_2 x_1'^2 x_2' x_3' + b_3 x_1'^3 x_3' = 0,$$

eine Curve vierter Ordnung, welche A_1 einfach und A_3 dreifach enthält; letzteres natürlich weil die Gerade $A_4 A_3$ wie alle Geraden ihrer Schaar nach dem Grade ihrer Gleichung in λ eine dreifach schneidende Sekante der Raumcurve ist.

Man setzt diess leicht auf die nächsthöheren Grade fort als eine Classification der Curven auf dem einfachen Hyperboloid. Dem Grade $2n$ wie dem Grade $2n+1$ entspringen n verschiedene Arten; die Curven dritter Ordnung auf der Fläche unterscheiden sich daher nur durch ihr Verhalten zu den beiden Regelschaaren derselben; Curven vierter Ordnung giebt es aber zwei Arten, die man als (2, 2) und als (3, 1) oder (1, 3) unterscheiden kann; ebenso Curven fünfter Ordnung (2, 3) oder (3, 2) und (1, 4) oder (4, 1); Curven sechster und siebenter Ordnung drei Arten (1, 5), (2, 4), (3, 3) etc. und resp. (1, 6), (2, 5), (3, 4) etc. Dazu kommen die Gruppen von Erzeugenden der einen und der andern Regelschaar. Die Gleichungen solcher Curven und ihrer Bilder werden auch als die partieller oder vollständiger Durchdringungen des Hyperboloids mit andern Flächen leicht gebildet.

Eine Curve (p, q) des Hyperboloids wird durch $pq+p+q$ ihrer Punkte bestimmt — nach der Zahl der Coefficienten ihrer Parametergleichung (§ 33); der Kegelschnitt durch drei, die (2, 1), (3, 1), (2, 2) durch fünf, sieben, acht; etc.

Zwei Curven auf demselben Hyperboloid von den Ordnungen $(p+q)$ und $(p'+q')$ resp. oder genauer von Gleichungen, die in λ die Grade p, p' und in μ die Grade q, q' resp. haben, haben mit einander $(pq'+p'q)$ Punkte gemein, nach der Zahl der gemeinsamen Wurzelwerthe ihrer Gleichungen.

Daher haben zwei Kegelschnitte auf derselben Fläche zweiten Grades immer zwei und zwei Raumcurven vierter Ordnung erster Art immer acht Schnittpunkte, wie auch eine der ersten mit einer der zweiten Art; zwei Raumcurven dritter Ordnung haben dagegen vier oder fünf gemeinsame Punkte, je nachdem sie dieselbe Regelschaar des Hyperboloids zu Bisekanten haben oder nicht; und zwei Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art haben sechs oder zehn, je nachdem dieselbe Regelschaar ihre Trisekanten liefert oder nicht. Auch einige dieser Resultate kennen wir schon. (II, § 45, 19; § 46.)

Wir verweilen bei den Curven vierter Ordnung erster Art. Die in λ, wie in μ quadratische Parametergleichung von der Form

$$(A_0\lambda^2+A_1\lambda+A_2)\mu^2+(B_0\lambda^2+B_1\lambda+B_2)\mu + (C_0\lambda^2+C_1\lambda+C_2)=0$$

drückt auf dem Hyperboloid und wie in der Ebene der Büschel aus den F.-Punkten A_3 und A_1

$$x_1-\lambda x_2=0, \quad x_2-\mu x_3=0$$

aus, dass der Reihe aller Parameterwerthe λ, μ je ein Paar in der Regelschaar μ resp. λ entspreche und kann somit als Ausdruck der projectivischen Zuordnung von zwei Involutionen in den Regelschaaren des Hyperboloids, wie in den Strahlbüscheln der Ebene angesehen werden. Für den letzten Fall erhält man das Erzeugniss ihrer Verbindung in der Form

$$(A_0x_1^2+A_1x_1x_2+A_2x_2^2)x_2^2+(B_0x_1^2+B_1x_1x_2+B_2x_2^2)x_2x_3 + (C_0x_1^2+C_1x_1x_2+C_2x_2^2)x_3^2=0,$$

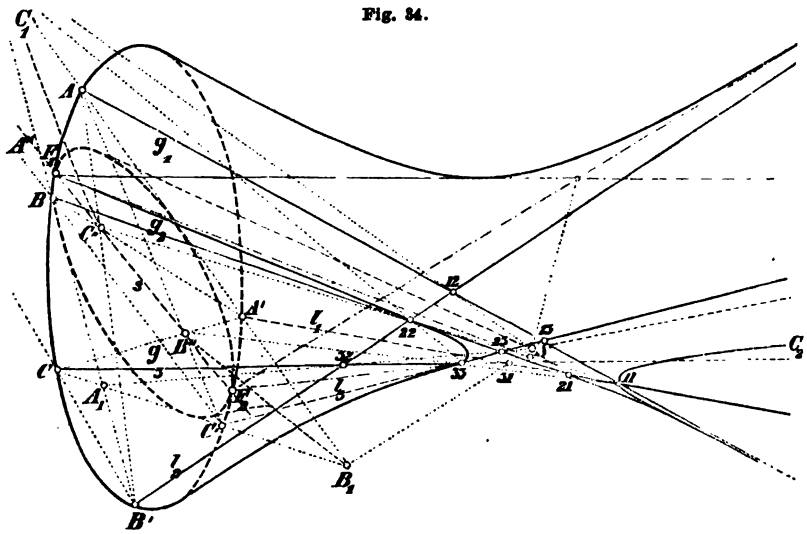
welche für $x_2=0$ sofort liefert $C_0x_1^2x_3^2=0$, d. h. die Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A_1, A_3 charakterisiert. Soll der gemeinsame Strahl A_1A_3 zu entsprechenden Paaren gehören, so muss für $\mu=0$ sich $\lambda=\infty$ ergeben, oder $C_0=0$ sein; dann ist $x_2=0$ ein Theil des Erzeugnisses und der Rest eine allgemeine Curve dritter Ordnung.

Wir bemerken noch, dass sich aus den erzeugenden Elementargebilden die involutorischen Zuordnungen aller Grade auf die Erzeugenden des Hyperboloids übertragen. In den Beispielen wollen wir zu dem einfachsten Falle zurückgehen.

1) Wenn die Ebenenbüschel aus zwei Erzeugenden der einen und der andern Schaar zu einander projectivisch sind, so nennen wir auch die von ihnen aus dem Hyperboloid geschnittenen Strahlen

der beiden Schaaren einander projectivisch; entsprechen den Geraden g_1, g_2, g_3 der Schaar g die Geraden l_1, l_2, l_3 der Schaar l, so werden wir die weiteren Paare mittelst der Perspectivität der Reihen oder Büschel $(g_i . l_1 l_2 l_3)$ und $(l_i . g_1 g_2 g_3)$ sehr einfach construieren. Bilden wir die Ebene der sich selbst entsprechenden Punkte oder den Schnittpunkt S der sich selbst entsprechenden Ebenen $g_1 l_1$, $g_2 l_2$, $g_3 l_3$, so schneidet jene aus dem Hyperboloid einen Kegelschnitt C_2 und von diesem Punkte geht an dasselbe ein Berührungskegel K^2, welche mit beiden Regelschaaren zugleich perspectivisch liegen und als Berührungscurve C_2 und Berührungskegel SC_2 des Hyperboloids zu einander gehören (vergl. auch II, § 37); denn die projectivischen Reihen von Punkten, welche die

Fig. 34.



Regelschaaren auf einem Kegelschnitte bestimmen, und die projectivischen Systeme von Tangentialebenen, welche sie mit diesem Kegel erzeugen, haben drei Paare von Elementen und somit alle Elementenpaare entsprechend gemein (I, § 29).

Wenn nun beide Regelschaaren mit irgend einer Ebene geschnitten, oder aus irgend einem Punkt projiciert werden, so liegen die Schnittpunkte in einer Curve zweiter Ordnung, respective die projicierenden Ebenen auf einem Kegel zweiter Classe, und jene bilden zwei vereinigte projectivische Reihen in der Curve, diese zwei vereinigte projectivische Tangentialebenensysteme an dem Kegel; die Doppelpunkte F_1, F_2 in jenen sind die Schnittpunkte seiner Ebene mit dem Kegelschnitt C_2, also zwei bestimmte Punkte in ihrer Schnittlinie mit der Ebene von C_2, die Doppelebenen $\mathbf{F}_1$,

$\mathbf{F}_2$ in diesen die Tangentialebenen von seinem Scheitel an den Kegel K^2, also zwei bestimmte Ebenen durch die von ihm nach dem Scheitel von K^2 gehende Gerade. Bezeichnen wir, um nur den ebenen Schnitt weiter zu verfolgen, die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlenpaare g_1, l_1; g_2, l_2; g_3, l_3; etc. untereinander durch A_{11}, A_{22}, A_{33} und mit der Schnittebene durch A, A'; B, B'; C, C'; etc. respective, so sind die Geraden AA', BB', CC', etc. die Spuren der Tangentialebenen $g_1 l_1, \ldots$ des Kegels K^2 in der Schnittebene; und in den Doppelpunkten F_1, F_2 haben wir als Tangenten der Schnittcurve die Spuren derjenigen beiden Tangentialebenen an K^2, welche ihre Berührungspunkte in der Schnittebene haben. Die Verbindungslinie dieser Punkte wird als Verbindungslinie der drei Punkte AB', $A'B$; BC', $B'C$; CA', $C'A$ gefunden, wie schon sonst bekannt; denn sie sind die Durchstosspunkte C'', A'', B'' der drei Geraden $A_{11}A_{22}$, $A_{22}A_{33}$, $A_{33}A_{11}$*) oder der Durchschnittsgeraden der Ebenenpaare $g_1 l_2$, $g_2 l_1$; $g_2 l_3$, $g_3 l_2$; $g_3 l_1$, $g_1 l_3$, deren Spuren jene sind. Ebenso sind (BB', CC') oder A_1, (CC', AA') oder B_1, (AA', BB') oder C_1 die Durchstosspunkte von $A_{23}A_{32}$, $A_{31}A_{13}$, $A_{12}A_{21}$. Und da die Geraden von (AA', BB') nach $(AB, A'B')$; von (BB', CC') nach $(BC, B'C')$ und von (CC', AA') nach $(CA, C'A')$ die Polaren von jenen drei Durchstosspunkten sind, so müssen sie sich im Pol von F_1F_2 oder dem Berührungspol der beiden Kegelschnitte treffen. Das Erzeugniss der Verbindung von zwei projectivischen Punktreihen in derselben Curve zweiter Ordnung ist also eine Curve zweiter Classe, welche jene in den Doppelpunkten der Reihen zweimal berührt; das Erzeugniss der Verbindung von zwei projectivischen Tangentenschaaren derselben Curve zweiter Classe ist eine Curve zweiter Ordnung, welche jene nach den sich selbst entsprechenden Tangenten doppelt berührt.

2) Wenn die Schnittebene durch die Spitze des Kegels K^2 geht, umhüllen die Sehnen AA', BB', etc. statt eines den Träger doppelt berührenden Kegelschnittes einen Punkt, der auch der Schnittpunkt der Tangenten des Trägers in den Doppelpunkten ist; nun entsprechen aber auch die Punkte A, A' etc. einander vertauschbar und man hat die für die Constructionen so wichtige Eigenschaft der involutorischen Reihen in Curven zweiter Ordnung (I, § 30) wiedergefunden.

3) Wären endlich die Strahlen derselben Regelschaar durch die von ihnen in einer Geraden der andern Regelschaar bestimmten Punktreihen in zwei projectivische oder involutorische

*) In der Figur sind bei den A_{ik} die A weggelassen; auch ist zur Erhöhung der Deutlichkeit ein Stück der Umrisshyperbel der Regelschaar in der Mitte unten unterdrückt.

Gruppen getheilt, so ist ihr Erzeugniss das Paar der Doppelstrahlen. Diess führt, wenn dieselben nicht reell sind, zu imaginären Geraden zweiter Art, die so durch eine elliptische Involution unter Beifügung des Sinnes bestimmt sind. (Vergl. oben § 11.)

4) Zwei Paare von projectivischen Gebilden erster Stufe mit demselben Träger haben vier gemeinsame Elementenpaare; für ein Strahlbüschel gesprochen entspringen dieselben aus den gemeinsamen Tangenten der beiden Curven zweiter Classe, welche die Sehnen zwischen den Paaren eines jeden der projectivischen Gebilde im Hülfskegelschnitt umhüllen.

5) Diese gemeinsamen Paare sind jedoch mit Lineal und Zirkel construierbar, wie folgende Ueberlegung zeigt. Es seien a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 die gegebenen Paare der ersten, x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 die der zweiten Projectivität im Strahlbüschel T, ein Hilfskreis sei durch T geführt und schneide die Punkte A_1, B_1, C_1 etc., X_3, etc. aus jenen; rechne man nun die Punkte X_4, Y_4, Z_4 in die Reihe A_1, B_1, C_1, und bestimme X_2, Y_2, Z_2 so, dass sie ihnen als Punkte von der Reihe A_2, B_2, C_2 projectivisch entsprechen, natürlich mittelst der Pascal-Linie p_{12} der ersten Projectivität oder der Sehne doppelter Berührung des Kreises mit dem von A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, etc. umhüllten Kegelschnitt. Wir bestimmen dann die Doppelpunkte F_{23} und F_{23}^* der beiden projectivischen Reihen X_2, Y_2, Z_2 und X_3, Y_3, Z_3 mittelst der zugehörigen Pascal-Linie p_{23} und erhalten in den Gruppen 1 und 4 dieselben Punkte als ihnen entsprechend, wir wollen bezeichnen F_{14}, F_{14}^*. Die Linien $F_{14}F_{23}$, $F_{14}^*F_{23}^*$ sind zwei der gesuchten gemeinsamen Tangenten.

Die beiden andern erhalten wir, indem wir X_4, Y_4, Z_4 der Reihe A_2 etc. zuzählen und die entsprechenden X_1, Y_1, Z_1 in der Reihe A_1 etc. mittelst p_{12} bestimmen und zu den Reihen X_3, Y_3, Z_3; X_1, Y_1, Z_1 die Doppelpunkte F_{13}, F_{13}^* mittelst p_{13} angeben; ihnen entsprechen in den Reihen 2 und 4 dieselben Punkte F_{24}, F_{24}^*, und die Geraden $F_{13}F_{24}$, $F_{13}^*F_{24}^*$ bilden das zweite Paar der gesuchten gemeinsamen Tangenten. Man hat für die erste Hälfte der Construction

$$(X_3Y_3Z_3F_{23}F_{23}^*) \barwedge (X_4Y_4Z_4F_{14}F_{14}^*) \barwedge (X_2Y_2Z_2F_{14}F_{14}^*)$$

und für die zweite

$$(X_3Y_3Z_3F_{13}F_{13}^*) \barwedge (X_4Y_4Z_4F_{24}F_{24}^*) \barwedge (X_1Y_1Z_1F_{24}F_{24}^*).$$

Die wirkliche Durchführung der Construction, wie die der dual entsprechenden unter 10) ist dringend zu empfehlen.

6) In zwei projectivischen Elementargebilden Paare von gegebenem Segment oder von bestimmtem Winkel zu bestimmen, oder Paare von gegebenem Halbierungselement — Specialfälle des vorigen Problems.

Ebenso die Bestimmung der Paare, welche mit zwei gegebenen Elementen eine Gruppe bilden, die mit einer gegebenen projectivisch ist.

Man übertrage die vorige Constructionsmethode auf die Bestimmung der beiden gemeinsamen Paare zwischen einer Involution im Strahlbüschel und zwei projectivischen Büscheln von demselben Scheitel. (Früher Art. 5.)

7) Wenn zwei Kegelschnitte einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren und je durch drei Tangenten und die Zuordnung ihrer Schnittpunkte bestimmt sind, so lassen sich nach dem Vorigen ihre vier gemeinsamen Tangenten durchaus linear construieren.

Man übertrage die vorige Construction auf den Fall der projectivischen Gebilde in der Punktreihe.

8) Die Construction des Beispiels 1) über die projectivischen Regelschaaren drückt sich den Bezeichnungen des Textes gemäss algebraisch so aus. Sind im Hyperboloid $x_1x_3 = x_2x_4$ die Regelschaaren l und g durch $x_1 - \lambda x_4 = 0$ und $x_3 - \mu x_4 = 0$ ausgedrückt, findet also Projectivität statt mit $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$, so ist der Ort des Punktes $g_\mu l_\lambda$ ausgedrückt durch

$$ax_2 + bx_1 + cx_3 + dx_4 = 0,$$

d. h. er ist ein ebener Querschnitt; ebenso ist die Enveloppe der Ebene $g_\mu l_\lambda$ ein Punkt, wie wir auch rechnerisch sehen werden der Pol des besagten Querschnittes; denn seine Gleichung ist

$$c\xi_1 - d\xi_2 + b\xi_3 - a\xi_4 = 0.$$

9) Aus einer Involution dritten und einer Involution zweiten Grades in Strahlbüscheln derselben Ebene entsteht eine Curve fünfter Ordnung mit dreifachem und doppeltem Punkt in den Scheiteln; speciell, wenn der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt; etc. Man zeige, wie weitere Doppelpunkte dieser Curven hervorgebracht werden können durch Zuordnung von Doppelstrahlen der einen und der andern Involution. Wie kann aus zwei Involutionen dritten Grades eine Curve vierter Ordnung ohne Doppelpunkt erzeugt werden?

10) Die analogen Ebenenbüschel-Involutionen erzeugen Regelflächen der entsprechenden Grade mit zwei vielfachen Geraden in den Scheitelkanten. (Vergl. II, § 60.)

44. Die eine Regelschaar des Hyperboloids $x_1x_3 = x_2x_4$ wird durch das Ebenenbüschel $x_1 = \lambda x_4$ oder $\lambda x_3 = x_2$, die andere durch $x_3 = \mu x_4$ oder $x_2 = \mu x_1$ ausgeschnitten oder jenes erzeugt die erste mit dem zu ihm projectivischen Büschel $x_1 = \lambda x_4$ und dieses die zweite mit $x_3 = \mu x_4$; wir können

darnach die erste die Schaar λ und die zweite die Schaar μ nennen.

Wenn unter den Ebenen des Büschels λ eine involutorische Zuordnung stattfindet, so überträgt sich dieselbe auf die Regelschaar λ, und ebenso bei dem Büschel und der Regelschaar μ. Setzen wir also mit Constanten a_i resp. b_i

$$a_0\lambda\lambda_1 + a_1(\lambda + \lambda_1) + a_2 = 0,$$
$$b_0\mu\mu_1 + b_1(\mu + \mu_1) + b_2 = 0,$$

so sind die Paare der Ebenen und der in ihnen liegenden Geraden λ, λ_1 und wieder die Paare der Ebenen und Geraden μ, μ_1 Paare je einer Involution. Wir wollen diese Involutionen der Ebenen um A_1A_4 resp. A_3A_4 und der zugehörigen Regelschaaren mit den F.-Geraden A_2A_3, A_1A_2 resp. geschnitten denken und können dann nach § 41, 5 ihre Projectivität dadurch herstellen, dass wir zu dem gemeinsamen Punkt A_2 beider so erzeugten Reihen die harmonisch conjugierten in Bezug auf die Paare der Involution bilden und ihre Reihen als projectivisch fortsetzen. Dann entspricht einem reellen Doppelelement der einen Involution ein reelles oder nicht reelles Paar der andern, einem imaginären Doppelelement aber stets ein imaginäres Paar der andern Involution.

Weil

$$\lambda = x_2 : x_3 = (A_2A_3E_{23}P_{23}) \text{ und } \mu = x_2 : x_1 = (A_2A_1E_{12}P_{12})$$

ist, so entspricht dem gemeinsamen Punkt A_2 in der Reihe λ wie in der Reihe μ der Parameterwerth Null; die den Paaren λ, λ_1 und resp. μ, μ_1 entsprechenden vierten harmonischen zu A_2 haben somit die Parameterwerthe λ_0, μ_0 aus

$$\frac{\lambda - 0}{\lambda_1 - 0} : \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = -1, \quad \frac{\mu - 0}{\mu_1 - 0} : \frac{\mu - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = -1$$

d. h. resp.

$$\lambda_0 = \frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}, \quad \mu_0 = \frac{2\mu\mu_1}{\mu + \mu_1}$$

oder durch Einsetzung der Werthe von λ_1, μ_1 aus den resp. Gleichungen der Involutionen

$$\lambda_0 = -2\frac{\lambda(a_1\lambda + a_2)}{a_0\lambda^2 - a_2}, \quad \mu_0 = -2\frac{\mu(b_1\mu + b_2)}{b_0\mu^2 - b_2}$$

und die Projectivität der Involutionen fordert nun nach § 39 in allgemeinster Form eine Relation

$$A\lambda_0\mu_0 + B\lambda_0 + C\mu_0 + D = 0.$$

Die Einsetzung der vorstehenden Werthe von λ_0, μ_0 in dieselbe liefert den Parameterausdruck der Curve, in welcher die Quadrupel der Schnittpunkte entsprechender Paare beider involutorischen Regelschaaren gelegen sind. Und man erhält wie im vorigen Paragraph die Centralprojection derselben aus dem F.-Punkt A_4 auf die Ebene $A_1'A_2'A_3'$, indem man λ durch $x_2' : x_1'$ und μ durch $x_2' : x_3'$ ersetzt — wir werden jedoch x_i statt x_i' schreiben. So ergiebt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} &x_2^4(4Aa_1b_1 - 2Ba_1b_0 - 2Ca_0b_1 + Da_0b_0) \\ &+ 2x_1x_2^3(2Ab_1 - Bb_0)a_2 + 2x_3x_2^3(2Aa_1 - Ca_0)b_2 \\ &+ 2x_2^2x_3^2(Ba_1 - Da_0)b_2 + 2x_1^2x_2^2(Cb_1 - Db_0)a_2 \\ &+ x_1^2x_3^2Da_2b_2 - 2x_1^2x_2x_3Ca_2b_2 + 4x_1x_2^2x_3Aa_2b_2 \\ &+ 2Ba_2b_2x_1x_2x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Man sieht, dass das Bild eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A_1, A_3, den Spurpunkten der Scheitelkanten der involutorischen Ebenenbüschel ist, weil die Einsetzung von $x_2 = 0$ die Gleichung auf das Glied $Da_2b_2x_1^2x_3^2 = 0$ reduciert.

Für die speciellen Formen der Projectivitätsgleichung verschwinden einzelne ihrer Glieder; für $B = C = 0$ z. B. oder für einander verkehrt entsprechende F.-Elemente wird sie ohne wesentliche Aenderung der Bedeutung

$$\begin{aligned} &(4Aa_1b_1 + Da_0b_0)x_2^4 + 4Aa_2b_1x_1x_2^3 + 4Aa_1b_2x_3x_2^3 \\ &- 2Da_0b_2x_2^2x_3^2 - 2Da_2b_0x_1^2x_2^2 + Da_2b_2x_1^2x_3^2 \\ &+ 4Aa_2b_2x_1x_2^2x_3 = 0 \end{aligned}$$

und die entsprechende Parametergleichung der Curve auf dem Hyperboloid ist (vergl. § 43)

$$\begin{aligned} &\{(4Aa_1b_1 + Da_0b_0)\lambda^2 + 4Aa_2b_1\lambda - Da_2b_0\}\mu^2 \\ &+ \{4Ab_2\lambda(a_1\lambda + a_2)\}\mu + Db_2(-2a_0\lambda^2 + a_2) = 0. \end{aligned}$$

Für direct entsprechende F.-Elemente oder $A = D = 0$ und auch schon für $D = 0$ allein wird sie aber durch Wegfall des einzigen von x_2 freien Gliedes zerlegbar, im ersten Falle zu

$$\begin{aligned} x_2\{&-2x_2^3(Ba_1b_0 + Ca_0b_1) - 2Ba_2b_0x_1x_2^2 - 2Ca_0b_2x_2^2x_3 \\ &+ 2Ba_1b_2x_2x_3^2 + 2Ca_2b_1x_1^2x_2 + 2Ba_2b_2x_1x_3^2 \\ &- 2Ca_2b_2x_1^2x_3\} = 0 \end{aligned}$$

d. h. das Bild zerfällt in die Gerade $A_1 A_3$ und eine Curve dritter Ordnung durch dieselben beiden Punkte.

Wenn im ersten Falle auch D verschwindet oder im zweiten Falle B, so würde der Factor x_2^2 vortreten und ein Kegelschnitt durch A_1, A_3 mit dieser doppelten Geraden das Bild der Raumcurve sein; aber dann verschwindet auch A aus der Gleichung, die Involution ist singulär, was hier ausgeschlossen werden soll.

Die Parametergleichungen der allgemeinen Formen drücken die Projectivität der erzeugenden Involutionen gemäss dem Vorigen aus. Die allgemeinste lautet

$$\begin{aligned}&\{(4Aa_1b_1 - 2Ba_1b_0 - 2Ca_0b_1 + Da_0b_0)\lambda^2\\ &+ 2(2Aa_2b_1 - Ba_2b_0)\lambda + (2Ca_2b_1 - Da_2b_0)\}\mu^2\\ &+ \{2(Aa_1b_2 - Ca_0b_2)\lambda^2 + 4Aa_2b_2\lambda + 2Ca_2b_2\}\mu\\ &+ \{2(Ba_1b_2 - Da_0b_2)\lambda^2 - 2Ba_2b_2 + Da_2b_2\} = 0.\end{aligned}$$

Die erzeugte Curve vierter Ordnung hat vier reelle doppeltprojicierende Kegel, wenn beide Involutionen zweiten Grades elliptisch sind und wenn beide Involutionen hyperbolisch sind mit reellen, den Doppelelementen entsprechenden Paaren in der jeweilen andern Involution; sie hat keine reellen doppeltprojicierenden Kegel, wenn nur die eine Involution hyperbolisch ist und ihren Doppelelementen reelle Paare der elliptischen Involution entsprechen; und sie hat zwei reelle und zwei nicht reelle doppeltprojicierende Kegel oder ist eintheilig, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, aber mit je einem reellen und einem nicht reellen, den Doppelementen entsprechenden Paar in der andern Involution.

Ferner entsteht eine Curve mit isoliertem Doppelpunkt aus zwei hyperbolischen Involutionen, wenn ein Doppelelement der einen einem Doppelelement der andern entspricht und die entsprechenden Paare der andern Doppelelemente reell sind.

Es entsteht ein Paar von Kegelschnitten mit zwei nicht reellen Schnittpunkten und zwei reellen Kegeln zweiten Grades, wenn beide Involutionen elliptisch sind und die Doppelelemente der einen denen der andern entsprechen; und ein Paar von Kegelschnitten mit reellen Schnittpunkten und nicht reellen Kegeln, wenn die Involutionen hyperbolisch sind und die Doppelelemente der einen denen der andern entsprechen.

Allgemeine Involution in der einen und parabolische Involution in der andern Regelschaar erzeugen eine Raumcurve dritter Ordnung mit einer Bisekante, welche die vereinigten Doppelstrahlen der parabolischen Involution bildet, und deren entsprechende die Tangenten der Curve dritter Ordnung in ihren Schnittpunkten mit derselben sind.

Zwei parabolische Involutionen endlich erzeugen ein Linienpaar und einen Kegelschnitt, welcher letztere aus den zwei projectivischen Regelschaaren entsteht, die mit den je vereinigten Doppelstrahlen die projectivischen parabolischen Involutionen bilden.

Wir führen die analogen Betrachtungen noch in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ selbst aus, wieder mit der Symbolik $a_x, \ldots$ für die linearen Trinome $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \ldots$ Damit sind zunächst

$$a_x . a_x' = 0 \quad \text{und} \quad (a_x + k a_x')(a_x + l a_x') = 0$$

zwei Paare von Geraden durch denselben Punkt, und insofern dieselben eine Involution von Linienpaaren um diesen bestimmen, werden alle Paare derselben ausgedrückt durch

$$a_x . a_x' + \lambda (a_x + k a_x')(a_x + l a_x') = 0;$$

dieselbe ist mit dem Strahlbüschel in derselben Ebene, aber von anderem Scheitel,

$$b_x + \mu b_x' = 0$$

projectivisch, wenn zwischen den Parametern λ und μ eine Relation der Projectivität besteht, insbesondere also auch für $\lambda = \mu$, wo $b_x = 0$ dem ersten Paar $a_x . a_x' = 0$ und $b_x' = 0$ dem zweiten Paar $(a + k a_x')(a_x + l a_x') = 0$ entsprechen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlengruppen ist in diesem Falle die Curve dritter Ordnung

$$a_x . a_x' . b_x' - (a_x + k a_x')(a_x + l a_x') b_x = 0,$$

welche durch den Scheitel der Involution doppelt und durch den des Strahlbüschels einfach hindurchgeht; natürlich berührt sie die dem Scheitelstrahl beider entsprechenden Strahlen im Doppelpunkt und enthält die Schnittpunkte der drei gegebenen Strahlen des Büschels mit den entsprechenden Paaren der Involution. (II, § 60.)

Die allgemeine Form giebt nichts wesentlich Anderes.

Zwei einander projectivisch zugeordnete involutorische Büschel an verschiedenen Scheiteln in derselben Ebene er-

zeugen als Ort der Schnitte entsprechender Strahlenpaare eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in den Scheiteln der Büschel, deren Tangenten natürlich die den Paaren des Scheitelstrahles entsprechenden Paare der Involutionen sind. Im Falle der Zuordnung durch die einfache Gleichheit der Parameter sind die Gleichungen der involutorischen projectivischen Büschel

$$a_x . a_x' + \lambda (a_x + k a_x')(a_x + l a_x') = 0,$$
$$b_x . b_x' + \lambda (b_x + k' b_x')(b_x + l' b_x') = 0,$$

und die der Curve ist

$$a_x a_x' (b_x + k' b_x')(b_x + l' b_x') - b_x b_x' (a_x + k a_x')(a_x + l a_x') = 0.$$

Gehört aber der gemeinsame Strahl beider Büschel zu entsprechenden Paaren ihrer Involutionen, so bildet derselbe einen Theil des Erzeugnisses und der Rest ist eine allgemeine Curve dritter Ordnung. Für a_x' und b_x' als übereinstimmend sondert dies sich als Factor ab und man hat den Ausdruck der Curve in einer uns schon bekannten Form. (Vergl. oben.)

1) Man zeige, dass die Verbindungsgeraden der entsprechenden Paare in zwei projectivischen involutorischen Punktreihen derselben Ebene eine Curve vierter Classe mit zwei Doppeltangenten umhüllen und bestimme die zu diesen gehörigen Berührungspunkte; etc.

2) Die Umrisse und Schlagschatten auf Ebenen für die Regelflächen dritten Grades sind Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente. (II, § 60.)

3) Die Verbindungsgeraden der Punkte entsprechender Gruppen in zwei geraden Reihen derselben Ebene, welche in algebraischer Correspondenz (m, n) zu einander stehen (§ 40), bilden eine Enveloppe von der Classe $(m + n)$ mit $n$facher und resp. $m$facher Tangente in den Trägern der Reihen. Und dual.

So entsteht aus der Correspondenz (1, 2) die Umrisscurve in 2) und dual; aus (2, 2) eine Curve vierter Classe mit zwei Doppeltangenten — wie wir wissen, da diess projectivische Involutionen sind; aus (1, 3) eine Curve vierter Classe mit dreifacher Tangente, dual entsprechend der Bildcurve der Curve vierter Ordnung zweiter Art aus einem Punkte ihres Trisekantenhyperboloids.

4) Wenn zwischen den Parametern der Gleichungen von zwei linearen Gebilden erster Stufe von verschiedenen Graden m, n, aber denselben und gleichvielen Veränderlichen

$$U^{(0)} + \lambda U^{(1)} = 0, \qquad V^{(0)} + \mu V^{(1)} = 0$$

eine bilineare Relation

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

besteht, so ist der Ort der Gesammtheit der Gruppen gemeinsamer Elemente aus den entsprechenden Elementen der Gebilde durch

$$aU^{(0)}V^{(0)} - bU^{(0)}V^{(1)} - cU^{(1)}V^{(0)} + dU^{(1)}V^{(1)} = 0$$

ausgedrückt. Die Grundelemente beider Gebilde gehören dem Erzeugniss an; ebenso die gemeinsamen Elemente aus

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= 0, & cV^{(0)} - dV^{(1)} &= 0; \\ U^{(1)} &= 0, & aV^{(0)} - bV^{(1)} &= 0; \\ V^{(0)} &= 0, & bU^{(0)} - dU^{(1)} &= 0; \\ V^{(1)} &= 0, & aU^{(0)} - cU^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Wir sind mit diesen für alle geometrischen Formen gültig erscheinenden Gleichungen wieder auf die Frage von der Bedeutung der Parameter bei Gleichungen höherer Grade geführt. (Vergl. ihre Lösung in § 49 f. und weiter.)

45. Aus der Perspectivität der Punktreihe in einem Kegelschnitt mit einem erzeugenden Strahlbüschel, der Regelschaar l eines einfachen Hyperboloides mit einem erzeugenden Ebenenbüschel um und einer erzeugenden Punktreihe in einer seiner Geraden g, etc. ziehen wir vorerst den Schluss, dass die Punktreihe des Kegelschnittes, die Regelschaar des Hyperboloides, etc. mit einem beliebigen Elementargebilde erster Stufe durch Zuordnung von drei bestimmten ihrer Elemente zu dreien des letzteren projectivisch gemacht werden können und entwickeln hier einige daraus entspringende Ergebnisse.

Wir machen z. B. eine Curve zweiter Ordnung einem Ebenenbüschel projectivisch, indem wir drei Punkten A, B, C in jener drei bestimmte Ebenen $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ in diesem zuordnen. Wir construieren zu einem beliebigen Punkt X in jener Curve die entsprechende Ebene $\mathbf{X}'$ im Büschel, indem wir nach einem willkürlich gewählten Punkt S der Curve von A, B, C, X die Strahlen a, b, c, x ziehen, in der Ebene derselben das Spurenbüschel a', b', c' von $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ bilden und in diesem den zu x nach $(abcx) \barwedge (a'b'c'x')$ entsprechenden Strahl x' als Spur der gesuchten Ebene mittelst des Lineals construieren. Zur Ebene $\mathbf{Y}'$ erhält man aus ihrer Spur y' den entsprechenden Strahl y des Büschels S und als seinen zweiten Schnittpunkt mit der Curve ebenfalls durch Linealconstruction den entsprechenden Punkt Y.

Ebenso macht man eine Regelschaar $l_1, l_2, l_3, \ldots$ zu einer Punktreihe $A_1', A_2', A_3', \ldots$ oder einem Ebenenbüschel $\mathbf{A}_1', \ldots$ projectivisch, indem man eine Gerade g der zweiten Regelschaar des Hyperboloides der l_i mit ihr in $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zum Schnitt bringt oder durch Ebenen verbindet in $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ und nun die Gebilde

$$(A_1'A_2'A_3'X') \barwedge (A_1A_2A_3X) \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_3'\mathbf{X}') \barwedge (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{X})$$

construiert, gleichfalls durch lineare Construction.

Wenn wir durch die Symbole **P**, **B**, **E** die drei Elementargebilde Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel und durch $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}^2$ die Curven und Kegel zweiter Ordnung oder Classe resp., durch $\mathbf{R}_2^2$ aber eine Regelschaar des einfachen Hyperboloides bezeichnen, so werden in ganz analoger Weise die projectivischen Beziehungen zwischen den fünfzehn Paaren bestimmt und ihre entsprechenden Elementenpaare construiert, nämlich zwischen

$$\mathbf{PC}_2, \mathbf{PC}^2, \mathbf{PK}_2, \mathbf{PK}^2, \mathbf{PR}_2^2; \mathbf{BC}_2, \mathbf{BC}^2, \mathbf{BK}_2, \mathbf{BK}^2, \mathbf{BR}_2^2;$$
$$\mathbf{EC}_2, \mathbf{EC}^2, \mathbf{EK}_2, \mathbf{EK}^2, \mathbf{ER}_2^2.$$

Und man sieht sofort weiter, dass in der Mehrzahl dieser Fälle durch Verbindung der entsprechenden Elemente beider projectivischen Gebilde mittelst eines Elements — nämlich zweier Punkte oder Ebenen durch eine Gerade, eines Punktes und einer Geraden durch eine Ebene, einer Ebene und einer Geraden durch einen Punkt, und zweier Geraden, sofern sie durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen, durch eine Ebene oder einen Punkt — ein Erzeugniss entsteht, welches eine stetige einfach unendliche Folge solcher Elemente enthält, das also nur eine Curve, eine developpable Fläche, speciell ebene Curve, Kegelfläche oder eine Regelfläche sein kann. Es ist bei allgemeiner Lage der Gebilde eine ebene Curve in den Fällen $\mathbf{BK}^2$, der mit $\mathbf{BC}^2$ identisch ist, wenn die Curve zweiter Classe in der Ebene des Strahlbüschels liegt, und $\mathbf{EC}^2$; ein Kegel als Ort von Geraden oder als Enveloppe von Ebenen in den Fällen $\mathbf{PK}_2$, $\mathbf{BC}_2$; eine Raumcurve in den Fällen $\mathbf{EK}_2$ und $\mathbf{ER}_2^2$, eine developpable Fläche für $\mathbf{PC}^2$, $\mathbf{PR}_2^2$ und endlich eine windschiefe Regelfläche für $\mathbf{PC}_2$ und $\mathbf{EK}^2$.

Die projectivischen Gebilde $\mathbf{PK}^2$, $\mathbf{BC}^2$, $\mathbf{BK}_2$, $\mathbf{BR}_2^2$, $\mathbf{EC}_2$

liefern keine Erzeugnisse dieser Art, weil Punkte und Ebenen, Gerade und Gerade kein Verbindungselement haben, wenn nicht im ersten Fall das Ineinanderliegen, im andern das in derselben Ebene liegen und durch einen Punkt gehen eintritt; man erhält daher bei allgemeiner Lage der Gebilde in diesen Fällen keine Erzeugnisse, kann jedoch wie schon bemerkt bei $\mathbf{BC}^2$ eine ebene Curve erhalten, wenn das Strahlbüschel in der Ebene der Curve zweiter Classe liegt, und bei $\mathbf{BK}_2$ einen Kegel, wenn der Scheitel des Strahlbüschels mit dem Scheitel des Kegels zweiter Ordnung zusammenfällt.

In allgemeiner Lage giebt es in diesen fünf Fällen nur eine bestimmte Zahl entsprechender Elementenpaare, die ineinanderliegen (bei $\mathbf{PK}^2$ und $\mathbf{EC}_2$) oder ein neues Element erzeugen, nämlich in den drei mittleren Fällen je einen Punkt und eine Ebene; man erhält daher in allen diesen Fällen als Erzeugniss der Verbindung der projectivischen Gebilde lediglich eine Gruppe von Ebenen und von Punkten in denselben. Das Analoge tritt aber auch bei speciellen Lagen einiger der andern Verbindungen ein, nämlich bei $\mathbf{PC}_2$ und $\mathbf{BC}_2$, wenn die Reihe resp. das Strahlbüschel in der Ebene der Curve zweiter Ordnung liegt, bei $\mathbf{PR}_2^2$ und $\mathbf{ER}_2^2$, wenn der Träger der Reihe oder des Ebenenbüschels eine Transversale g_i der Regelschaar l_i ist; bei $\mathbf{BK}^2$ und $\mathbf{EK}_2$, wenn die Ebene resp. die Scheitelkante des Büschels den Scheitel des Kegels enthält.

Und endlich erhalten wir bei solchen speciellen Lagen Erzeugnisse von einfach unendlich vielen Elementen, wo sonst nur Gruppen, nämlich bei $\mathbf{BC}^2$ eine Curve als Ort, bei $\mathbf{BK}_2$ einen Kegel als Enveloppe; doch ist die erstere von dem Erzeugniss $\mathbf{EC}^2$, der letztere von dem $\mathbf{PK}_2$ nicht verschieden.

Wir bemerken noch, dass die Regelfläche bei $\mathbf{PC}_2$ in eine ebene Curve als Enveloppe übergeht, wenn die Reihe in der Ebene der Curve zweiter Ordnung liegt, und dass hierbei der Grad der Regelfläche zur Classe der Curve wird; ebenso die Regelschaar bei $\mathbf{EK}^2$ in einen Kegel als Ort, wenn die Scheitelkante des Ebenenbüschels durch die Spitze des Kegels geht, wobei der Grad der Regelfläche zur Ordnung des Kegels wird. Indessen ist jene Curve ein Schnitt des Kegels $\mathbf{PK}_2$ und dieser Kegel ein Schein der Curve $\mathbf{BK}^2$. Aber allgemein ist der Grad einer Regelfläche offenbar der Classe ihres Umrisses in irgend

einer Projection gleich (II, § 56), nicht minder wie der Ordnung ihrer Spur.

Nach diesen Erörterungen wird es genügen, einen Fall der ganzen Reihe näher zu untersuchen, der unter Voraussetzung der allgemeinen Lage ein Erzeugniss von einer einfach unendlichen Elementenfolge, in einer speciellen Lage aber eine Gruppe ineinanderliegender Elemente liefert. Wir wählen die Beziehung $\mathbf{BC}_2$ und erörtern zuerst die Construction entsprechender Elemente, die wir natürlich im Fall der speciellen Lage in einer Ebene in dieser selbst an den Originalen, im Fall der allgemeinen Lage in verschiedenen Ebenen an den Bildern in einer angenommenen Zeichnungsebene zu vollziehen haben. Sei S' der Scheitel und seien a', b', c' drei Strahlen des Büschels, A, B, C die ihnen entsprechenden und T, T^* die zwei weitern zur Bestimmung nöthigen Punkte der Curve zweiter Ordnung, so hat man für a, b, c, a^*, b^*, c^* als die Strahlen von A, B, C nach T, T^* resp. (Fig. 35)

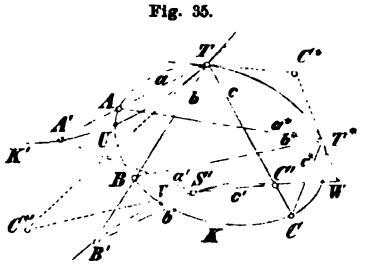
$$(a'b'c'\ldots) \barwedge (ABC\ldots) \barwedge (abc\ldots) \barwedge (a^*b^*c^*\ldots),$$

also auch

$$(a'b'c'\ldots) \barwedge (abc\ldots), \quad (a^*b^*c^*\ldots) \barwedge (abc\ldots).$$

Sind nun $C^{*\prime}$ und C^* die perspectivischen Centra dieser Paare im Sinn der Construction von I, § 18, so erhalten wir mittelst $C^{*\prime}$ zu x' den Strahl x aus T und mittelst C^* hierzu den entsprechenden Strahl x^* aus T^*, in ihrem Schnittpunkt aber den Punkt X, oder analog umgekehrt zu Y den Strahl y'. Diese Construction beantwortet zugleich unsere Fragen nach den Erzeugnissen; denn die Büschel $(abc\ldots)$ und $(a'b'c'\ldots)$ erzeugen einen durch T und S' gehenden Kegelschnitt K', welcher mit dem Kegelschnitt K oder TT^*ABC ausser T mindestens noch einen und höchstens noch drei Punkte U, V, W gemein haben wird, und jeder Strahl x schneidet K' in dem Punkte, nach welchem der entsprechende Strahl x' aus S' geht, während er in K den Punkt X bestimmt. Die gemeinschaftlichen Punkte von K und K' ausser T sind

Fig. 35.



also die einzigen Punkte in K, deren entsprechende Strahlen in S' durch sie gehen und wir haben den Satz: In einem Strahlbüschel, dessen Strahlen projectivisch den Punkten einer Curve zweiter Ordnung in seiner Ebene entsprechen, giebt es nicht mehr als drei Strahlen, welche ihre entsprechenden Punkte enthalten, und mindestens einer derselben ist reell. Liegt aber das Strahlbüschel S in einer Ebene von der Spur s, so markiert es auf dieser eine zu ihm perspectivische und somit zu der Punktreihe der Curve zweiter Ordnung projectivische gerade Reihe, und die Verbindungslinien ihrer Punkte mit den entsprechenden Punkten der Curve sind die Tangenten der Spur des Kegels, den die Verbindungsebenen der entsprechenden Elemente für $\mathbf{BC}_2$ durch Umhüllung erzeugen. Man zeigt von dieser Curve sofort, dass sie von der dritten Classe ist, d. h. dass nicht mehr als drei ihrer Tangenten durch einen Punkt ihrer Ebene gehen, und dass sie die Gerade der Reihe zur Doppeltangente hat; ihre Ordnung ist daher vier. Um nämlich ihre Tangenten aus einem beliebigen Punkt P zu erhalten, verbinden wir P (er kann als der Punkt S' der vorigen Figur genommen werden) mit den Punkten der Reihe und suchen diejenigen Strahlen des so erzeugten Büschels, welche durch die entsprechenden Punkte im Kegelschnitt K' gehen; wir erhalten nach der vorhergegangenen Discussion drei solche Strahlen PU, PV, PW. Trifft K' die Gerade s_1 in zwei Punkten E, F, so sind TE und TF zwei Tangenten aus T an die Curve, welche dann zusammenfallen, wenn T so liegt, dass der Kegelschnitt K' die Gerade s_1 berührt — in den Doppelpunkten der vom Viereck $UVWP$ auf der Geraden s_1 bestimmten Involution. Dann aber ist T ein Punkt der Curve, d. h. man erhält so zwei Schnittpunkte der Curve mit dem Kegelschnitt K. Die Gerade s_1 selbst ist, weil sie die Curve zweiter Ordnung K in zwei reellen oder nicht reellen Punkten Y, Z trifft, deren entsprechende Y', Z' in ihr selbst liegen, während die Nachbarn derselben in K ihre entsprechenden in ihr zu jenen unendlich nahe benachbart haben, Tangente der entstehenden Umhüllungscurve in den beiden Punkten Y' und Z'; und zwar sonach Doppeltangente mit reellen oder mit nicht reellen Berührungspunkten, je nachdem

sie den Kegelschnitt K reell schneidet oder nicht, insbesondere aber Inflexionstangente, d. h. Doppeltangente mit benachbarten Berührungspunkten, wenn sie den Kegelschnitt K berührt.

Es ist nicht schwer, den Berührungspunkt einer beliebigen Tangente XX' mit der Curve zu bestimmen, denn er ist der Schnitt von XX' mit der Verbindungsgeraden der unendlich nahen entsprechenden Nachbarpunkte $X_1 X_1'$. In der Geraden XX_1, der Tangente des Kegelschnittes K in X, bestimmt nun das Büschel a, b, c eine Reihe, die zu der in s_1 enthaltenen projectivisch ist und mit ihr einen Kegelschnitt erzeugt, dessen Berührungspunkt mit XX_1 der gesuchte Punkt sein wird. Man erkennt aus der hierin liegenden Construction, dass unsere Curve und der Kegelschnitt K einander dreimal berühren; denn dazu ist nur erforderlich, dass die Gerade XX' in X den Kegelschnitt K berühre. Denken wir uns aber den Pol S' von s_1 in Bezug auf den Kegelschnitt K, so bilden die Polaren der Punkte X' von s_1 ein zu ihrer Reihe und somit auch zum Büschel $abc\ldots$ projectivisches Strahlbüschel um S' und beide Büschel erzeugen einen Kegelschnitt K^*, der K ausser in T nur in den drei Punkten X schneidet, deren Tangenten an K durch ihre entsprechenden Punkte X' in s_1 gehen. Sie sind jene Berührungspunkte und bilden mit den beiden vorher gefundenen Schnittpunkten die Gesammtheit der gemeinsamen Punkte des gegebenen Kegelschnittes mit der Curve.

Wenn wir die vorigen Betrachtungen dualistisch übertragen, so erhalten wir den Satz: Das Erzeugniss der Projectivität zwischen der Tangentenschaar einer Curve zweiter Classe und den Strahlen eines Büschels in ihrer Ebene ist eine Curve dritter Ordnung vierter Classe, die den Scheitel des Büschels zum Doppelpunkt hat und die Curve zweiter Classe dreimal berührt, sowie überdiess noch zwei Tangenten mit ihr gemein hat. Wenn das Büschel und die Tangentenschaar der Curve zweiter Classe einen Strahl entsprechend gemein haben, so sondert sich dieser als ein Theil des Ortes ab und der Rest desselben ist eine Curve zweiter Ordnung; sind beide Tangenten unter den Strahlen des Büschels sich selbst entsprechend, so ist der Ort der Durchschnittspunkte der übrigen Strahlen mit den entsprechenden

Tangenten eine gerade Linie. Wenn eine solche Punktreihe und eine dazu projectivische gerade Punktreihe einen Punkt entsprechend gemein haben, ohne in einer Ebene zu liegen, so entsteht durch die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte eine Regelschaar l_i; ebenso aus den Schnittlinien eines Ebenenbüschels und einer dazu projectivischen Kegelfläche zweiter Classe, die eine Ebene entsprechend gemein haben.

1) Es sind nach den Entwickelungen des Textes die Erzeugnisse der Verbindungen der nicht ausführlich erörterten Fälle näher zu charakterisieren.

2) Hätte der Kegelschnitt K', den wir im Text zur Construction der Projectivität zwischen dem Strahlbüschel S' und der Curve zweiter Ordnung K verwendeten, mit K vier Punkte gemein ausser T, so wäre er mit demselben identisch und alle Punkte der Curve lägen auf den ihnen im Büschel entsprechenden Strahlen; beide Gebilde wären perspectivisch, S' ein Punkt der Curve.

3) Wenn das eine Gebilde eine Regelschaar und das andere also eine Reihe oder ein Ebenenbüschel ist in einer Geraden der andern Schaar oder durch eine solche, so genügt das Ineinanderliegen von drei Paaren entsprechender Elemente zur Begründung der perspectivischen Lage.

4) Wenn eine Punktreihe und eine Regelschaar in der Art projectivisch sind, dass die beiden Punkte A, B der Reihe, welche in Strahlen der Regelschaar liegen, diesen selbst als a', b' zugeordnet sind, so erfüllen die Verbindungsebenen entsprechender Elemente einen Ebenenbüschel; ist nämlich dem Punkt C der Reihe die Gerade c' der Regelschaar zugeordnet, so schneidet die Ebene Cc' die Regelschaar in Punkten einer Geraden c_1' der andern Schaar desselben Hyperboloids, und das aus dieser über der Schaar a', b', c' gebildete Ebenenbüschel ist zugleich perspectivisch zur Reihe A, B, C. Man bilde und erörtere den dualistisch entsprechenden Satz.

5) Man kann die Projectivität der Elementargebilde erster Stufe zu den Erzeugnissen solcher Gebilde und die aus ihrer Verbindung hervorgehenden neuen Gebilde auch ohne Schwierigkeit analytisch ausdrücken, wie am Beispiel der Curve zweiter Classe und des Strahlbüschels in ihrer Ebene dargethan werden mag. Nach § 49, 1 sei $x_1 x_3 = x_2^2$ der Kegelschnitt und somit der Parameterausdruck der Coordinaten eines Punktes in ihm: $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda : \lambda^2$, sowie der zugehörigen Tangente $\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0$.

Drücken wir das Strahlbüschel durch $x_1 + \lambda' x_3 = 0$ aus, in der Voraussetzung, dass sein Scheitel der Schnittpunkt von zwei reellen Tangenten des Kegelschnittes ist, so liefert die Projectivitätsgleichung $a\lambda\lambda' - b\lambda + c\lambda' - d = 0$ für das Erzeugniss mittelst

$$\lambda = \frac{d - c\lambda'}{a\lambda' - b} = -\frac{dx_3 + cx_1}{ax_1 + bx_3}$$

die Gleichung

$$(cx_1+dx_3)^2x_1+2(ax_1+bx_3)(cx_1+dx_3)x_2+(ax_1+bx_3)^2x_3=0.$$

Diese Curve dritter Ordnung mit A_2 als Doppelpunkt sondert, wenn mit $\lambda'=0$ zugleich $\lambda=\infty$ wird, d. h. für $b=0$ wirklich $x_1=0$ als Theil ab; wenn überdiess $c=0$ aber auch $x_3=0$ und wird zur Geraden $a^2x_1 + 2adx_2 + d^2x_3 = 0$.

6) Zu ganz ähnlicher Behandlung bietet sich die Projectivität der Regelschaar und des Ebenenbüschels dar; man zeige die allgemeine Zulässigkeit des Ausdrucks

$$\lambda x_1 - x_4 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda x_2 - x_3 = 0$$

für eine Gerade der Regelschaar, und $x_1 + \lambda' x_3 = 0$ für das Ebenenbüschel; die Gleichungen liefern natürlich eine Raumcurve dritter Ordnung, den Ort der Schnittpunkte von drei projectivischen Ebenenbüscheln.

46. Es ist die weitere Folge des Vorhergehenden, dass auch zwei Erzeugnisse aus projectivischen Elementargebilden erster Stufe zu einander in projectivische Beziehung gesetzt und zu einem neuen Erzeugniss verbunden werden können — einfach durch Vermittelung der Elementargebilde, die bei der Erzeugung zu ihnen perspectivisch waren, indem man dieselben projectivisch auf einander bezieht. Mit den vorher eingeführten Bezeichnungen bilden wir sofort die Uebersicht dieser fünfzehn Projectivitäten:

$$C^2C^2,\ C^2K^2,\ C^2C_2,\ C^2K_2,\ C^2R_2^2;\quad K^2K^2,\ K^2C_2,\ K^2K_2,\ K^2R_2^2;$$
$$C_2C_2,\ C_2K_2,\ C_2R_2^2;\quad K_2K_2,\ K_2R_2^2;\quad R_2^2R_2^2.$$

Von denselben werden durch Verbindung der entsprechenden Elementenpaare durch ein neues Element folgende Arten von Erzeugnissen hervorgebracht: Von C^2C^2, wenn sie in derselben Ebene liegen, eine Curve als Ort; wenn nicht, eine Gruppe von Punkten in der Schnittlinie ihrer Ebenen; von C^2K^2 eine Curve als Ort in der Ebene von C^2, von der vorigen nicht verschieden; von C^2C_2 eine developpable Fläche, im Fall der Lage in einer Ebene eine Gruppe von Punkten in ihren entsprechenden Geraden; von C^2K_2 eine Gruppe von Strahlen, die mit ihren entsprechenden sich schneiden; von $C^2R_2^2$ desgleichen; von K^2K^2 die Erzeugenden einer Regelfläche, die

im Fall der concentrischen Lage in eine Kegelfläche als Ort von Strahlen übergeht und deren ebener Querschnitt die Curve aus der Verbindung C^2C^2 ist; von K^2C_2 eine Gruppe von entsprechenden Ebenen und Punkten, die in einander liegen; von K^2K_2 eine Raumcurve, im Fall der concentrischen Lage eine Gruppe von Ebenen, die ihre entsprechenden Strahlen enthalten; von $K^2R_2^2$ eine Raumcurve; von C_2C_2 eine Regelfläche und bei der Lage in einerlei Ebene eine Curve als Enveloppe, die in graphischer Darstellung als Umriss der Regelfläche in der bezüglichen Projection auftritt; von C_2K_2 eine Kegelfläche über der vorigen Curve als Querschnitt; von $C_2R_2^2$ eine developpable Fläche; von K_2K_2 nur bei concentrischer Lage eine Kegelfläche als Enveloppe über der Curve C_2C_2; von $K_2R_2^2$ und von $R_2^2R_2^2$ im Allgemeinen kein Erzeugniss; wenn aber die letzteren z. B. eine gemeinschaftliche Transversale haben, ein Paar von sich schneidenden entsprechenden Geraden; wenn sie die beiden Schaaren desselben einfachen Hyperboloides sind, ein Kegelschnitt und eine Kegelfläche zweiter Ordnung, die zu einander gehören, wie wir genauer sehen werden.

Wir haben schon in dieser Uebersicht die Zusammengehörigkeit der so hervorgebrachten Erzeugnisse mehrfach bemerkt und es ist nicht schwierig, sie weiter auszuführen.

Wieder wird die Hervorhebung eines Hauptfalles und die Besprechung einiger nützlicher Specialitäten genügend sein.

Besprechen wir das Erzeugniss der Verbindung einer durch fünf Tangentialebenen **T**, **T***, **A**, **B**, **C** bestimmten Kegelfläche zweiter Classe K^2 mit einer ihr projectivischen Regelschaar R_2^2, von welcher die drei zu **A**, **B**, **C** entsprechenden Strahlen a', b', c' gegeben sind, eine Curve im Raum, die als Ort der Schnittpunkte der Ebenen **X** des Kegels mit den entsprechenden Strahlen x' der Regelschaar bei der Voraussetzung

$$(\mathbf{ABCX}) \barwedge (a'b'c'x')$$

erhalten wird und die daher vom Scheitel des Kegels K^2 aus auf eine beliebige Ebene projiciert erscheinen wird als Ort der Durchschnittspunkte der Spuren der Tangentialebenen von K^2 mit den Bildern der entsprechenden Geraden von R_2^2, d. h. der entsprechenden Tangenten von zwei zu einander projectivischen Curven zweiter Classe. Wir werden zeigen, dass

diess Bild unserer Curve von der vierten Ordnung ist und drei Doppelpunkte hat, also von einem Punkt aus nicht mehr als sechs Tangenten zulässt, d. h. dass die entstehende Raumcurve eine Curve vierter Ordnung zweiter Art ist, nämlich mit drei scheinbaren Doppelpunkten und mit einer Tangentenfläche sechster Classe. (II, § 60, 5; oben § 42.) Wir erörtern zuerst die Construction entsprechender Elemente $\mathbf{x}$ und x' unter der Voraussetzung, dass in einer beliebigen Projectionsebene die Spuren a, b, c, t, t^* der Ebenen $\mathbf{A}\ldots$, das Bild ihres Schnittpunktes M, die Durchstosspunkte und Bilder von a', b', c' und von zwei ihrer Transversalen g' und $g^{*\prime}$ gegeben seien, die letzteren als fünf Tangenten des Umrisskegelschnittes der Regelfläche, die jene bestimmen. Man hat dann

$$(abc\ldots)\barwedge(a'b'c'\ldots)$$

und

$$(t.abc..)\barwedge(t^*.abc..),\ (g'.a'b'c'..)\barwedge(a'b'c'..)\barwedge(g^{*\prime}.a'b'c'..),$$

also auch

$$(t.abc..)\barwedge(t^*.abc..)\barwedge(g.a'b'c'..)\barwedge(g^{*\prime}.a'b'c'..).$$

Eine Ebene $\mathbf{x}$ hat eine Spur x, welche die Verbindungslinie von zwei entsprechenden Punkten in t und t^* ist, zu deren erstem wir mit Hilfe der bezüglichen perspectivischen Axe den entsprechenden Punkt in g' und zu deren zweitem wir ebenso den entsprechenden Punkt in $g^{*\prime}$ finden, um als ihre Verbindungslinie den Strahl x' zu erhalten.

Wenden wir uns hiernach zur Betrachtung des Bildes aus dem Scheitel M des Kegels als Centrum und zum Beweis des vorher ausgesprochenen Satzes. Den Tangenten $a, b, c, x\ldots$ eines Kegelschnittes K^2 entsprechen die Tangenten $a', b', c', x'\ldots$ eines andern $K^{2\prime}$ in derselben Ebene. Wählt man im erstern eine Tangente t, im letztern eine willkürliche andere Tangente $t^{*\prime}$, so hat man $(t.abc\ldots)\barwedge(t^{*\prime}.a'b'c'\ldots)$ und erhält durch Verbindung der entsprechenden Punkte dieser Reihen einen Kegelschnitt $K_{tt^*}{}^2$, der durch seine Tangenten die projectivische Beziehung von K^2 und $K^{2\prime}$ mittelst Linealconstruction feststellt. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen xx' ist eine Curve vierter Ordnung; denn für p als eine beliebige Gerade der Ebene geht von ihrem Schnittpunkt mit x

noch eine zweite Tangente x_1 an K^2, beide als das erzeugende Paar einer Involution von Tangenten an K^2 mit der Polare p, und die Punkte tx, tx_1 sind ein Paar einer Involution in t, welche der Reihe der Punkte auf p projectivisch entspricht. Aber zugleich entsprechen den Tangenten x, x_1 von K^2 zwei bestimmte Tangenten x', x_1' von $K^{2\prime}$, Paar einer Involution von Tangenten an $K^{2\prime}$, die eine bestimmte Polare p' hat, in welcher als Ort der Schnittpunkte ihrer Paare eine zu der Reihe in p projectivische Reihe liegt. Zum genauen Nachweis genügt in der That die Betrachtung der Figur der Construction von x' und x_1' mittelst des oben erwähnten Kegelschnittes $K_{tt^*}^2$. Die projectivischen Reihen p, p' erzeugen aber einen neuen Kegelschnitt K_p^2, welcher mit K^2 und $K^{2\prime}$ je vier Tangenten u, v, w, z; u', v', w', z' gemein haben wird; und die Punkte $p \,.\, uvwz$ sind die Schnittpunkte des Ortes mit der Geraden p; ebenso $p' \,.\, u'v'w'z'$ die mit der Geraden p'. In dem besondern Fall, wo p eine Tangente des Kegelschnittes K^2 war und p' daher den Kegelschnitt $K^{2\prime}$ berührt, wird pp' der eine ihrer Schnittpunkte mit dem Ort und die drei anderen Schnittpunkte desselben mit p sind $p \,.\, u'v'w'$, die mit p' aber $p' \,.\, uvw$.

Der Kegelschnitt $K_{tt^*}^2$ entspricht als solcher Kegelschnitt den Tangenten $t^{*\prime}$ und t statt p' und p und liefert ihre Schnittpunkte mit der Curve; wird nun $t^{*\prime}$ festgehalten, werden also auch seine Schnittpunkte mit der Curve nicht geändert, während t den Kegelschnitt K^2 umläuft, so verändert sich der Kegelschnitt $K_{tt^*}^2$ so, dass er die vier festen Tangenten $t^{*\prime}$, u, v, w stets berührt und mit K^2 stets eine veränderliche vierte Tangente nämlich t gemein hat. Unter den Kegelschnitten dieser Schaar giebt es nicht mehr als vier, die den festen durch einen Grundpunkt gehenden Kegelschnitt $K^{2\prime}$ berühren (vgl. §42,5f.) und die zugehörigen Tangenten gehören unserem Ort an, weil in ihnen zwei zusammenfallende Punkte derselben liegen. Unsere Curve berührt jeden der beiden Kegelschnitte K^2 und $K^{2\prime}$ viermal und hat ausserdem mit ihm vier andere gemeinsame Tangenten.

Wenn die Tangente $t^{*\prime}$ nicht eine beliebige sondern die zu t entsprechende Tangente von $K^{2\prime}$ ist, so wird der Kegelschnitt $K_{tt^*}^2$ zu einem für jede Lage von t einzig bestimmten Kegelschnitt K_t^2, und kann in zwei Punkte degenerieren, wenn

die Reihen $(t.abc..)$ und $(t'.a'b'c'..)$ perspectivisch sind; dann aber ist tt' ein sich selbst entsprechender Punkt beider Reihen, und wenn t_1, t_1' die beiden andern von ihm ausgehenden Tangenten von K^2, $K^{2'}$ sind, so sind auch diese entsprechend und tt' ist ein Doppelpunkt der erzeugten Curve. Der mit der Veränderung von t sich ändernde Kegelschnitt K_t^2 hat aber drei feste Tangenten. Denn für t, t' und t^*, $t^{*'}$ als zwei Paare benutzter Reihen sind tt^*, $t't^{*'}$; t^*t, $t^{*'}t'$ Tangenten, dieselbe Linie also Tangente von K_t^2, $K_{t^*}^2$, welche daher noch drei andere gemeinsame Tangenten u^*, v^*, w^* haben. Und diese sind allen gemein, es sind die einzigen Geraden der Ebene, für welche p mit p' zusammenfällt. Der Kegelschnitt K_t^2 ist durch sie und t, t' bestimmt und kann nur in ein Punktepaar zerfallen, wovon der eine eine Ecke des Dreiecks $u^*v^*w^*$ ist. Unsere Curve hat also drei Doppelpunkte. Sie ist daher nach II, § 1, Anm. von der sechsten Classe.

1) Man führe die dualistisch entsprechende Untersuchung zu der des Textes aus und zeige, dass das Erzeugniss der Verbindung einer Curve zweiter Ordnung mit einer zu ihr projectivischen Regelschaar eine developpable Fläche ist, die eine Curve vierter Classe und sechster Ordnung mit drei Doppeltangenten zum ebenen Querschnitt hat.

2) Man erörtere die Reduction der Curve vierter Ordnung im Text in dem Fall, wo die Kegelfläche K^2 und die ihr projectivische Regelschaar R_2^2 ein Paar oder zwei Paar ineinanderliegende entsprechende Elemente haben.

3) Die Tangente des Kegelschnittes $a_x c_x = b_x^2$, der von den Geraden $a_x = 0$, $c_x = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $b_x = 0$ berührt wird, in seinem Punkt μ ist nach § 42 ausgedrückt durch

$$\lambda^2 a_x - 2\lambda b_x + c_x = 0;$$

und für einen zweiten Kegelschnitt $a_x' c_x' = b_x'^2$ erhält man für die Tangente in λ' analog

$$\lambda'^2 a_x' - 2\lambda' b_x' + c_x' = 0.$$

Setzt man die Parameter λ, λ' als projectivisch von einander abhängig voraus, was hier einfach durch ihre Gleichsetzung für entsprechende Tangenten geschehen kann, so liefert die Elimination von λ, λ' zwischen den vorigen Gleichungen und der besagten Projectivitätsrelation den Ausdruck des Ortes der Schnittpunkte entsprechender Tangenten dieser Kegelschnitte in Punktcoordinaten.

Ebenso folgt aus der Voraussetzung, dass $a_\xi = 0$, etc. Punkte der Ebene darstellen und für die Kegelschnitte

$$\alpha_\xi \gamma_\xi = \beta_\xi^2, \qquad \alpha_\xi' \gamma_\xi' = \beta_\xi'^2$$

das Erzeugniss der Verbindungsgeraden ihrer projectivisch entsprechenden Punkte

$$\lambda^2 \alpha_\xi - 2\lambda \beta_\xi + \gamma_\xi = 0, \qquad \lambda'^2 \alpha_\xi' - 2\lambda' \beta_\xi' + \gamma_\xi' = 0$$

mit der Relation $\lambda = \lambda'$. Die Elimination giebt im ersten Fall die die Doppelpunkte aufzeigende einfache Gleichung

$$(a_x c_x' - a_x' c_x)^2 - 4(a_x b_x' - a_x' b_x)(b_x c_x' - b_x' c_x) = 0.$$

Man schliesst aus derselben auch nach ihrer Form $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, dass die Kegelschnitte

$$a_x b_x' - a_x' b_x = 0, \qquad b_x c_x' - b_x' c_x = 0$$

die Curve in den zweimal vier Punkten berühren, in welchen sie von dem Kegelschnitt $a_x c_x' - a_x' c_x = 0$ geschnitten wird. Die Construction des Textes kann von diesen Grundlagen aus rechnend verfolgt werden.

4) Für den auf ein Tripel harmonischer Pole bezogenen Kegelschnitt

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 - a_3^2 x_3^2 = 0$$

kann man (vergl. § 42) setzen

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 = \cos\varphi : \sin\varphi : 1$$

oder mit Einführung von $\lambda = \tan\frac{1}{2}\varphi$ auch

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 = (1 - \lambda^2) : 2\lambda : (1 + \lambda^2);$$

man bildet damit leicht wie a. a. O. die Gleichung der Sehne λ, μ und durch Gleichsetzen von μ und λ die der Tangente im Punkt λ

$$(a_3 x_3 + a_1 x_1)\lambda^2 - 2 a_2 x_2 \lambda + (a_3 x_3 - a_1 x_1) = 0.$$

Denkt man den zweiten Kegelschnitt mit demselben Tripel und in der einfachsten Form

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

gegeben, sodass man die Gleichung seiner Tangente im Punkt λ setzen kann

$$(x_3 + x_1)\lambda^2 - 2 x_2 \lambda + (x_3 - x_1) = 0,$$

so entspringt durch Gleichsetzung der Parameter entsprechender Tangenten und Elimination von λ die Gleichung des erzeugten Ortes in der Lemniscatenform (vergl. § 28, 10)

$$x_1^2 x_2^2 (a_1 - a_2)^2 - x_2^2 x_3^2 (a_2 - a_3)^2 = x_3^2 x_1^2 (a_3 - a_1)^2.$$

5) Denkt man die Kegelschnitte als Kreise, so kann die projectivische Zuordnung ihrer Tangenten speciell gleichwinklig sein bei gleichem Drehungssinn, sodass die Tangenten in den Kreispunkten sich entsprechen und diese zu Spitzen werden. Man er-

hält die metrisch specielle conchoidale Form der Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

6) Es ist offenbar, dass die aus solchen Verbindungen entstandenen Erzeugnisse selbst wieder zu den Elementargebilden und allen andern Erzeugnissen dieser Art projectivisch gemacht und dass durch Verbindung entsprechender Elemente abermals neue Erzeugnisse abgeleitet werden können. Z. B. aus der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art durch Zuordnung ihrer Schmiegungsebenen zu den Strahlen einer Regelschaar eine neue Raumcurve etc.

47. Es ist ersichtlich, dass durch die projectivische Zuordnung der Geraden der Regelschaaren eines Hyperboloides immer ein eindeutiges Entsprechen zwischen Punkten der Fläche mit andern Punkten derselben oder mit den Tangentialebenen in solchen festgesetzt wird; wir werden nach dem für Gebilde in der Ebene festgestellten Sprachgebrauch sagen Collineationen und Reciprocitäten zwischen den gleichartigen oder ungleichartigen Elementen der Fläche als eines Gebildes von zwei Dimensionen.

Wir wollen dieselben in dem erweiternden Sinn besprechen, dass die Fläche zweiten Grades ebensowohl eine elliptische sein kann, wo an Stelle der reellen und rein imaginären Geraden in der Fläche die punktiert- und planiert-imaginären treten. Die Durchführung der Auffassung als Reprocitäten kann jedoch dem Leser überlassen bleiben.

Wir erhalten zwei verschiedene Arten von Collineation auf der Fläche zweiten Grades, jenachdem wir 1) den Reihen der g_i wiederum Reihen der g_k oder 2) den Reihen der g_i solche der l_i projectivisch entsprechen lassen.

In jenem Fall giebt es offenbar im Allgemeinen zwei sich selbst entsprechende g und zwei sich selbst entsprechende l; in diesem Fall giebt es keine sich selbst entsprechenden Geraden auf der Fläche. Offenbar aber entsprechen in beiden Fällen (vergl. § 43, 1) den Punkten eines ebenen Querschnittes der Fläche wieder die Punkte eines ebenen Querschnittes derselben, einem Kegelschnitt ein Kegelschnitt und dual.

Wenn wir bei der Collineation 2) eine beliebige Erzeugende nach einander als dem einen und dem andern System oder dem Original und Bild zugehörig betrachten — wir bezeichnen sie als g_o, g_p' in dem einen und dem andern Sinn —, so entsprechen ihr nach den festgesetzten Projectivitäten zwei ver-

schiedene Erzeugende der andern Schaar l_o' und l_p und bestimmen mit ihr zwei Punkte und zwei Ebenen, sagen wir O und P'.

Wir wissen nach dem Vorigen, dass der Ort des Punktes O ein fester Querschnitt K_o und der des Punktes P' ein anderer fester Querschnitt K_p' sein wird. Diese Kegelschnitte bestimmen die Collineation und werden selbst durch drei gegebene Paare entsprechender Punkte derselben A, A'; B, B'; C, C' bestimmt, wenn diese auf verschiedenen Erzeugenden der Fläche liegen; zunächst bestimmen die Erzeugenden g und l aus A, A', etc. durch ihren Schnitt je einen Punkt von K_o und die Erzeugenden l und g aus denselben Punktepaaren je einen Punkt von K_p'; sodann erhält man den Punkt X' zu einem beliebig gegebenen Punkt X der Fläche, indem man die Erzeugenden g und l des letzteren bis K_o resp. K_p' verlängert und die von den Schnittpunkten ausgehenden Erzeugenden l und g bis zu ihrem Schnittpunkt in der Fläche verfolgt. Augenscheinlich spielen die zugehörigen Tangentialkegel $\mathbf{K}_o$ und $\mathbf{K}_p'$ die dual entsprechende Rolle für die collineare Zuordnung der Ebenen des Hyperboloides und damit ergiebt sich auch die Reciprocität.

Derselbe Punkt X der Fläche als Y' zum zweiten oder Bildsystem gerechnet führt zu seinem entsprechenden Y, indem man dieselben Erzeugenden g und l bis K_p' resp. K_o verfolgt, durch die von den Schnittpunkten ausgehenden Erzeugenden l und g. Für XY' in K_o oder K_p' sind X', Y die Schnittpunkte der zugehörigen Erzeugenden mit K_p' resp. K_o und für die zwei in der Schnittlinie der Ebenen K_o und K_p' auf der Fläche liegenden Punkte F_1 und F_2 fallen die entsprechenden beider Arten mit ihnen selbst zusammen. Und zugleich sind die beiden andern Schnittpunkte der zugehörigen Erzeugenden $g_1 l_2$ und $g_2 l_1$ die im Allgemeinen einzigen Punkte der Fläche, welche einander vertauschbar entsprechen, sodass für XY' als den einen der andere zugleich X' und Y ist.

Wir nennen die Collineation 2) involutorisch, wenn alle ihre Elemente einander vertauschbar entsprechen und somit die Kegelschnitte K_o und K_p' zusammenfallen, einen Punkt für Punkt und Ebene für Ebene sich selbst entsprechenden Querschnitt bildend; und wir wissen aus § 43, 2, dass dann die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte XX' sich in dem Pol

dieser Ebene K durchschneiden, sodass der eine als die Centralprojection des andern aus diesem Punkt erhalten wird.

In der allgemeinen Collineation 2) entspricht jedem Querschnitt F_1F_2 (XY') der Querschnitt F_1F_2 $(X'Y)$ eindeutig und vertauschbar und die Doppelebenen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ der dadurch gebildeten Involution um F_1F_2 entsprechen sich selbst.

Für die vorbezeichnete Involution 2) sind die Punkte F_1, F_2 unbestimmt im Kegelschnitt K und jede nach dem Pol desselben gehende Ebene ist sich selbst entsprechend, wie es aus der Anschauung der Centralprojection hervorgeht. (Vergl. II, § 39, 1.)

Im allgemeinen Fall erhellt zugleich, dass die Verbindungsgerade der beiden entsprechenden Punkte X' und Y zu einem Punkt XY' der Fläche die Gerade F_1F_2 durch die Doppelpunkte schneidet und damit, dass die zweite Diagonale des windschiefen Vierseits der Erzeugenden durch X' und Y oder die Verbindungslinie ihrer Reciproken stets die polarconjugierte Gerade von F_1F_2, d. h. die Gerade der sich vertauschbar entsprechenden Punkte oder auch der Doppelebenen treffen muss. Auch gehen die beiden Geraden, welche den Punkt XY' mit den Endpunkten dieser zweiten Diagonale verbinden, als polarconjugiert zu den in den Kegelschnitten K_o, K_p' von den Erzeugenden von XY' gefassten Sehnen, immer durch die Pole dieser Querschnitte; und die Verbindungsgeraden von XY' mit den entsprechenden X' und Y selbst, als polarconjugiert den Geraden zwischen den Endpunkten jener Sehnen in beiden Kegelschnitten, welche von g und l verschieden sind, müssen stets die Berührungskegel der Fläche längs der Querschnitte K_o und K_p' berühren.

Da nun bei der Bewegung des Punktes XY' durch eine Erzeugende g die entsprechenden X' und Y die Erzeugende l durchlaufen, wie auch seine Centralprojectionen aus den Polen von K_o und K_p', so bilden diese letzteren wie die vorigen Collineationen 1) und die vier Doppelpunkte derselben sind die Doppelpunkte F_1, F_2 der Collineation X, X' und die einander vertauschbar entsprechenden Punkte derselben in der polarconjugierten Geraden zu F_1F_2. Denn für XY' in einem der ersten fallen die beiden betrachteten Paare mit ihm selbst und für XY' in einem der letzteren immer mit dem andern

zusammen. Und wenn zwei Punkte collineare Systeme 1) beschreiben, so thun dies auch ihre Reciproken und beide Systeme haben dieselben Doppelelemente.

Es ist evident, dass auch collineare Systeme 1) durch drei entsprechende Punktepaare A, A'; B, B'; C, C' bestimmt sind, da die zugehörenden Erzeugenden g und l in beiden Schaaren die zur Bestimmung ihrer Projectivitäten erforderlichen drei Paare liefern und so zu jedem Punkte X den entsprechenden X' durch die zugehörigen Erzeugenden g und l zu construieren gestatten.

Wenn sodann in einer Collineation 1) zwei Punkte, die nicht in derselben Geraden der Fläche liegen, einander vertauschbar entsprechen, so entsprechen den Geraden g und l der einen auch die der andern vertauschbar, und somit thun diess alle Paare der entsprechenden Erzeugenden in ihren projectivischen Systemen und also auch alle Paare entsprechender Punkte in der Fläche, d. h. sie bilden eine involutorische Collineation 1). Dieselbe hat vier Doppelpunkte und Doppelebenen in den Schnittpunkten und Verbindungsebenen der Doppelerzeugenden in den beiden involutorischen Regelschaaren der g und der l; und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte werden von den Diagonalen des Vierseits der Doppelelemente harmonisch getheilt.

Die Involution 1) ist durch zwei Paare entsprechender Punkte A, A_1; B, B_1 bestimmt; denn die beiden zu einander polarconjugierten Geraden, welche sowohl die Geraden AA_1, BB_1 als auch ihre polarconjugierten schneiden, sind jene Diagonalen des Vierseits der Doppelelemente, welche von den Verbindungsgeraden aller Paare der Involution getroffen werden. In dem Falle, wo AA_1, BB_1 sich schneiden, ist die involutorische Collineation eine solche zweiter Art, für welche der Schnittpunkt das Perspectivcentrum ist.

Im Falle der Involution 1) entsprechen sich alle die ebenen Querschnitte der Fläche selbst, welche durch eine der Diagonalen des Vierseits der Doppelelemente gehen, während im Falle der Collineation 1) die Tangentialebenen in den Doppelpunkten im Allgemeinen die einzigen sich selbst entsprechenden Schnitte sind. Diess führt auf den Uebergangsfall, in welchem das System der Schnitte durch eine jener Diagonalen aber nicht das durch die andere sich selbst entspricht.

Während die Involution 2) durch eine Centralprojection erzeugt wird, sind zur Construction der Collineation 1) mit einem Büschel sich selbst entsprechender Querschnitte zwei successive Centralprojectionen aus Punkten der Scheitelkante des Büschels und für die der Involution 1) zwei successive Centralprojectionen aus Punkten der einen oder andern Scheitelkante der Büschel sich selbst entsprechender Querschnitte erforderlich. Denn projiciert man in jenem Falle von zwei entsprechenden Punkten X, X' den ersten aus einem Punkte C_1 der fraglichen Scheitelkante auf die Fläche in X'', so sind X' und X'' nothwendig in Involution 2) für ein Centrum C_2 in derselben Scheitelkante.

Sodann ergiebt sich, dass eine Collineation 2) durch drei successive Centralprojectionen gebildet wird, deren Centra sich in der einen oder der andern der Ebenen der sich selbst entsprechenden Schnitte finden. Denn projiciert man X aus einem beliebigen Centrum C_1 in einer dieser Ebenen auf die Fläche nach X'', so bilden X'' und X' eine Collineation 1) mit dieser Ebene als sich selbst entsprechend; und da diese in Folge dessen ein Büschel solcher Querschnitte besitzen muss, so wird der Uebergang von X'' zu X' durch zwei successive Centralprojectionen aus Centren C_2 und C_3 in der Scheitelkante dieses Büschels vollzogen.

Endlich wird die allgemeine Collineation 1) durch vier successive Centralprojectionen vermittelt, weil nach einer ersten Projection aus einem beliebigen Centrum die allgemeine Collineation 2) zu behandeln bleibt.

48. Nach diesen Ergebnissen lässt sich auch die Construction collinearer Systeme auf elliptischen Flächen zweiten Grades aus drei Paaren entsprechender Punkte A, A'; B, B'; C, C' reell vollziehen.

Zuerst für die Collineation 2) bestimme man die in diesem Fall nothwendig reellen Mittelpunkte M_1, M_2 der beiden Kegelflächen zweiten Grades, welche die ebenen Schnitte $A'B'C'$ und ABC der Fläche enthalten, d. h. (vergl. II, § 44) die Doppelpunkte derjenigen Involution in der zur Schnittlinie dieser Ebenen polarconjugierten Geraden, welche durch die Schnittpunkte derselben mit der Fläche als das eine und die mit den Ebenen selbst als das andere Paar bestimmt ist. Projiciert

man nun aus einem dieser Punkte z. B. M_1 die A, B, C auf die Fläche nach A'', B'', C'', welche offenbar in der Ebene $A'B'C'$ liegen, so ist die Ebene $A'B'C'A''B''C''$ in der betreffenden Collineation 1) sich selbst entsprechend und der Durchschnitt der Geraden $A'B''$, $A''B'$ ein Punkt C_2 in der Verbindungslinie der zugehörigen Doppelpunkte. Projiciert man also A'', B'', C'' aus ihm nach A''', B''', C''', so sind diese mit A', B', C' in Involution und die Geraden $A'A'''$, $B'B'''$, $C'C'''$ gehen durch einen festen Punkt C_3. Man hat damit die drei erforderlichen Centralprojectionen bestimmt; die Verbindungsebene ihrer Centra $M_1C_2C_3$ ist die eine der sich selbst entsprechenden Ebenen der Collineation 2), die gleiche Benutzung von M_2 liefert die andere und ihre Schnittlinie enthält die Doppelpunkte der Collineation.

Damit ist auch die Collineation 1) allgemein erledigt; um aber ihre Doppelelemente zu bestimmen, construiert man eine Involution 1), die dieselben Doppelelemente hat, nach der durch die Natur der Collineation 1) aus der Projectivität der Elementargebilde erster Stufe fliessenden Definition: Wenn X' und Y die einem Punkt XY' entsprechenden in einer Collineation 1) sind, so beschreibt der zu XY' harmonisch conjugierte $(X'Y)$ in Bezug auf X' und Y ein zu XY' in Involution 1) stehendes System mit denselben Doppelelementen wie die gegebene Collineation 1); wobei der harmonisch conjugierte eines Punktes zu zwei andern Punkten wie oben der Schnittpunkt der durch ihn gehenden Transversale zur Geraden der letzteren und zu ihrer polarconjugierten mit der Fläche ist.

1) Nach der Bemerkung des Textes, dass in einer Collineation 2) mit den Querschnitten K_0 und K_p' und den zugehörigen Berührungskegeln $\mathbf{K}_0$ und $\mathbf{K}_p'$ die Geraden von XY' nach X' und nach Y diese Kegel berühren, erhält man folgende Construction: Legt man aus einem Punkt XY' an die Kegel $\mathbf{K}_0$ und $\mathbf{K}_p'$ die zwei Paare von Tangentialebenen, so schneiden sich diese in drei Paaren von Geraden, deren erstes den Punkt XY' mit den beiden Spitzen der Kegel verbindet, während das zweite von den Erzeugenden des Punktes XY' in der Fläche zweiten Grades gebildet ist; das dritte Paar aber sind die Geraden, die ihn mit seinen entsprechenden X' und Y verbinden.

Die Centralprojection der Involution 2) geht als Grenzfall hieraus hervor.

2) Die Aufgabe, der Fläche zweiten Grades ein geschlossenes Polygon einzuschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch feste

gegebene Punkte gehen, führt für gerade Seitenzahl auf die Bestimmung der Doppelpunkte einer Collineation 1), für ungerade Seitenzahl auf die der Collineation 2). Sie hat in jenem Fall im Allgemeinen vier, in diesem im Allgemeinen zwei Lösungen. Denn ein beliebiger Punkt X der Fläche als erste Ecke liefert nach den Daten ein im Allgemeinen nicht geschlossenes Polygon mit der letzten Ecke X'; und da X' von X durch eine Folge von Centralprojectionen abhängt, so bilden X und X' zwei collineare Systeme 1) oder 2), je nachdem die vorgeschriebene Zahl der Ecken gerade oder ungerade ist. Mit drei auf verschiedenen Erzeugenden beider Regelschaaren gewählten Anfangsecken A, B, C erhält man durch die letzten Ecken A', B', C', welche sie liefern, die Bestimmung der Collineation und aus dieser die Lösungen des Problems.

3) Wenn bei gerader Eckenzahl die Geraden AA', BB', CC' Erzeugende derselben Regelschaar sind, so erhält man unendlich viele Lösungen; die Seiten der Polygone erfüllen zwei Folgen von n Ebenen, deren n Schnittlinien Erzeugende der einen und der andern Schaar abwechselnd bilden. Schlossen sich die drei Versuchspolygone, so ist jeder Punkt der Fläche Anfangsecke eines Polygons, das der Aufgabe entspricht. Für ungerade Eckenzahl wird das Problem nur unbestimmt, wenn die Geraden AA', BB', CC' sich in einem Punkt schneiden; die Seiten der Polygone erzeugen eine Folge von n Kegeln, welche sich in n Kegelschnitten auf der Fläche durchdringen.

4) Wenn x_i und x_i' die Coordinaten entsprechender Punkte in Bezug auf das Tetraeder der sich selbst entsprechenden ebenen Querschnitte im Fall der Collineation 1) sind, so muss man nach den Grundlagen der projectivischen Coordinaten und § 44 mit Constanten α_i und t als einer von der Lage des Punktepaares X, X' abhängigen Veränderlichen haben

$$x_i' : x_i = \alpha_i t.$$

Analog im Fall der Collineation 2) für die F.-Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ als die sich selbst entsprechenden und für $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ als die einander vertauschbar entsprechenden Ebenen

$$x_1' : x_1 = \alpha_1 t, \qquad x_2' : x_2 = \alpha_2 t, \qquad x_3' : x_3 = \alpha_3 t,$$
$$x_4' : x_4 = \alpha_4 t.$$

Und in beiden Fällen sind die Constanten, weil die X und die X' auf derselben Fläche zweiten Grades durch das windschiefe Vierseit $A_1 A_3 A_2 A_4$ liegen sollen, durch die Relation

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4$$

mit einander verbunden.

Wenn man im Fall der Collineation 2) an Stelle der einander vertauschbar entsprechenden Tangentialebenen $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{A}_4$ der Fläche

die zwei sich selbst entsprechenden in Bezug auf die Fläche einander conjugierten Ebenen als die beiden letzten F.-Ebenen benutzt, so erhält man

$x_1' : x_1 = \alpha_1 t$, $x_2' : x_2 = \alpha_2 t$, $x_3' : x_3 = \alpha_3^* t$, $x_4' : x_4 = \alpha_4^* t$

mit $\alpha_3^* + \alpha_4^* = 0$ wegen der harmonischen Trennung und mit $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3^{*2} = \alpha_4^{*2}$ wegen der Gleichung

$$x_1 x_2 = a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$$

der Fläche; es folgt daraus, dass für $\alpha_3^* = \pm\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ genommen werden muss $\alpha_4^* = \mp\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$.

Man sieht, in jedem Fall bestimmt ein einziges Paar entsprechender Punkte der Fläche die Collineation vollständig, weil ihre Doppelebenen gegeben sind.

5) Involutorische Collineation 1) erhält man für

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = -\alpha_4;$$

und Involution 2) für

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pm\alpha_3^* = \mp\alpha_4^*.$$

Die Doppelelemente allein bestimmen.

6) Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte X, X' in der Collineation 1) sind Tangenten von zwei Flächen zweiten Grades, welche das windschiefe Vierseit der Doppelgeraden enthalten. Im Fall der Involution 1) reducieren sich ihre Berührungsorte auf die beiden Diagonalen derselben.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen und in jeder Ebene liegen zwei Strahlen der durch diese Verbindungsgeraden gebildeten Congruenz.

Der Text ergiebt, dass dieselbe für die Collineation 2) vier Strahlen durch einen Punkt und zwei in einer Ebene hat; für die Involution 2) fallen die von ihnen berührten Kegel $\mathbf{K}_o$ und $\mathbf{K}_p'$ in einen Kegel zusammen, die Congruenz besteht aus den doppeltzählenden Geraden durch seinen Scheitel und aus den Tangenten der Fläche zweiten Grades in den Punkten des ebenen Querschnittes K_o, K_p.

7) Die Strahlen der Congruenz bestimmen auf allen andern Flächen zweiten Grades durch das Vierseit der Doppelelemente collineare Punktsysteme 1). Die näheren Bestimmungen sind zu erörtern. Wie gestaltet sich diess für die Collineation 2)?

8) Man erläutere die besonderen Fälle, wo Doppelelemente auf einem Hyperboloid unendlich fern sind; ferner wo die Fläche zweiten Grades Paraboloid, Rotationsfläche oder insbesondere Kugel ist, unter den Annahmen, dass einer der Doppelpunkte der Collineation unendlich fern ist, dass Doppelpunkte dem imaginären absoluten Kreis angehören, etc.

9) Zwei Involutionen 2) auf derselben Fläche zweiter Ordnung haben ein gemeinsames Paar in dem gemeinsamen projicierenden Strahl der beiden zugehörigen Centralprojectionen. Zwei Involutionen 2) haben zwei gemeinsame Paare in den gemeinsamen Transversalen zu den beiden Diagonalenpaaren der Involutionen. Man erläutere die Realitätsverhältnisse in diesen beiden Fällen.

10) Die gemeinsamen Paare einer Involution 2) mit einer Collineation 2) oder 1) auf derselben Fläche und die der Collineationen 1) und 2) unter sich und resp. mit einander sind zu behandeln. Ob sie immer möglich sind, und ob die gemeinsamen Tangenten zu zwei Paaren von Flächen zweiten Grades, die je durch ein windschiefes Vierseit auf derselben Fläche zweiten Grades gehen, sich mit Zirkel und Lineal construieren lassen, bleibt zu untersuchen. Es ist offenbar, dass die Flächen zweiten Grades durch dasselbe windschiefe Vierseit hier die Analogie bilden zu den doppelt berührenden Kegelschnitten in § 43.

49. Die geometrische Deutung der Parameter bei Gleichungen höherer Grade entwickeln wir zuerst mit bekannten Zusammenhängen bei denen des zweiten Grades mit drei Veränderlichen, d. h. bei Curven und Kegeln zweiten Grades. Sie knüpft sich an die fundamentale Aufgabe von der Bestimmung der Elemente, welche einem linearen Elementargebilde erster Stufe und einer solchen Curve oder Fläche gemeinsam sind. Diese formulieren wir in folgender Weise. Für x_i' und x_i'' als die Coordinaten zweier Punkte X', X'' der F.-Ebene oder zweier Strahlen x', x'' des F.-Punktes oder Scheitels im Bündel ($i = 1, 2, 3$) sind $x_i' + \lambda x_i''$ die Coordinaten eines mit der Aenderung des Parameters λ beweglichen Punktes in der geraden Verbindungslinie oder der Reihe von X' und X'' oder die Coordinaten des mit λ veränderlichen Strahles in dem Büschel aus den Strahlen x' und x''. Die beiden Punkte, welche die Reihe $X'X''$ mit der Curve zweiter Ordnung ihrer Ebene $\mathbf{S} = 0$ gemein hat, resp. die beiden Strahlen, welche die Verbindungsebene der Strahlen x', x'' mit dem Kegel zweiter Ordnung $\mathbf{S} = 0$ aus ihrem Schnittpunkt als Scheitel gemein hat, besitzen Parameter λ_1, λ_2, welche der Gleichung zweiten Grades in λ genügen müssen, die man durch die Einsetzung von $x_i' + \lambda x_i''$ an Stelle der Veränderlichen x_i in $\mathbf{S} = 0$ erhält; dieselben und damit jene Elemente, deren Parameter sie sind, werden also als die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung gefunden.

Ebenso dual entsprechend für die Curven und Kegel zweiter Classe. Für ξ_i' und ξ_i'' als die Coordinaten zweier Strahlen ξ', ξ'' in der F.-Ebene oder zweier Ebenen Ξ', Ξ'' im Bündel ($i = 1, 2, 3$) sind $\xi_i' + \lambda\xi_i''$ die Coordinaten eines Strahles resp. einer Ebene in dem von ihnen bestimmten Büschel, die mit der Veränderung des Parameters λ alle Lagen in demselben durchläuft; und für $\Sigma = 0$ als eine homogene Gleichung zweiten Grades in den ξ_i liefert die Substitution von $\xi_i' + \lambda\xi_i''$ an Stelle von ξ_i eine Gleichung zweiten Grades in λ, aus welcher die Parameter λ_1, λ_2 derjenigen Strahlen ξ oder Ebenen Ξ erhalten werden, die unter den Strahlen oder Ebenen des Büschels die Curve resp. den Kegel zweiter Classe berühren d. i. zu deren Elementen gehören.

Wenn wir die Entwickelung in den Veränderlichen x_i schreiben, so erhalten wir aus den zugehörigen Ergebnissen für die Curven und Kegel zweiter Ordnung ($i = 1, 2, 3$) durch das Princip der Dualität die der analogen Entwickelung für die Curven und Kegel zweiter Classe.

Die homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen $a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots = 0$

wird durch Einsetzung von $(x_i' + \lambda x_i'')$ für x_i zu

$$a_{11}(x_1' + \lambda x_1'')^2 + \cdots + 2a_{23}(x_2' + \lambda x_2'')(x_3' + \lambda x_3'') + \cdots = 0$$

oder nach den Potenzen von λ geordnet

$$\begin{gathered} a_{11}x_1'^2 + \cdots + 2a_{23}x_2'x_3' + \cdots \\ + 2\lambda\{a_{11}x_1'x_1'' + \cdots + a_{23}(x_2'x_3'' + x_2''x_3') + \cdots\} \\ + \lambda^2(a_{11}x_1''^2 + \cdots + 2a_{23}x_2''x_3'' + \cdots) = 0 \end{gathered}$$

und wir schreiben sie in der symbolischen Abkürzung

$$\mathbf{S}' + \lambda\mathbf{P} + \lambda^2\mathbf{S}'' = 0,$$

in welcher also $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ die Resultate der Substitution der einmal resp. zweimal gestrichenen x_i in das Polynom $\mathbf{S}$ an Stelle der Veränderlichen bedeuten, während $\mathbf{P}$ das Zeichen ist für das Doppelte des in den x_i' und x_i'' symmetrischen Ausdruckes

$$\begin{gathered} x_1'(a_{11}x_1'' + a_{12}x_2'' + a_{13}x_3'') + x_2'(a_{12}x_1'' + a_{22}x_2'' + a_{23}x_3'') + \\ + x_3'(a_{13}x_1'' + a_{23}x_2'' + a_{33}x_3'') \\ = x_1''(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3') + x_2''(a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3') + \\ + x_3''(a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3'). \end{gathered}$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{S}' + \lambda P + \lambda^2 \mathfrak{S}'' = 0$ folgt das Paar der Parameterwerthe

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''}}{2\mathfrak{S}''}.$$

Nach diesem Ausdruck sind dieselben entgegengesetzt gleich für $P = 0$, d. h. wenn auf den Strahlen des Büschels aus dem festen Punkt X' in der Ebene der Curve zweiter Ordnung der zweite Punkt X'' so gewählt wird, dass seine Coordinaten die Bedingung $P = 0$ erfüllen oder wenn er in der Geraden

$$x_1(a_{11}x_1' + \cdot\cdot) + x_2(a_{12}x_1' + \cdot\cdot) + x_3(a_{13}x_1' + \cdot\cdot) = 0$$

angenommen wird. Da nach der entgegengesetzten Gleichheit der Parameter λ_1 und λ_2 in diesem Fall das Doppelverhältniss der Schnittpunkte mit den F.-Punkten X', X den Werth -1 erhält, so ist die Gerade $P=0$ die Polare des Punktes X' in Bezug auf die durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellte Curve zweiter Ordnung (I, § 30); im Fall des Bündels und des Kegels ist die Ebene $\mathfrak{P} = 0$ die Polarebene des Strahles x' aus seinem Scheitel in Bezug auf den Kegel zweiter Ordnung, den die Gleichung ausdrückt. Die Punkte resp. Strahlen x_i'', deren Coordinaten der Bedingung $P = 0$ genügen, heissen dem Punkt resp. Strahl x_i' harmonisch conjugiert oder bilden mit ihm die Paare harmonischer Pole resp. harmonischer Polstrahlen der Curve und des Kegels, zu denen jener gehört. Man sieht, dass die Angabe eines solchen Paares eine lineare Bedingung für die Curve und den Kegel zweiter Ordnung bildet, sodass mit der Festsetzung von fünf Paaren die Bestimmung eintritt. In Folge dessen bestimmen Pol und Polare mit drei Punkten der Peripherie die Curve zweiter Ordnung, (I, § 30, 5) etc.

Die schon bemerkte Symmetrie der Gleichung $P = 0$ in den x_i' und den x_i'' sagt aus, dass für x_i'' als in der Polare von x_i' gelegen auch die Polare von x_i'' durch x_i' geht, oder dass die Polaren der Punkte einer Geraden durch den Pol derselben gehen und die Pole der Geraden aus einem Punkt in der Polare derselben liegen (I, § 32); resp. dass die Polarebenen der Strahlen einer Ebene in Bezug auf den Kegel zweiter Ordnung durch den Polstrahl derselben gehen, etc. (I, p. 231.) In algebraischer Formulierung also: Bewegt sich der Pol X' in der Geraden YZ, so ent-

spricht seiner durch den Parameterwerth μ und die Coordinaten $y_i + \mu z_i$ definierten Lage die Polare

$$x_1\{a_{11}(y_1 + \mu z_1) + \cdot\cdot\} + x_2\{a_{12}(y_1 + \mu z_1) + \cdot\cdot\} + \\ + x_3\{a_{13}(y_1 + \mu z_1) + \cdot\cdot\} = 0$$

oder $$x_1(a_{11}y_1 + \cdot\cdot) + x_2(a_{12}y_1 + \cdot) + x_3(a_{13}y_1 + \cdot\cdot) + \\ + \mu\{x_1(a_{11}z_1 + \cdot\cdot) + x_2(a_{12}z_1 + \cdot\cdot) + x_3(a_{13}z_1 + \cdot\cdot)\} = 0$$

und symbolisch $$P_y + \mu P_z = 0.$$

Ist sodann x_i'' ein Punkt der Curve zweiter Ordnung, sodass $\mathfrak{S}'' = 0$ ist, so folgt aus $\mathfrak{S}' + \lambda P = 0$ für den Parameter des zweiten Schnittpunktes auf einem durch ihn gehenden Strahl

$$\lambda = -\mathfrak{S}' : P;$$

und da für $P = 0$ dieser Parameterwerth unendlich gross wird, also das zweite F.-Element x_i'' der Reihe wiedergiebt, so erkennt man $P = 0$ als die Gleichung der Tangente der Curve zweiter Ordnung im Punkt x_i'', resp. als Gleichung der Tangentialebene des Kegels zweiter Ordnung längs der betreffenden Erzeugenden.

Die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung für λ sind aber ferner gleich mit gleichem Zeichen, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet oder für

$$P^2 - 4\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'' = 0,$$

d. h. diese Gleichung stellt die Gesammtheit der Punkte x_i'' dar, welche auf den von x_i' an die Curve gehenden Tangenten liegen resp. den Inbegriff der Strahlen in den von x_i' an den Kegel gehenden Tangentialebenen; d. h. sie ist die Gleichung des Tangentenpaares der Curve resp. des Tangentialebenenpaares des Kegels aus x_i'. Man sieht, dass für x_i' in der Curve oder auf dem Kegel die Polare oder Tangente resp. die Polarebene oder Tangentialebene doppelt gezählt zum Vorschein kommt, wie es den geometrischen Erklärungen entspricht.

Die wichtigsten unter den Anwendungen dieser Entwickelungen sind der Uebergang von der Gleichung in Punktcoordinaten zu der Gleichung in Liniencoordinaten für denselben Kegelschnitt und die Aufstellung der Bedingung des Zerfallens für den Kegelschnitt der allgemeinen Gleichung in zwei Gerade, und dual entsprechend.

Erstens. Nach der Form von $P = 0$ sind die Coordinaten

ξ_i der Polare von x_i' in Bezug auf den Kegelschnitt der allgemeinen Gleichung

$$a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3'=k\xi_1,\quad a_{12}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3'=k\xi_2,$$
$$a_{13}x_1'+a_{23}x_2'+a_{33}x_3'=k\xi_3;$$

die Bedingung der Incidenz von Pol und Polare, welche x_i' zu einem auf $S=0$ gelegenen Punkt und die Polare ξ_i zur entsprechenden Tangente von $S=0$ macht,

$$\xi_1x_1'+\xi_2x_2'+\xi_3x_3'=0$$

erlaubt die Elimination der vier Grössen x_1', x_2', x_3', $-k$ und giebt als die von den Coordinaten sämmtlicher Tangenten von $S=0$ erfüllte Bedingung, d. h. als die Gleichung von $S=0$ in Liniencoordinaten

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ist also für die Determinante der Coefficienten a_{ik} das adjungierte System A_{ik} gebildet, sodass der Werth der Determinante D der Coefficienten durch die Summen

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},\quad a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},\text{ etc.}$$

gleichmässig ausgedrückt wird, so ist die Gleichung der Curve $S=0$ in den Coordinaten ξ_i

$$A_{11}\xi_1^2+\cdots+2A_{23}\xi_2\xi_3+\cdots=0.$$

Wenn zweitens der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt oder aus perspectivischen Büscheln erzeugt ist (I, § 25), so gehen die Polaren aller Punkte seiner Ebene durch den Schnittpunkt der Geraden oder seinen Doppelpunkt, und alle die Pole, welche mit ihm in der nämlichen Geraden liegen, haben dieselbe Polare, den zu ihr in Bezug auf die Geraden harmonisch conjugierten Strahl. Die Bedingung dieses Zerfallens finden wir daher als Bedingung dafür, dass die Polaren der F.-Punkte A_1, A_2, A_3 durch einen Punkt gehen, d. h. dass die Gleichungen

$$\frac{h_i}{e_i}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)=0,$$

gleichzeitig erfüllt sind oder die Bedingung des Zerfallens ist das Verschwinden der Discriminante der Gleichung zweiten Grades, nämlich

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

In der That, wenn die Polaren von drei Punkten u_i, v_i, w_i, die ein Dreieck bilden, schreiben wir $P_u = 0$, $P_v = 0$, $P_w = 0$, durch einen Punkt gehen, so gehen auch die aller andern Punkte der Ebene durch denselben Punkt, weil ihre Coordinaten x_i' in der Form $\varrho(u_i + \lambda v_i + \mu w_i)$ ausdrückbar sind und die Substitution dieses Werthes von x_i' in $P = 0$ den Ausdruck $P_u + \lambda P_v + \mu P_w = 0$ liefert.

Das Verschwinden der Discriminante ist eine Bedingung dritten Grades zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung; ersetzt man also die a_{ik} des einzelnen Kegelschnittes durch die $(a_{ik} + \lambda b_{ik})$ der Kegelschnitte eines Büschels, so wird die Bedingung des Zerfallens von den drei Kegelschnitten des Büschels erfüllt, deren Parameter λ_1, λ_2, λ_3 der aus dem Nullwerth der Discriminante hervorgehenden cubischen Gleichung in λ genügen. In einem Büschel von Kegelschnitten giebt es drei Linienpaare oder drei Kegelschnitte mit Doppelpunkt, die drei Gegenseitenpaare des Vierecks der Grundpunkte; die Diagonalpunkte desselben sind ihre Doppelpunkte, offenbar das gemeinsame Tripel harmonischer Pole für alle Kegelschnitte des Büschels.

Und hier springt als dritte der Anwendungen hervor die Interpretation des Parameters im Büschel der Curven zweiter Ordnung, etc. Denn für die dem Parameterwerth λ entsprechende Curve $\mathfrak{S}_1 + \lambda \mathfrak{S}_2 = 0$ eines solchen Büschels aus den Kegelschnitten

$\mathfrak{S}_1 \equiv a_{11} x_1^2 + \cdots = 0$ und $\mathfrak{S}_2 \equiv b_{11} x_1^2 + \cdots = 0$

ist die Polare des Punktes x_i' nach dem Vorigen

$$x_1\{(a_{11} + \lambda b_{11}) x_1' + (a_{12} + \lambda b_{12}) x_2' + (a_{13} + \lambda b_{13}) x_3'\} +$$
$$+ x_2\{(a_{12} + \lambda b_{12}) x_1' + \cdots\} + x_3\{(a_{13} + \lambda b_{13}) x_1' + \cdots\} = 0$$

oder

$$x_1(a_{11} x_1' + \cdots) + x_2(a_{12} x_1' + \cdots) + x_3(a_{13} x_1' + \cdots) +$$
$$+ \lambda\{x_1(b_{11} x_1' + \cdots) + x_2(b_{12} x_1' + \cdots) + x_3(b_{13} x_1' + \cdots)\} = 0,$$

d. h. $$P_1 + \lambda P_2 = 0;$$

die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels bilden ein Strahlbüschel; und der Parameterwerth jedes Strahles in demselben ist derselbe, wie der des zugehörigen Kegelschnittes im Büschel, wenn als F.-Strahlen im Polarenbüschel die Polaren der F.-Kegelschnitte im Kegelschnittbüschel genommen werden. Der Parameter im Kegelschnittbüschel ist also das negative Theilverhältniss des zugehörigen Strahles in seinem Polarenbüschel für irgend einen Punkt der Ebene, oder die geometrische Interpretation des § 37 für denselben genügt auch für die Büschel von Kegelschnitten; natürlich in gleicher Weise für die Büschel von concentrischen Kegeln zweiter Ordnung, die solche aus einem Punkt des Raumes projicieren, und in dualer Form für die Schaaren von Kegelschnitten und die Schaaren ihrer projicierenden Kegel.

Es folgt daraus, dass die Polaren verschiedener Punkte in Bezug auf die Kegelschnitte desselben Büschels projectivische Strahlbüschel bilden, wenn man die in Bezug auf den nämlichen Kegelschnitt genommenen Polaren einander zuordnet. Dann erzeugen auch die Polarenbüschel für zwei beliebige Punkte P_1, P_2 der Ebene als Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlenpaare einen Kegelschnitt; und wenn in der Verbindungsgeraden P_1P_2 der Pole zwei beliebige andere Punkte P_1^*, P_2^* genommen werden, so erzeugen nach § 42 die zu ihnen gehörigen Polarenbüschel in derselben Art den nämlichen Kegelschnitt, sodass derselbe der Ort ist der Scheitel der Polarenbüschel für alle Punkte dieser Geraden oder der Ort ihrer Pole. So liegen die Centra der Kegelschnitte eines Büschels als die Scheitel der Polarenbüschel der unendlich fernen Punkte der Ebene oder als die Pole der unendlich fernen Geraden in einem dieser Kegelschnitte. Ist der Pol ein Grundpunkt des Büschels, so wird sein Polarenbüschel zum Tangentenbüschel desselben. Die Tangentenbüschel in zweien der vier Grundpunkte sind projectivisch und in perspectivischer Lage; denn für die Grundpunkte 1, 2 als Pole und mit 3, 4 als den beiden andern Grundpunkten ist das Linienpaar 12, 34 ein Kegelschnitt des Büschels, dem in 1 und in 2 die Gerade 12 als Tangente zukommt, d. h. die Polarenbüschel haben diesen Strahl entsprechend gemein; man sieht auch, dass die zugehörige

Perspectivaxe die Verbindungslinie der Diagonalpunkte 23, 14 oder I und 13, 24 oder II ist. Die vier Büschel an den Grundpunkten erzeugen also durch den Schnittpunkt ihrer entsprechenden Strahlen die sechs Seiten des Vierecks der Grundpunkte und die drei Diagonalen desselben, diese doppelt auftretend, nämlich jede zu den zwei Gegenseiten, deren Diagonalpunkt sie nicht enthält. Da nach dem Vorigen die Polaren aller Punkte der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt mit Doppelpunkt durch diesen Doppelpunkt gehen, so liegen die Diagonalpunkte I, II, III des Vierecks der Grundpunkte in jedem der zweifach unendlich vielen Kegelschnitte, welche den Geraden der Ebene als Orte ihrer Pole in den Kegelschnitten des Büschels entsprechen. Dieselben bilden somit ein lineares Gebilde zweiter Stufe von Kegelschnitten, so wie die Geraden der Ebenen, denen sie entsprechen, ein lineares Elementargebilde zweiter Stufe. Wir kommen im dritten Abschnitt elementar construierend und weiter ausführend hierauf zurück.

Dieselbe Parameterübereinstimmung giebt aber auch den Begriff der Projectivität zwischen einem Strahlbüschel und einem Kegelschnittbüschel als bedingt durch die Projectivität des Strahlbüschels mit den Büscheln seiner Polaren für die Punkte der Ebene; und den Begriff der Projectivität zwischen zwei Kegelschnittbüscheln als bedingt durch die Projectivität zwischen den Büscheln der Polaren des einen und des andern. Daraus geht die Erzeugung von Curven dritter und vierter Ordnung aus solchen projectivischen Büscheln als Orte der gemeinsamen Punkte ihrer entsprechenden Elemente sofort hervor. (§ 44,4 für die U, V als Functionen zweiten und ersten Grades.) (§ 50.)

Von den dual entsprechenden Ergebnissen findet man einige unter den Beispielen.

1) Die Substitution von $\xi_i' + \lambda \xi_i''$ für ξ_i in

$$\Sigma \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \cdots + 2\alpha_{23} \xi_2 \xi_3 + \cdots = 0$$

liefert für die Parameter der beiden im Büschel ξ', ξ'' liegenden Tangenten der Curve zweiter Classe resp. der Tangentialebenen des Kegels zweiter Classe die Bestimmungsgleichung

$$\Sigma' + \lambda \mathrm{P} + \lambda^2 \Sigma'' = 0,$$

wenn Σ', Σ'' die Resultate der Substitutionen von ξ_i' und resp. ξ_i'' für ξ_i in Σ sind und

$$\mathbf{P} \equiv \xi_1'(\alpha_{11}\xi_1'' + \alpha_{12}\xi_2'' + \alpha_{13}\xi_3'') + \xi_2'(\alpha_{12}\xi_1'' + \cdot\cdot) + \xi_3'(\alpha_{13}\xi_1'' + \cdot\cdot)$$
$$= \xi_1''(\alpha_{11}\xi_1' + \cdot\cdot) + \xi_2''(\alpha_{12}\xi_1' + \cdot\cdot) + \xi_3''(\alpha_{13}\xi_1' + \cdot\cdot)$$

gesetzt wird. Die Auflösung

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mathbf{P} \pm \sqrt{\mathbf{P}^2 - 4\Sigma'\Sigma''}}{2\Sigma''}$$

liefert für $\mathbf{P} = 0$ gleiche und entgegengesetzte und für

$$\mathbf{P}^2 - 4\Sigma'\Sigma'' = 0$$

algebraisch gleiche Wurzelwerthe. Jenes ist die Gleichung des Pols von ξ_i', wenn die ξ_i'' (mit Unterdrückung der Striche) als laufende Coordinaten genommen werden; für ξ_i' als Tangente der Curve die Gleichung ihres Berührungspunktes. Die Symmetrie von $\mathbf{P} = 0$ in den ξ_i' und den ξ_i'' sagt aus, dass für ξ_i'' als durch den Pol von ξ_i' gehend auch der Pol von ξ_i'' in ξ_i' liegt, etc. Die Gleichung $\mathbf{P}^2 - 4\Sigma'\Sigma'' = 0$ verbindet die Gesammtheit der Strahlen ξ_i'', welche durch die dem Strahl ξ_i' mit dem Kegelschnitt gemeinsamen Punkte gehen, d. h. mit Ersetzung der ξ_i'' durch die ξ_i ist sie die Gleichung dieses Punktepaares in Liniencoordinaten.

2) Wenn die Polare des F.-Punktes A_i in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathbf{S} = 0$ die F.-Gerade A_jA_k oder $x_i = 0$ sein soll, so muss $P = 0$ für $x_i' = \frac{h_i}{e_i}$, $x_j' = x_k' = 0$ oder es muss

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 = 0$$

mit $x_i = 0$ identisch werden, oder die Coefficienten der Glieder x_ix_k, x_jx_k verschwinden. Es ist also z. B. A_1 der Pol von a_1 in den Kegelschnitten des linearen Gebildes dritter Stufe

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0;$$

oder wie in § 28 der Anfangspunkt Cartesischer Coordinaten ist der Mittelpunkt für alle durch

$$a_{11} + a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + 2a_{23}xy = 0$$

dargestellten Kegelschnitte.

3) Sind zwei Ecken des F.-Dreiecks die Pole ihrer Gegenseiten, so ist auch die dritte Ecke desselben der Pol ihrer Gegenseite, die F.-Punkte bilden ein Tripel harmonischer Pole und die F.-Geraden ein Tripel harmonischer Polaren; die Kegelschnitte bilden das lineare Gebilde zweiter Stufe

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$$

oder in Cartesischen Coordinaten wie in § 28

$$a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 = 0.$$

Sollen auch die E.-Elemente des F.-Systems einander als Pol und Polare entsprechen, so sind nothwendig $a_1 = a_2 = a_3$.

Für $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ als ein Tripel harmonischer Polaren ist die Gleichung eines zugehörigen Kegelschnittes von der Form

$$a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0.$$

4) Die Polare des Punktes $(1, x', y')$ in Bezug auf den Kegelschnitt $a_{11} + a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + 2a_{23}xy + 2a_{13}y + 2a_{12}x = 0$

ist
$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + x'(a_{12} + a_{22}x + a_{23}y) + y'(a_{13} + a_{23}x + a_{33}y) = 0$$

und liefert für $a_{13} = 0$, $a_{12} = 0$ und $y' = 0$ den Schnitt mit $y = 0$

$$a_{11} + a_{22}xx' = 0,$$

d. h. für zwei harmonische Pole in dem in der Axe der x gelegenen Durchmesser ist das Product der vom Mittelpunkt gemessenen Abscissen constant — gleich dem Quadrat des zugehörigen Halbdurchmessers; etc. Für die Punkte im Unendlichen der Coordinatenaxen $(0, x', 0)$, $(0, 0, y')$ werden die Polaren die Axen $y = 0$ resp. $x = 0$, wenn a_{23} Null ist, oder $a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 = 0$ ist die auf zwei conjugierte Durchmesser bezogene Centralgleichung.

5) Ersetzt man in der Grundgleichung des Textes λ durch $\lambda\sqrt{-1}$ oder $i\lambda$, so geht dieselbe über in

$$\mathfrak{S}' + i\lambda P' - \lambda^2 \mathfrak{S}'' = 0$$

und fordert somit $P = 0$, d. h. x_i' und x_i'' als harmonische Pole in Bezug auf den Kegelschnitt, und dazu $\mathfrak{S}' - \lambda^2\mathfrak{S}'' = 0$. Auch die Punkte $x_i' + \lambda\mu x_i''$ und $\mu x_i' - \lambda x_i''$ sind harmonische Pole. Die Einsetzung von $\varkappa + i\lambda$ für λ giebt ebenso

$$\mathfrak{S}' + \varkappa P + (\varkappa^2 - \lambda^2)\mathfrak{S}'' = 0,$$

und entweder $\lambda = 0$ oder $P + 2\varkappa\mathfrak{S}'' = 0$ und in diesem zweiten Fall also

$$\lambda^2 = \frac{4\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'' - P^2}{4\mathfrak{S}''^2} \text{ oder } \lambda = \pm\frac{\sqrt{4\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'' - P^2}}{2\mathfrak{S}''} \text{ mit } \varkappa = -\frac{P}{2\mathfrak{S}''}.$$

6) Für die Coordinaten x_i des Pols von ξ_i in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\Sigma = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \cdots = 0$$

hat man
$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1' + \alpha_{12}\xi_2' + \alpha_{13}\xi_3' - \varkappa x_1 &= 0, \\ \alpha_{12}\xi_1' + \alpha_{22}\xi_2' + \alpha_{23}\xi_3' - \varkappa x_2 &= 0, \\ \alpha_{13}\xi_1' + \alpha_{23}\xi_2' + \alpha_{33}\xi_3' - \varkappa x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung der Incidenz

$$x_1\xi_1' + x_2\xi_2' + x_3\xi_3' = 0$$

liefert dann durch die Elimination der ξ_i' und des $-\varkappa$ zwischen diesen vier Gleichungen die Gleichung des Kegelschnittes $\Sigma = 0$ in Punktcoordinaten in der Form

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & x_1 \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & x_2 \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder mittelst des adjungierten Systems $\mathbf{A}_{ik}$ der Determinante der Coefficienten α_{ik} entwickelt

$$\mathbf{A}_{11}x_1^2 + \cdots + 2\mathbf{A}_{23}x_2x_3 + \cdots = 0.$$

7) Die Gleichungen der in Punktcoordinaten durch

$$a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0, \qquad a_1x_1^2 + \cdots = 0,$$
$$x_1x_3 - x_2^2 = 0$$

ausgedrückten Kegelschnitte sind in den verbundenen Liniencoordinaten resp.

$$a_1^2\xi_1^2 + \cdots - 2a_2a_3\xi_2\xi_3 - \cdots = 0, \qquad a_2a_3\xi_1^2 + \cdots = 0,$$
$$4\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = 0.$$

Die Pole der F.-Geraden a_1, a_2, a_3 in Bezug auf den ersten Kegelschnitt sind

$$a_1\xi_1 - a_2\xi_2 - a_3\xi_3 = 0, \qquad -a_1\xi_1 + a_2\xi_2 - a_3\xi_3 = 0,$$
$$-a_1\xi_1 - a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0$$

und die Geraden, welche sie mit den bezüglichen F.-Punkten A_1, A_2, A_3 verbinden, gehen durch einen Punkt (a_1, a_2, a_3).

8) Der erste Kegelschnitt in ξ-Coordinaten in 6) ist dem F.-Dreieck umgeschrieben und hat in $\xi_1 = 0$ die durch $\xi_2 : \xi_3 = a_2 : a_3$ bestimmte Tangente, die die Gegenseite in $a_2\xi_2 - a_3\xi_3 = 0$ schneidet. Dann ist

$$a_1\xi_1 - \lambda(a_2\xi_2 - a_3\xi_3) = 0$$

ein in jener fortrückender Punkt, dessen bewegliche Tangente mit dem Kegelschnitt durch

$$\lambda^2(a_2\xi_2 - a_3\xi_3)^2 + a_2^2\xi_2^2 + a_3^2\xi_3^2$$
$$-2a_2a_3\xi_2\xi_3 - 2a_3\xi_3\lambda(a_2\xi_2 - a_3\xi_3) - 2a_2\xi_2\lambda(a_2\xi_2 - a_3\xi_3) = 0$$

ausgedrückt wird. Daraus erhält man die Parameterdarstellung

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{4\lambda^2}{a_1} : \frac{(1+\lambda)^2}{a_2} : \frac{(1-\lambda)^2}{a_3}.$$

9) Die auf conjugierte Durchmesser bezogenen Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1$$

liefern (I, § 33, 9) die Gleichungen in verbundenen Plücker'schen Coordinaten $a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2 = 1$.

Ihre Zerlegungen

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 1$$

führen auf die Parameterdarstellungen (§ 39, 4)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}a, \quad y = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}b;$$

und resp.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x}{a} + i\frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{x}{a} - i\frac{y}{b} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}a, \quad y = \frac{1-\lambda^2}{2i\lambda}b.$$

Weil bei den Factoren der Halbdurchmesser a, b in den ersten Werthen die Differenz und bei denen in den zweiten die Summe der Quadrate Eins ist, so können jene als Secante und Tangente, diese als Cosinus und Sinus eines Hilfswinkels φ angesehen werden, von einfacher geometrischer Bedeutung. Im Fall der Ellipse folgt aus $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ die Gleichung der Sehne vom Punkt φ nach dem Punkt φ' und die der Tangente in φ resp.

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi'),$$

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1.$$

10) Eine Gerade ξ_i' wird von zwei Kegelschnitten des Büschels $S_1 + \lambda S_2 = 0$ berührt, nämlich von denen, deren Parameter λ_1, λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind, die aus der Berührungsbedingung des Textes entspringt, d. i.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11}, & a_{12}+\lambda b_{12}, & a_{13}+\lambda b_{13}, & \xi_1' \\ a_{12}+\lambda b_{12}, & a_{22}+\lambda b_{22}, & a_{23}+\lambda b_{23}, & \xi_2' \\ a_{13}+\lambda b_{13}, & a_{23}+\lambda b_{23}, & a_{33}+\lambda b_{33}, & \xi_3' \\ \xi_1', & \xi_2', & \xi_3', & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

deren entwickelte Form man nach dem Text leicht bildet. Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Geraden ξ_i' mit dem Kegelschnitt Σ', der der Ort ihrer Pole in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels ist. Dual gehen durch einen Punkt x_i' zwei

Kegelschnitte der Schaar $\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$, deren Tangenten die von ihm an den Kegelschnitt S' gehenden sind, welcher die Enveloppe seiner Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte der Schaar ist.

11) Sind η_i und ξ_i die Coordinaten der beiden Geraden, welche den zerfallenden Kegelschnitt der Punktcoordinatengleichung mit verschwindender Discriminante bilden, sodass

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots \equiv$$
$$(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3)(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)$$

sein muss, so ist bis auf einen Factor

$$a_{ii} = \eta_i \xi_i, \qquad 2a_{ik} = \eta_i \xi_k + \eta_k \xi_i,$$

also $$\eta_i \xi_k = a_{ik} + z_j, \qquad \eta_k \xi_i = a_{ik} - z_j$$

und man erhält aus neun Gleichungen die Bestimmung der η_i, ξ_i und der z_j.

50. Das Vorhergehende setzt uns in den Stand, die Projectivität der linearen Gebilde aus Curven zweiten Grades unter sich und mit linearen Elementargebilden gleicher Stufe in der Ebene auszudrücken und die Gleichungen der Erzeugnisse ihrer Verbindung aufzustellen und zu untersuchen.

Für $S_i = 0$ und $S_i^* = 0$ als Gleichungen von Curven zweiter Ordnung und $L_i = 0$, $L_i^* = 0$ als Gleichungen von Geraden sind

$$S_1 + \lambda S_2 = 0, \qquad L_1 + \mu L_2 = 0, \qquad S_1^* + \lambda' S_2^* = 0$$

die Gleichungen von Kegelschnittbüscheln und Strahlbüschel; die Projectivität des ersten und zweiten findet statt, wenn eine bilineare Relation zwischen λ, μ und die des ersten und dritten, wenn eine solche zwischen λ und λ' besteht, also für

$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$ resp. $A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0$.

Setzt man in die erste $\lambda = -S_1 : S_2$, $\mu = -L_1 : L_2$ und in die zweite $\lambda = -S_1 : S_2$, $\lambda' = -S_1^* : S_2^*$, so erhält man (vergl. § 44, 4)

$$aS_1L_1 - bS_1L_2 - cS_2L_1 + dS_2L_2 = 0,$$

resp. $$AS_1S_1^* - BS_1S_2^* - CS_1^*S_2 + DS_2S_2^* = 0$$

als die Gleichungen der Orte der Punktegruppen — Paare und Quadrupel resp. —, welche je den entsprechenden Elementen der verbundenen Büschel gemeinsam sind. Die erste unserer

Gleichungen ist vom dritten, die zweite vom vierten Grade homogen in den Veränderlichen x_i; die erzeugten Orte sind also eine Curve dritter Ordnung und eine Curve vierter Ordnung resp. Für die gleichzeitigen Relationen $\mathfrak{S}_1 = 0$, $\mathfrak{S}_2 = 0$ und wieder für $\mathfrak{L}_1 = 0$, $\mathfrak{L}_2 = 0$ wird die erste befriedigt, für die $\mathfrak{S}_1 = 0$, $\mathfrak{S}_2 = 0$ und wieder $\mathfrak{S}_1^* = 0$, $\mathfrak{S}_2^* = 0$ die zweite, d. h. die erzeugten Curven gehen durch die Grundpunkte der erzeugenden Büschel, fünf feste Punkte im ersten und acht solche im zweiten Fall. Denkt man in jedem Fall die den Grundelementen jedes Büschels entsprechenden des andern Büschels benutzt, so liefern dieselben für die Curve dritter Ordnung vier Paare und für die Curve vierter Ordnung vier Quadrupel von Punkten zu den Grundpunkten des Büschels hinzu.

Sind dagegen $\Sigma_i = 0$, $\Sigma_i^* = 0$ Gleichungen von Curven zweiter Classe und $\Lambda_i = 0$, etc. Gleichungen von Punkten, so haben wir in

$$\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0, \qquad \Lambda_1 + \mu \Lambda_2 = 0, \qquad \Sigma_1^* + \lambda' \Sigma_2^* = 0$$

mit $$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0$$

resp. $$\mathfrak{A}\lambda\lambda' + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\lambda' + \mathfrak{D} = 0$$

die Gleichungen von Kegelschnittschaaren und Punktreihen, welche zu einander projectivisch sind; so wie in

$$\alpha \Sigma_1 \Lambda_1 - \beta \Sigma_1 \Lambda_2 - \gamma \Sigma_2 \Lambda_1 + \delta \Sigma_2 \Lambda_2 = 0$$

resp. $$\mathfrak{A} \Sigma_1 \Sigma_1^* - \mathfrak{B} \Sigma_1 \Sigma_2^* - \mathfrak{C} \Sigma_2 \Sigma_1^* + \mathfrak{D} \Sigma_2 \Sigma_2^* = 0$$

die Gleichungen der Erzeugnisse ihrer Verbindung. Es sind also eine Curve dritter Classe und resp. eine Curve vierter Classe; die erste die Enveloppe aller der Tangentenpaare, welche von den Punkten der geraden Reihe an die ihnen entsprechenden Kegelschnitte der Schaar gehen; die zweite die Enveloppe aller der Quadrupel von Tangenten, die ein Kegelschnitt der einen Schaar mit dem entsprechenden der andern Schaar gemein hat.

Wir bemerken, dass auch Gleichungen der ersten mit solchen der zweiten Art in derselben Weise verbunden werden können; man erhält als Gleichungen der bezüglichen Erzeugnisse

$$a \mathfrak{S}_1 \Lambda_1 - b \mathfrak{S}_1 \Lambda_2 - c \mathfrak{S}_2 \Lambda_1 + d \mathfrak{S}_2 \Lambda_2 = 0$$

oder $$a \Sigma_1 \mathfrak{L}_1 - b \Sigma_1 \mathfrak{L}_2 - c \Sigma_2 \mathfrak{L}_1 + d \Sigma_2 \mathfrak{L}_2 = 0$$

homogene Gleichungen zwischen den x_i und den ξ_i, vom zweiten Grade in den einen und vom ersten Grade in den andern; und

resp. $$A\mathfrak{S}_1\Sigma_1 - B\mathfrak{S}_1\Sigma_2 - C\mathfrak{S}_2\Sigma_1 + D\mathfrak{S}_2\Sigma_2 = 0,$$

eine in den x_i wie in den ξ_i quadratische und homogene Gleichung. (Vergl. § 31.)

Wir wollen die naheliegenden Specialfälle der erzeugten Ortscurven betrachten, die sich im Allgemeinen nach dem Princip der Dualität auf die Curven dritter und vierter Classe übertragen; die Fälle mit zwei Reihen von Veränderlichen besprechen wir nicht weiter.

Ist beiden erzeugenden Büscheln ein Grundpunkt gemeinschaftlich, so wird derselbe zum Doppelpunkt der erzeugten Curve, er erscheint in allen Gruppen von zwei resp. vier Punkten, welche die entsprechenden Elemente beider verbundenen Gebilde mit einander hervorbringen. Wir können also in dieser Weise Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt und Curven vierter Ordnung mit einem, mit zwei, drei und vier Doppelpunkten erzeugen, welche letzteren nach § 36 in zwei Kegelschnitte zerfallen.

Wenn ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlbüschel einen Grundpunkt gemein haben, so kann derselbe als ein F.-Punkt des Coordinatensystems z. B. A_1 gedacht werden, sodass $\mathfrak{L}_1 = 0$ und $\mathfrak{L}_2 = 0$ als $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ und $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ als Polynome zweiten Grades, denen das Glied x_1^2 fehlt, zu nehmen sind; die Gleichung des Erzeugnisses enthält dann die Glieder mit x_1^3, $x_1^2x_2$, $x_1^2x_3$ nicht und ist nach § 28, 6 die einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Dieser Doppelpunkt kann ein Knoten, ein isolierter Punkt oder ein Rückkehr- oder stationärer Punkt sein; die Tangenten der beiden Curvenäste, die durch ihn gehen, sind offenbar die Doppelstrahlen, welche das Strahlbüschel $\mathfrak{L}$ mit dem zu ihm projectivischen Tangentenbüschel des Kegelschnittbüschels im Grundpunkt A_1 hervorbringt und wenn die Zuordnung so geschieht, dass die Doppelstrahlen zusammenfallen, so entsteht der stationäre Punkt mit dem Doppelstrahl als Tangente.

Hätten die zwei erzeugenden Kegelschnittbüschel einen Grundpunkt gemein, so kann derselbe als F.-Punkt A_1 der Coordinaten gewählt werden und die Gleichung des Erzeugnisses

wird die aus den Gliedern mit x_1^2 stammenden Producte vierten Grades x_1^4, $x_1^3 x_2$, $x_1^3 x_3$ nicht enthalten und daher eine Curve mit Doppelpunkt in A_1 darstellen. Die Tangenten in demselben sind die Doppelstrahlen der vereinigten projectivischen Tangentenbüschel der Kegelschnittbüschel in diesem Grundpunkt.

Sind den Kegelschnittbüscheln zwei der Grundpunkte gemein, so wollen wir ihre Gleichungen in der die Gemeinsamkeit der Grundpunkte $\mathbf{S}_1 = 0$, $\mathbf{L} = 0$ ausdrückenden Form schreiben

$$(\mathbf{S} + \mathbf{LM}) + \lambda(\mathbf{S} + \mathbf{LN}) = 0, \quad (\mathbf{S} + \mathbf{LM}^*) + \lambda'(\mathbf{S} + \mathbf{LN}^*) = 0.$$

Setzen wir, wie es nach § 39 auch in den vorhergehenden Gleichungen statthaft ist, dass die F.-Elemente der Büschel einander direct entsprechen oder dass die Projectivitätsgleichung auf $\lambda' = \varkappa\lambda$ reduciert sei, so wird das Erzeugniss durch

$$(\mathbf{S} + \mathbf{LM}^*)(\mathbf{S} + \mathbf{LN}) = \varkappa(\mathbf{S} + \mathbf{LM})(\mathbf{S} + \mathbf{LN}^*)$$

ausgedrückt und giebt für $\mathbf{L} = 0$ das Resultat $\mathbf{S}^2(1 - \varkappa) = 0$, das die vereinigten Grundpunkte als Doppelpunkte charakterisiert. Man sieht, dass sie reell und verschieden, reell und benachbart (II, § 15, 4), d. h. einen Berührungsknoten bildend, oder conjugiert imaginär sein können. Ist $\mathbf{S} = 0$ die Gleichung eines Kreises und $\mathbf{L} = 0$ die der unendlich fernen Geraden, so ist das Erzeugniss eine bicirculare Curve vierter Ordnung — das wichtigste Beispiel des letzteren Falles. Rücksichtlich ihrer Aeste und deren Tangenten im Doppelpunkt bleiben die vorher gegebenen Betrachtungen anwendbar.

Im Fall von drei Doppelpunkten wird einer nothwendig reell sein.

Als weitere specielle Fälle sind dann zu betrachten der, wo die Büschel einen Kegelschnitt gemein haben, und wo sie diesen Kegelschnitt entsprechend gemein haben; dann ist dieser der eine Theil des Erzeugnisses und der Rest ein zweiter Kegelschnitt — man kann von Perspectivität der Kegelschnittbüschel und von ihrer Perspectivaxe sprechen. Da aber in jedem Büschel von Kegelschnitten drei Linienpaare auftreten, so können ein Linienpaar des einen und ein Linienpaar des andern Büschels sich entsprechen und zudem kann eine Gerade des einen Paares mit einer Geraden des entsprechenden Paares zusammenfallen; dann ist diese Gerade ein Theil des Erzeug-

nisses und der Rest desselben eine Curve dritter Ordnung. Wir wollen nachher einen Fall dieser Art näher betrachten.

Endlich aber wissen wir, dass eine Involution von Strahlenpaaren im Büschel als Grenzform eines Büschels von Kegelschnitten zu betrachten ist und gelangen damit wieder zu der Erzeugung von Curven dritter Ordnung aus einer Strahleninvolution und einem zu ihr projectivischen Strahlbüschel und zur Erzeugung von Curven vierter Ordnung aus zwei einander projectivisch zugeordneten involutorischen Strahlbüscheln. Dabei ist offenbar der Scheitel des involutorischen Büschels ein Doppelpunkt des Erzeugnisses, dem als Tangenten seiner beiden Aeste die Strahlen der Involution angehören, welche da dem Scheitelstrahl beider Büschel in der Involution entsprechen; und man erhält somit auf diesem Wege ausser singulären Curven dritter Ordnung noch Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Die Doppelstrahlen jeder Involution schneiden je die Strahlen des entsprechenden Paares in den Punkten, wo diese die Curve berühren. Die bezüglichen Gleichungen fanden wir schon in § 43 f.

Wenn man aber in den erzeugenden projectivischen Involutionen des letzteren Falles die beiden Paare einander entsprechend festsetzt, zu welchen der gemeinsame oder Scheitelstrahl der Büschel gehört, so bildet dieser einen Theil des Erzeugnisses und der Rest desselben ist eine Curve dritter Ordnung, welche einfach durch die Scheitel hindurchgeht und nach ihrer Entstehung an keiner andern Stelle einen singulären Punkt hat, also die allgemeine Curve dritter Ordnung ist. Ein Doppelpunkt würde in ihr entstehen, wenn ein Doppelstrahl der einen Involution einem Doppelstrahl der andern entspräche. Und wenn beide Doppelstrahlen der ersten Involution denen der zweiten entsprachen, so entstehen zwei Doppelpunkte in ihren Schnittpunkten und die Curve dritter Ordnung zerfällt in die Verbindungsgerade derselben und einen durch sie und die Scheitel gehenden Kegelschnitt.

Im Rückblick auf §§ 41, 42 und die Projectionen der Curve vierter Ordnung erster Art erkennt man, dass eine solche Curve auf einem Hyperboloid, durch dessen projectivisch zugeordnete Regelschaar-Involutionen sie erzeugt wird, aus allen Punkten

dieses Hyperboloides projiciert wird als eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, erzeugt aus projectivischen Involutionen um diese als Scheitel.

Diese Erzeugung geht in die entsprechende der allgemeinen Curve dritter Ordnung über, wenn das Projectionscentrum in der Curve liegt und wir werden die bisherigen Betrachtungen durch Untersuchungen des Flächenbüschels vom zweiten Grade, welches die Curve bestimmt, nach darstellend geometrischer Methode zu ergänzen haben.

Wir wissen, dass die allgemeine Curve dritter Ordnung durch neun ihrer Punkte 1, 2, ... 9 bestimmt ist und wollen zeigen, dass man dieselbe aus diesen gemäss der Erzeugung aus Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel construieren kann. Wir wählen vier der neun gegebenen Punkte, z. B. 6, 7, 8, 9 als Grundpunkte des Kegelschnittbüschels; durch sie gehen nach den fünf ersten fünf Kegelschnitte 1, 2, 3, 4, 5 und es handelt sich darum, den Scheitelpunkt X eines Strahlbüschels zu finden, dessen fünf nach denselben Punkten gehende Strahlen den besagten Kegelschnitten projectivisch entsprechen. Zur Ausführung verzeichnen wir in einem der Grundpunkte z. B. in 6, die fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 jener Kegelschnitte und construieren durch die Punkte 1, 2, 3, 4 und resp. die Punkte 1, 2, 3, 5 etwa die beiden Kegelschnitte K_5 und K_4, für welche diesen Punkten dasselbe Doppelverhältniss zukommt wie dem Tangentenbüschel $t_1 t_2 t_3 t_4$ und dem $t_1 t_2 t_3 t_5$ resp. Diese Kegelschnitte haben die Punkte 1, 2, 3 mit einander gemein und schneiden sich daher noch in einem reellen Punkt, dem X der Aufgabe. Diese Operationen geschehen nach dem Früheren sämmtlich mit dem Lineal. Die fünf zweiten Schnittpunkte der Geraden $X1$, $X2$, $X3$, $X4$, $X5$ mit den durch 6, 7, 8, 9 nach 1, 2, 3, 4, 5 resp. gehenden Kegelschnitten sind neun Punkte der Curve und durch projectivische Vervollständigung erhält man beliebig viele weitere Paare derselben.

Die Construction derselben Curve aus projectivischen Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl kennen wir aus der Behandlung der Durchdringungen der Kegel zweiten Grades (II, § 26), wo die Scheitel der Involutionen, die Bilder der Spitzen M_1', M_2', in den zugehörigen Leitkegelschnitten

$\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ liegen, und ihre Projectivität durch die Entstehung aus dem Spurenbüschel der Hilfsebenen mit dem Scheitel S in der Geraden M_1', M_2' hergestellt wird, sodass die Paare, denen der Scheitelstrahl angehört, durch diesen und die Tangenten von $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ resp. in M_1', M_2' gebildet sind. In Folge dessen berührt das Bild der Durchdringung in M_1' und M_2' die Kegelschnitte $\mathbf{L}_1$ resp. $\mathbf{L}_2$. Wenn aber S zugleich der Schnittpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten von $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ ist, sodass die nach den Berührungspunkten gehenden Doppelstrahlen der Involutionen einander entsprechen, so erhält man als Bild der Durchdringung die durch die Schnittpunkte dieser Doppelstrahlenpaare gehende Gerade (Bild eines Kegelschnittes zwischen jenen) und den $\mathbf{L}_1$ in M_1' und $\mathbf{L}_2$ in M_2' berührenden Kegelschnitt, der sie auch enthält). Am a. O. ist auch der Uebergang durch parabolische Involutionen zu projectivischen Büscheln und einem Kegelschnitt als Bild der Raumcurve dritter Ordnung aus einem ihrer Punkte bereits gegeben (S. 182). Wir kommen auf diese Construction aber im Zusammenhang mit der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten zurück, weil sie mit den Haupteigenschaften der Raumcurve vierter Ordnung erster Art identisch ist. Hier ist zu bemerken, dass die Construction der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten D_1, D_2 aus diesen und acht andern Punkten $1, 2, \ldots 8$ nicht schwieriger ist. Zwei projectivische Kegelschnittbüschel mit entsprechenden Kegelschnitten durch die fünf letzten Punkte, deren Grundpunkte resp. sind $(D_1, D_2, 1, 2)$ und $(D_1, D_2, 3, X)$, würden sie erzeugen und der Punkt X kann in analoger Weise gefunden werden wie vorher.

Für die allgemeine Curve vierter Ordnung durch vierzehn Punkte $1, 2, \ldots, 14$ hätte man dagegen den Kegelschnitten aus den vier ersten nach den neun letzten Punkten projectivisch entsprechend die Kegelschnitte durch den fünften und drei andere Grundpunkte X, Y, Z nach denselben neun letzten zu machen, um sie aus projectivischen Kegelschnittbüscheln zu erzeugen. Oder man nimmt einen der drei unbekannten Grundpunkte in das erste Büschel auf und behält die beiden andern im zweiten.

Die dual entsprechenden Constructionen sind zur Ueberlegung empfohlen.

1) Ein Büschel von Kreisen enthält immer einen Kreis von unendlich grossem Radius, der aus seiner Potenzlinie oder Radicalaxe (I, § 26,5; § (36^b)) und der unendlich fernen Geraden besteht. Man kann also die Projectivität zweier Kreisbüschel, aus der allgemein eine bicirculare Curve vierter Ordnung entsteht (II, § 25,1; § 26,11.19; § 46,2), so feststellen, dass diese unendlich grossen Kreise einander entsprechen und muss ausser der unendlich fernen Geraden eine circulare, d. h. durch die Kreispunkte gehende, Curve dritter Ordnung (II, § 26,13) oder vielmehr zwei solche Curven als Erzeugniss erhalten.

Eine solche Zuordnung wird z. B. geliefert durch die Bedingung, dass die entsprechenden Kreise von zwei Büscheln mit reellen Grundpunkten A, B und C, D diejenigen sein sollen, in denen über diesen Sehnen gleiche Peripheriewinkel stehen, da nun jene zerfallenden Kreise als dem Peripheriewinkel Null zugehörig einander zugeordnet sind, während die Beziehung nach der Congruenz der Tangentenbüschel der Kreise in A und C wirklich die der Projectivität ist. Dem gleichen und dem ungleichen Drehungssinn der Büschel von Tangenten entsprechen die besagten beiden Curven.

Aus dieser Construction der circularen Curve dritter Ordnung folgt sofort, dass die Curven die Punkte A, B, C, D selbst, dazu den Schnittpunkt der Geraden AB, CD, die Schnittpunkte der über AB und CD als Durchmessern beschriebenen Kreise und als einzigen reellen Punkt im Unendlichen die Richtung der Verbindungslinie der Mitten beider Strecken AB und CD enthalten.

Wenn aber der Punkt P so liegt, dass $\angle APB = \angle CPD$ ist, so müssen die Geraden AP und DP denselben Kegelschnitt mit den Brennpunkten B, C oder die Geraden BP, CP denselben Kegelschnitt mit den Brennpunkten A und D berühren; d. h. der Ort von P wird erhalten durch die Quadrupel der Tangentenpaare aus A und D an die Kegelschnitte von den Brennpunkten B und C, etc. Man kann auch sagen, er sei der Ort der Glanz- oder Reflexpunkte auf den Kegelschnitten von den Brennpunkten B und C für A und D als Auge und Leuchtpunkt, etc., indem man als Glanzpunkt auf einer Curve den Punkt derselben bezeichnet, dessen Tangente mit den Geraden von ihm nach A und D gleiche Winkel macht, sodass das Licht aus D nach A reflectiert wird.

Da die Tangentenpaare aus festen Punkten an confocale Kegelschnitte eine Involution bilden, weil diese eine Schaar mit gemeinsamen Tangenten der beiden absoluten Richtungen sind, so sehen wir die Curve erzeugt durch zwei Strahleninvolutionen, deren entsprechende Paare an denselben Kegelschnitt der Schaar gehen, wodurch sie einander projectivisch zugeordnet sind; und da die Verbindungsgerade ihrer Scheitel von einem Kegelschnitt der Schaar berührt wird, so gehört sie zu entsprechenden Paaren und die involutorischen Büschel haben die im Text bezeichnete Lage. Die Gegeneckenpaare der von entsprechenden Tangentenpaaren gebildeten

Vierseite, zu deren System auch die Kreispunkte gehören, gestatten sämmtlich dieselbe Erzeugung derselben Curve. Man nennt sie correspondierende Punktepaare der Curve dritter Ordnung.

2) Die Curve dritter Ordnung wird singulär, sowohl wenn die beiden gegebenen Strecken einen Endpunkt gemein haben, als auch, wenn die Endpunkte der einen auf einem Kegelschnitt liegen, der die der andern zu Brennpunkten hat.

Im ersten Fall zerfällt von den zwei Ortscurven, sagen wir für gleiche und für supplementäre Winkel, die eine in die Gerade zwischen den andern Endpunkten und das vom gemeinsamen Endpunkt aus nach den Kreispunkten gehende Linienpaar. Im andern Fall liefert die Interpretation der Glanzpunkte durch das Zusammenfallen von Auge und Leuchtpunkt die Berührungspunkte der zwei Tangenten und die Fusspunkte der vier Normalen von AD an die Kegelschnitte der confocalen Schaar B, C als dem Ort angehörig; und dass zwei dieser Kegelschnitte rechtwinklig zu einander durch den Punkt AD gehen, giebt den Doppelpunkt und seine Tangenten. Von den projectivischen Involutionen schneidet sich in ihm ein Paar entsprechender Doppelstrahlen.

3) Es giebt aber ferner für die bezeichnete Lage von P zu den Punkten AB, CD immer einen dem Vierseit $ABDC$ eingeschriebenen Kegelschnitt, für den P ein Brennpunkt ist und so wird die Curve auch der Ort der Brennpunkte der dem Vierseit $ABDC$ eingeschriebenen Kegelschnitte. Jene Gerade der Mitten von AB, CD ist daher als Mittelpunktsort dieser Kegelschnittschaar zugleich die Halbierende der Verbindungsgeraden aller correspondierenden Punktepaare der Curve.

Endlich ergiebt sich für den Brennpunkt der einzigen Parabel der Schaar in $ABDC$ als Scheitel eines Strahlbüschels die Curve als Ort der Schnittpunkte seiner Strahlen mit denjenigen Kreisen des Büschels aus den über AD und BC als Durchmessern beschriebenen Kreisen, deren Mittelpunkte auf ihnen liegen; jener Punkt ist der reelle Schnittpunkt der Tangenten der Curve in den imaginären Kreispunkten — also die Erzeugung aus projectivischen Involutionen mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl und die aus Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel für dieselbe Curve.

4) Die Construction der Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt kann aus diesem D und sechs andern ihrer Punkte geschehen, indem man den Kegelschnitten durch die Grundpunkte $D, 1, 2, 3$ nach den Punkten $4, 5, 6$ die Strahlen aus D nach $4, 5, 6$ zuordnet und neue Paare der Büschel construiert. Analog erzeugt man die Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten D_1, D_2, D_3 aus diesen und fünf andern Punkten $1, 2, 3, 4, 5$, indem man die Kegelschnitte der Büschel mit den Grundpunkten D_1, D_2, D_3 und 1 und wiederum D_1, D_2, D_3 und 2 nach den Punkten $3, 4, 5$ einander zuordnet und neue Paare nach der Projectivität

construiert. Jedes Paar liefert einen neuen Punkt der Curve. Sind zwei der Doppelpunkte die Kreispunkte, so liefert der reelle Doppelpunkt D mit zweien der fünf übrigen Punkte die Grundpunkte von zwei Kreisbüscheln, deren durch die drei letzten gehenden Kreise einander zugeordnet sind — den allgemeinen Fall der Construction in 1), in welchem die Zuordnung der unendlich grossen Kreise nicht mehr stattfindet.

5) Aus dem Zusammenfallen eines Doppelpunktes unter den Grundpunkten des einen Büschels mit einem einfachen Grundpunkt des anderen Büschels geht ein dreifacher Punkt der erzeugten Curve hervor. Den Tangentenpaaren der einzelnen Curven des Büschels im Doppelpunkt entsprechen eindeutig die Tangenten der Curven des Büschels im einfachen Grundpunkt hier; es kommt also nach § 40 dreimal vor, dass entsprechende Strahlen zusammenfallen, und diese sind die Tangenten der erzeugten Curve in diesem, also einem dreifachen Punkt. Die Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt wird somit z. B. aus einem Kegelschnittbüschel mit ihm als Grundpunkt und einer ihm projectivisch zugeordneten Strahleninvolution aus demselben Punkt erzeugt, die Doppelstrahlen der Involution schneiden die zugehörigen Kegelschnitte des Büschels in Punkten, wo diese die erzeugte Curve berühren.

Will man aber eine Curve dritter Ordnung mit dreifachem Punkt erzeugen, so müsste man diesen als Scheitel eines involutorischen Strahlbüschels — als Kegelschnittbüschel mit doppeltem Grundpunkt — und zugleich Scheitel eines ihr projectivischen einfachen Büschels nehmen und erhält anstatt der Curve die drei vereinigten Strahlen dieser Correspondenz (1, 2).

6) Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer der so erzeugten Curven erhält man als sich selbst entsprechende in den Correspondenzen (1, 2) oder (2, 2), die die erzeugenden Büschel auf dieser Geraden bestimmen; für die Curven vierter Ordnung also aus den zwei projectivischen Involutionen, in welchen die erzeugenden Kegelschnittbüschel dieselbe schneiden als die vier Punkte, in denen zwei Endpunkte entsprechender Segmente zusammenfallen; etc. So erhält man also auch die Asymptotenrichtungen der erzeugten Curven.

51. Wir wollen vor dem Uebergang zur Entwickelung für den dreidimensionalen Raum das Vorige mit den Schlussergebnissen des Abschnittes A. über die linearen Gebilde erster Stufe aus ebenen Curven (§ 36) in Verbindung setzen und ihre daraus entspringende Erweiterung zeigen.

Wir sahen dort, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht feste Punkte gehen, noch einen neunten festen Punkt enthalten. Aus diesem Satz folgt

sofort für die Kegelschnitte, welche vier feste Punkte einer solchen Curve enthalten, dass die Verbindungsgerade der zwei weiteren Punkte, in denen jeder derselben die Curve noch schneidet, nach einem festen Punkt der Curve gehen muss. Denn sind K, K^* zwei solche Kegelschnitte durch dieselben vier Punkte 1, 2, 3, 4 der Curve und l resp. l^* die Verbindungsgeraden der jeweils zwei Punkte 5, 6 und resp. 5*, 6* derselben, die sie noch enthalten, so bildet K mit l^* und ebenso K^* mit l je eine Curve dritter Ordnung durch die acht Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5*, 6* der gegebenen Curve dritter Ordnung C und alle drei — also C, Kl^*, K^*l — müssen somit durch einen und denselben neunten Punkt gehen, der nur der Punkt ll^*, der Schnitt der beiden Geraden, sein kann. Dem Büschel von Kegelschnitten durch vier ihrer Punkte 1, 2, 3, 4 wird somit durch die Curve dritter Ordnung eindeutig, d. h. wie wir nun wissen, projectivisch ein Büschel von Geraden aus einem durch jene bestimmten Punkt ll^* in ihr so zugeordnet, dass jeder Kegelschnitt sich mit der ihm entsprechenden Geraden in zwei Punkten der Curve schneidet.

Die drei degenerierten unter den Kegelschnitten des Büschels durch 1, 2, 3, 4, also die Paare von Geraden 12, 34; 23, 14; 31, 24 bestimmen den zugeordneten Scheitel ll^*; denn jedes derselben liefert als Verbindungsgerade der dritten Schnittpunkte ihrer Geraden mit der Curve einen Strahl des Büschels der l.

Diese Construction bleibt gültig für die Kegelschnitte, welche die Curve dritter Ordnung in einem festen Punkt berühren und in zwei andern festen Punkten schneiden — ein Büschel, welches nur zwei verschiedene Linienpaare enthält —, für die, welche sie in zwei festen Punkten berühren (mit nur einem Linienpaar und einer Doppellinie) oder sie in einem festen Punkt osculieren und in einem andern schneiden und endlich für die, welche sie in einem festen Punkt in dritter Ordnung oder vierpunktig berühren, mit der doppelt zählenden Tangente in diesem Punkt als degeneriertem Kegelschnitt. In Folge dessen wird in diesem letzten Fall die zugehörige Gerade l zur Tangente der Curve dritter Ordnung im einzelnen Schnittpunkt der ersten Tangente und der Scheitel des zu-

gehörigen Büschels der l ihr dritter oder Einzelschnittpunkt mit der Curve. Und daraus ist zu schliessen, dass die Verbindungsgerade dieses letzten Punktes mit dem Berührungspunkt des Kegelschnittbüschels die Curve zum dritten Mal schneide in dem sechsten Schnittpunkt desjenigen Kegelschnittes mit ihr, der in jenem Berührungspunkt fünf aufeinander folgende Punkte mit ihr gemein hat.

Sie erlaubt aber überdiess weitere Zerlegung, statt in Kegelschnitt und Gerade in drei Gerade. Sind a und b zwei Gerade, welche die Curve dritter Ordnung in Punkten A, A', A'' und resp. B, B', B'' schneiden, so ziehen wir die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte AB, $A'B'$, $A''B''$ und markieren die dritten Schnittpunkte C, C', C'' derselben mit der Curve. Auf Grund desselben Satzes aus § 36 liegen dann die drei Punkte C in einer Geraden c. Denn die drei Geraden AB, $A'B'$, $A''B''$, die Curve dritter Ordnung selbst und die ursprünglichen Geraden $AA'A''$, $BB'B''$ bilden mit der Geraden von C nach C' drei Curven dritter Ordnung durch dieselben acht Punkte $A, A', A'', B, B', B'', C, C'$ und müssen daher noch einen neunten gemeinsamen Punkt besitzen, der nur der Punkt C'' sein kann. D. h. wenn von den neun Schnittpunkten einer Curve dritter Ordnung mit drei Geraden zweimal drei in andern Geraden liegen, so sind auch die letzten drei in einer Geraden enthalten. Wenn wir durch $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ oder kürzer durch $a = 0, \ldots$ die letzten drei und durch $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$ die ersten drei Geraden ausgedrückt denken, so ist die Gleichung der Curve dritter Ordnung als lineares Gebilde erster Stufe in der Form enthalten

$$def + \lambda abc = 0.$$

Fallen die Geraden a und b in a und somit die Punktepaare AB, $A'B'$, $A''B''$ resp. in A, A', A'' zusammen, so sind d, e, f die Tangenten der Curve in diesen Punkten und ihre dritten Schnittpunkte mit der Curve liegen in einer Geraden $c = 0$, was die Curvengleichung

$$def + \lambda a^2 c = 0$$

liefert. Schnitte hierbei $a = 0$ die Curve in nur einem reellen Punkt, dessen Tangente $d = 0$ ist, während das Tangentenpaar in den beiden andern conjugiert imaginären Schnittpunkten

durch $g \mp ih = 0$ oder durch $g^2 + h^2 = 0$ ausgedrückt sein wird, so ist die entsprechende Gleichungsform der Curve

$$d(g^2 + h^2) + \lambda a^2 c = 0.$$

Geht man von der Geraden c aus, so lautet das letzte Ergebniss so: Für drei in einer Geraden liegende Punkte der Curve geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte von einer Tangente derselben aus dem ersten und einer Tangente derselben aus dem zweiten immer durch den Berührungspunkt einer Tangente der Curve aus dem dritten. Da nun von einem Punkt der Curve dritter Ordnung ausser seiner eigenen Tangente (die für zwei zählt) noch vier anderwärts berührende Tangenten an sie gehen, so entsprechen den drei Punkten in der Geraden c zwölf Berührungspunkte der zugehörigen Tangenten, die in sechszehn Geraden a enthalten sein müssen, welche sich zu je vier in jenen schneiden. Sind A_1, A_2, A_3, A_4 die Berührungspunkte jener Tangenten aus C und A_1', A_2', A_3', A_4' die der Tangenten aus C' und combiniert man zwei der ersten, z. B. A_1, A_2 mit den bestimmten Paaren A_1', A_2' und A_3', A_4' der Reihe nach, so schneiden sich die Geraden A_1A_1', A_2A_2' in einem neuen Punkt der Curve; ebenso die Geraden $A_1A_2', A_1'A_2$ in einem zweiten, die Geraden A_1A_3', A_2A_4' in einem dritten und die Geraden A_1A_4', A_2A_3' in einem vierten Punkt derselben und diese vier Punkte sind die Berührungspunkte der von C'' ausser der eigenen noch an die Curve gehenden Tangenten. Wenn man solche Punkte der Curve dritter Ordnung, deren Tangenten sich in einem ihrer Punkte schneiden, correspondierend oder conjugiert nennt (§ 50,1), so sind jede zwei der Punkte A_i und jede zwei der A_i' correspondierend; insbesondere nennt man aber A_1, A_2 und A_1', A_2' oder auch A_3', A_4' correspondierende Punkte derselben Art, weil die Gegenseitenschnittpunkte des aus zwei solchen Paaren durch Verbindung von einem Paar zum andern gebildeten Vierecks Punkte der Curve — von derselben Art — sind. Man hat also drei Arten von correspondierenden Punkten nach den drei Paaren aus der Gruppe von vieren. Zu zwei correspondierenden Punkten erhält man alle Paare conjugierter Punkte derselben Art auf ihren Verbindungsgeraden mit einem die Curve durchlaufenden Punkt. Die Scheitel der erzeugenden

Involutionen in § 44 sind solche correspondierende Punkte. (Vergl. § 50, 1.) Wenn insbesondere die Gerade c die Curve berührt, sodass C' mit C zusammenfällt, so fallen auch die A_i' mit den A_i zusammen und wir finden, dass die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, in denen die Tangenten der Curve aus einem ihrer Punkte C berühren, ein Viereck mit den Diagonalpunkten in der Curve bilden, deren Tangenten sich mit der Tangente in C'' in dem nämlichen Punkt der Curve schneiden.

Bei der Curve vierter Ordnung C_4^8 mit zwei Doppelpunkten D_1, D_2 wollen wir zuerst Gerade durch D_2 und Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt in A_1 und durch A_2 als zerfallende des Büschels anwenden. Zieht man durch D_2 eine Gerade l, welche C_4^8 in noch zwei Punkten 1, 2 schneidet und legt man durch 1, 2, D_2 und drei weitere Punkte 3, 4, 5 derselben Curve diese Curve dritter Ordnung C mit Doppelpunkt D_1, so schneidet dieselbe noch einen Punkt 6 aus der C_4^8; man lege nun durch 3, 4, 5, 6, A_2 und einen weitern Punkt 1* dieser Curve eine zweite Curve dritter Ordnung C^* mit dem Doppelpunkt D_1 und bestimme ihren neuen Schnittpunkt 2* mit der Curve vierter Ordnung, so muss derselbe in der Geraden $D_2 1^*$ oder l^* liegen. Denn die Curve C_4^8 durch D_1^2 (Doppelpunkt), D_2^2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1*, 2* muss mit den zusammengesetzten Curven vierter Ordnung Cl^*, C^*l durch $D_1^2 3456 D_2 1^*$, $D_2 12$ und resp. $D_1^2 123456 D_2$, $D_2 1^*$, mit denen sie die sieben Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1* und die Doppelpunkte, also zusammen fünfzehn Punkte gemein hat, noch einen sechszehnten gemeinsamen Punkt haben, der kein anderer sein kann als 2* in der Geraden $D_2 1^*$. Die Curve C_4^8 erzeugt also eine eindeutige Zuordnung der Geraden durch ihren einen Doppelpunkt D_2 mit Curven dritter Ordnung durch diesen und mit einem Doppelpunkt im andern D_1 so, dass jene und diese sich immer in einem Punktepaar der Curve schneiden. Wenn D_2 im F.-Punkt A_2 liegt und D_1 in A_1, so kann ein Strahlbüschel aus A_2 durch $x_3 + \lambda x_1 = 0$ und das Büschel von Curven dritter Ordnung mit singulärem Punkt A_1 durch $C + \mu C^* = 0$ ausgedrückt werden für C, C^* als Polynome dritten Grades in den x_i mit den Gliedern x_3^3, $x_2^2 x_1$, $x_2^2 x_3$, $x_3^2 x_1$, $x_3^2 x_2$, $x_1 x_2 x_3$. Wäre die durch die Construction gegebene Beziehung als Projectivität

durch die Parametergleichheit $\lambda = \mu$ ausdrückbar, so erhält man für den Ort der Paare der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Gleichung vierten Grades, die nach § 28,7 wirklich eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A_1, A_2 ausdrückt. (Vergl. § 43.) Wir gelangen zur Begründung hiervon in § 59.

Auch die bereits (§ 50) begründete Construction derselben Curvenart aus projectivischen Büscheln von Kegelschnitten, welche zwei ihrer Grundpunkte gemein haben, lässt sich durch die vorige Schlussweise ableiten. Man erhält diese Construction: Man legt durch die Doppelpunkte D_1, D_2 und zwei willkürliche Punkte 1, 2 der Curve einen Kegelschnitt, der sie noch in den Punkten 3, 4 trifft; bestimmt nun ein Kegelschnitt durch diese, die Doppelpunkte und einen Punkt 5 der Curve in dieser noch den Punkt 6, so erzeugen die Kegelschnitte der Büschel mit den Grundpunkten $D_1 D_2 12$ und resp. $D_1 D_2 56$ die Curve als Ort der Schnittpunktepaare ihrer entsprechenden Elemente.

Wir wollen den Beweis der Construction nach der Methode der darstellenden Geometrie aus der Betrachtung der Projection der Raumcurve vierter Ordnung erster Art führen und überhaupt zunächst durch sie unsere Entwickelungen über die Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Eins zum Abschluss bringen.

1) Für $a = 0$ mit $b = 0$ vereinigt als die unendlich ferne Gerade — in Cartesischen Coordinaten also $0 \cdot x + 0 \cdot y + a_1 = 0$ — sind die Geraden $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$ oder $d = 0$, $g \pm ih = 0$ die Asymptoten der Curve und wir finden, dass die drei Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung mit ihren Asymptoten in einer Geraden liegen. Die Gleichungen sind

$$def + \lambda c = 0 \quad \text{resp.} \quad d(g^2 + h^2) + \lambda c = 0,$$

je nachdem die Curve drei reelle oder einen reellen und zwei conjugiert imaginäre unendlich ferne Punkte hat.

2) Ist $a = 0$ die Verbindungslinie von zwei Inflexionspunkten, so fällt nicht nur $b = 0$ sondern auch $c = 0$ damit zusammen, weil die dritten Schnittpunkte der Inflexionstangenten in die zugehörigen Inflexionspunkte selbst fallen; der dritte Punkt der Curve in der Geraden durch zwei Inflexionspunkte ist daher auch ein Inflexionspunkt. Die bezügliche Gleichung lautet

$$def + \lambda a^3 = 0.$$

3) Zwei projectivische Büschel von Kreisen, die einen Grundpunkt im Endlichen gemein haben, erzeugen, wenn ihre unendlich grossen Kreise einander nicht entsprechen, eine Curve vierter Ordnung, die jenen Grundpunkt zum reellen Doppelpunkt und die Kreispunkte im Unendlichen zu imaginären Doppelpunkten hat.

Und wenn ihre unendlich grossen Kreise sich entsprechen? oder überdiess ihre Radicalaxen in eine Gerade fallen?

4) Ein Büschel von Kegelschnitten und eine zu ihm projectivische Involution im Strahlbüschel erzeugen durch den Schnitt entsprechender Elemente eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt im Scheitel der Involution.

Fällt der Scheitel der Involution mit einem Grundpunkt des Kegelschnittbüschels zusammen, so wird er zum dreifachen Punkt in der erzeugten Curve.

5) Bei projectivischen Beziehungen von Gebilden zweiter Ordnung mit solchen zweiter oder erster Classe tritt an Stelle der Identität von Grundelementen die Incidenz von solchen; z. B. dass von den Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels einer oder zwei in der Geraden einer zu demselben projectivischen Punktreihe liegen. Welche Folgen hat diess für das erzeugte Gebilde?

52. Wir denken ein Büschel von Flächen $\mathbf{F}$ zweiter Ordnung mit reeller und allgemeiner Grundcurve, in demselben die durch ein willkürlich im Raum gewähltes Projectionscentrum C gehende Fläche $\mathbf{F}_c$ und die beiden durch C gehenden Geraden in derselben, die projicierenden Bisekanten d_1 und d_2 der Grundcurve, deren Durchstosspunkte D_1, D_2 in der Bildebene die Doppelpunkte ihrer Projection sind. Sei g eine Gerade in der Regelschaar von $\mathbf{F}_c$, zu welcher d_1 gehört und die als d_2 schneidend sich als Strahl des Büschels um D_2 projiciert; durch sie und vier feste Punkte der Grundcurve geht ein lineares Gebilde zweiter Stufe von einfachen Hyperboloiden, welche die Fläche $\mathbf{F}_c$ in einem solchen Gebilde von Curven dritter Ordnung durchschneiden; unter diesen enthält eine die beiden Punkte, welche die Bisekante g mit der Grundcurve gemein hat und dieselbe muss auch d_1 in zwei Punkten treffen, weil es zur nämlichen Regelschaar mit g gehört; eben deshalb (§ 43) trifft sie d_2 nur in einem Punkt. Lassen wir g die Regelschaar des projicierenden Hyperboloids $\mathbf{F}_c$ durchlaufen, so ändert sich unter Festhaltung der vier Punkte der Grundcurve die Curve dritter Ordnung so, dass sie immer d_1 zweifach und d_2 einfach schneidet und ihre beiden Schnittpunkte mit der Grundcurve in g, d. h. auf einer d_2 schneidenden

Geraden liegen. Für die Projection aus C haben wir zum Bild der Grundcurve $\mathfrak{C}'$ mit den Doppelpunkten D_1, D_2 ein Büschel von singulären Curven dritter Ordnung durch D_2 und vier feste Punkte in $\mathfrak{C}'$ mit D_1 als Doppelpunkt, und ein Strahlbüschel aus D_2 als Projection der Regelschaar g, dessen Strahlen sich im Bild der Grundcurve mit den Bildern der durch sie zu jenen projectivisch zugeordneten Raumcurven dritter Ordnung, den singulären Curven dritter Ordnung begegnen. Nennen wir die vier festen Punkte der Grundcurve 3, 4, 5, 6 und ihre Schnittpunkte mit g als 1, 2, so sind wir mit der Bezeichnung in § 51 in Uebereinstimmung.

Wäre das Centrum C ein Punkt der Grundcurve, sodass ihr Bild eine allgemeine Curve dritter Ordnung wird, so kann man, weil nun alle Flächen $\mathfrak{F}$ des Büschels durch dasselbe gehen, eine der Flächen $\mathfrak{F}$ auswählen; wir wählen sie so, dass die eine ihrer projicierenden Erzeugenden d_1 die Tangente der Grundcurve in C ist, sodass d_2 dieselbe in einem andern Punkt trifft. Sei nun g eine Erzeugende dieser Fläche zweiten Grades, die mit d_1 zur nämlichen Schaar gehört und somit d_2 schneidet, so legen wir durch ihre beiden Schnittpunkte mit der Grundcurve, durch drei beliebige feste Punkte derselben und die Gerade d_1 ein Büschel von einfachen Hyperboloiden; diese Flächen schneiden unsere Fläche $\mathfrak{F}$ ausser in g in einem Büschel von Curven dritter Ordnung durch die drei festen 2, 3, 4 und die Punkte 5, 6 der Grundcurve in g, von denen eine durch das Centrum C geht. Diese wird von C aus als Kegelschnitt K' durch die Bilder von 2, 3, 4 und den Durchstosspunkt D_1 projiciert, und K' wird in den Bildern von 5, 6 durch den Strahl des Büschels um D_2 geschnitten, der das Bild von g ist. Lässt man die Gerade g ihre Regelschaar in der Fläche $\mathfrak{F}$ durchlaufen, so beschreibt das Bild der Raumcurve dritter Ordnung die sämmtlichen Kegelschnitte des Büschels durch D_1 und die Bilder der Punkte 2, 3, 4, während das Bild von g gleichzeitig das Strahlbüschel aus dem Durchstosspunkt D_2 von d_2 durchläuft. Die eindeutige und also nach § 39 projectivische Zuordnung der Strahlen g der Regelschaar und der projicierenden Raumcurven dritter Ordnung wird durch die Grundcurve des Flächenbüschels $\mathfrak{F}$ vollzogen; die Erzeugung der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung aus Kegelschnitt-

büschel und Strahlbüschel in projectivischer Zuordnung ist also bewiesen und sie ist auf unendlich viele Arten möglich. Offenbar kann man die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels in der Bildcurve dritter Ordnung willkürlich wählen, dann muss der Scheitel D_2 des Strahlbüschels sich als bestimmt erweisen — wie wir diess in § 51 bereits gesehen haben; ebenso aber könnte man ihn und drei der Grundpunkte des Büschels von Kegelschnitten willkürlich wählen und daraus den vierten Grundpunkt des letzteren ermitteln.

In der vorhergehenden Betrachtung ist die Zuordnung der Strahlen g auf $\mathbf{F}_c$ und der Raumcurven dritter Ordnung in ihr, die nun aber nicht projicierend sind, ebenso eindeutig durch die Grundcurve vollzogen und damit auch die der Geraden des Büschels aus D_2 und der ebenen Curven dritter Ordnung durch D_2 mit Doppelpunkt in D_1 und durch vier feste Punkte des Bildes der Grundcurve; aber die Frage bleibt übrig, ob damit diese Zuordnung auch projectivisch sei.

Für Kegelschnittbüschel und für Strahlbüschel ist diess gezeigt, für Curven dritter Ordnung bleibt der algebraische Beweis noch zu führen. (Vergl. § 59.)

Wir kommen damit zur Erzeugung der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten aus zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln d. i. zur Construction vom Schluss des vorigen Paragraphen.

Dazu denken wir neben der projicierenden Fläche $\mathbf{F}_c$ des Büschels mit den projicierenden Geraden d_1 und d_2 eine beliebige andere Fläche $\mathbf{F}$ desselben, die wir construiert denken als Ort der sämmtlichen Bisekanten der Curve, die eine feste Bisekante derselben schneiden, oder die durch die neuen Schnittpunkte der Curve mit den Ebenen des Büschels bestimmt werden, welches diese zur Scheitelkante hat. Die Ebenen dieses Büschels schneiden die Fläche $\mathbf{F}_c$ in Kegelschnitten, welche d_1, d_2 treffen und mit C verbunden die Kegel zweiten Grades eines Büschels liefern, weil sie alle durch d_1, d_2 und die projicierenden Strahlen der Punkte der Grundcurve in der festen Bisekante gehen; gleichzeitig durchläuft die bewegliche Bisekante die Regelschaar der Fläche $\mathbf{F}$ und liefert durch Verbindung mit dem Centrum die projicierenden Tangentialebenen derselben oder ihren Umrisskegel; der zugehörige Berührungskegelschnitt trifft die

Grundcurve des Büschels der $\mathbf{F}$ in vier Punkten (vergl. II, § 46), die sich von C aus als Berührungspunkte seiner Projection oder der Spur des Kegels mit dem Bild derselben projicieren. Man hat gezeigt, dass die durch die Doppelpunkte und zwei feste Punkte des Curvenbildes gehenden Kegelschnitte dasselbe in zwei weiteren Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden einen Kegelschnitt des Umrisssystems umhüllen.

Dieselben Tangentialebenen des Umrisskegels von $\mathbf{F}$ aus C enthalten aber die Erzeugenden der zweiten Schaar des Hyperboloids $\mathbf{F}$ und irgend eine derselben schneidet die Grundcurve in zwei Punkten, deren projicierende Strahlen mit d_1 und d_2 zusammen die Grundlinien eines zweiten Büschels von Kegeln zweiten Grades bilden, das mit demselben System der Berührungsebenen von $\mathbf{F}$ den projicierenden Kegel der Curve aus C erzeugt. In Folge dessen erzeugen dieselbe auch die beiden Büschel von Kegeln selbst durch die von den Umrissebenen zwischen ihnen hervorgebrachte projectivische Zuordnung und wir erhalten die Erzeugung der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten aus zwei projectivischen Büscheln von Kegelschnitten, welche die Doppelpunkte zu gemeinsamen Grundpunkten haben; und dazu die constructive Durchführung dieser Erzeugung für eine gegebene Curve dieser Art in der Weise des § 50.

Für C als einen Nabelpunkt in einer der Flächen des Büschels $\mathbf{F}$ wird das Bild der Grundcurve zur bicircularen Curve vierter Ordnung und die betrachtete Erzeugung zur Construction projectivischer Kreisbüschel. Durch zwei Punkte der Curve legt man einen Kreis, welcher die Curve in zwei neuen Punkten schneidet; durch diese und einen weiteren Punkt der Curve einen neuen Kreis, unter Bestimmung seines vierten Schnittpunktes mit der Curve; dann schneidet jeder Kreis des Büschels durch die zwei ersten Punkte die Curve in zwei Punkten, die auch auf einem Kreis des Büschels durch die zwei letzten Punkte liegen und diese Paare von Kreisen sind entsprechend nach dem Gesetz der Projectivität.

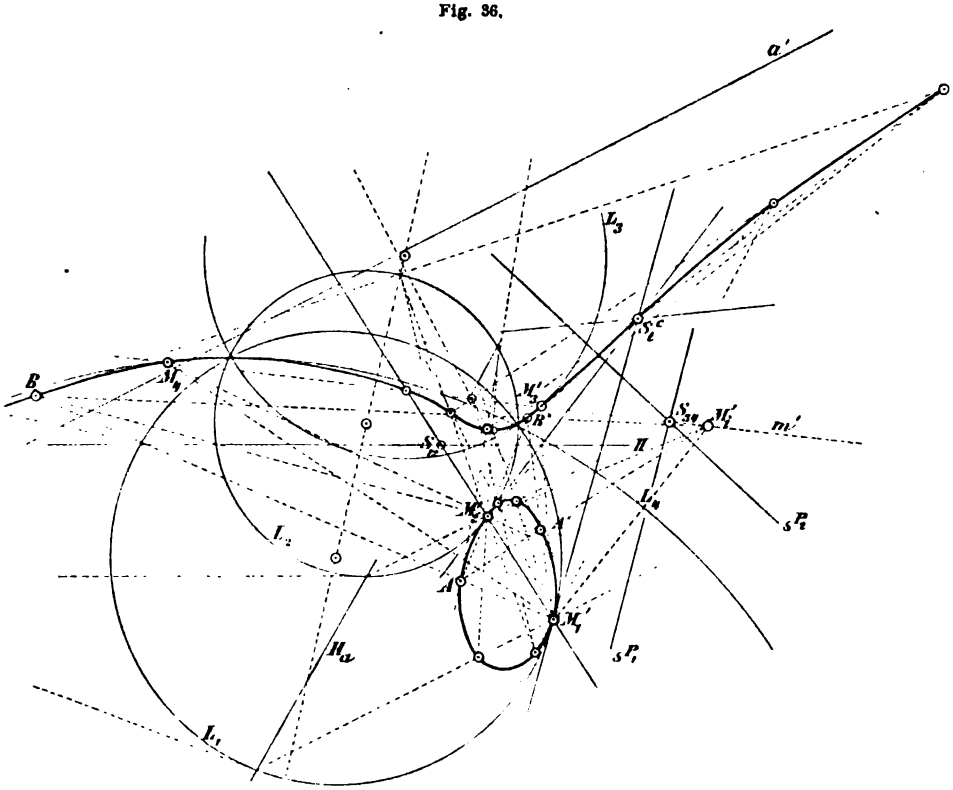
Nachdem wir so die Erzeugungen unserer Curven dritter und vierter Ordnung aus projectivischen Curvenbüscheln aus dem Flächenbüschel der Grundcurve abgeleitet haben, erübrigt der Nachweis, dass auch die Constructionen aus projectivischen

Involutionen derselben Quelle entspringen. Dazu gehen wir zurück auf die Construction der Curve als Bild der Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades, bei welcher offenbar durch die Ebenen des Büschels aus der Verbindungslinie der Spitzen die Erzeugenden des einen und des andern Kegels in einfach unendlich viele einander entsprechende Paare geordnet werden, die sich jeweilen in den betreffenden vier Punkten der Durchdringungscurve schneiden. Wir wissen nun schon, dass die Paare auf jedem der Kegel eine Involution zweiten Grades bilden und dass durch die Hülfsebenen der Construction die Paare beider Involutionen einander auf die einfachste Weise projectivisch zugeordnet werden; die vier doppelt projicierenden Kegel der Grundcurve bilden also eine Gruppe von vier Flächen ihres Büschels, deren Erzeugende durch diese Curve in projectivische Involutionen geordnet werden. Wir werden zeigen, dass die doppelt projicierenden Kegel nur eine ausgezeichnete Gruppe unter allen Flächen des Büschels bilden; dass, wie diese alle, nur in verallgemeinertem Sinn, doppelt projicierend sind, weil ihre geraden Erzeugenden sämmtlich Bisekanten der Curve sind, so auch alle sich in Gruppen zu vier in der Art ordnen, dass die Curve die Regelschaaren der einen und die Regelschaaren jeder der drei andern in der analogen Weise involutorisch paart und projectivisch zuordnet. Indem wir diese Ordnung der einfach unendlich vielen Flächen des Büschels in Gruppen zu vier als eine Involution vierten Grades in ihrem System auffassen, entspringt die Erwartung, dass es sechsmal (§ 42,5) vorkommen werde, dass zwei Flächen einer Gruppe in eine Fläche zusammenfallen, sodass die Grundcurve erzeugt wird durch die projectivische Zuordnung einer Involution der einen und einer Involution der andern Regelschaar in dieser nämlichen Fläche. Wir vollziehen die Entwickelung dieser wichtigen Ergebnisse in genauem Verfolg der darstellend geometrischen Construction der Durchdringung von zwei Flächen zweiten Grades und eröffnen mit einer wiederholten Betrachtung der Construction aus zweien der vier Kegel zweiten Grades, die im Flächenbüschel vorkommen in dem Fall, wo das Centrum auf der Grundcurve liegt oder ihr Bild die allgemeine Curve dritter Ordnung ist.

53. Wenn wir zwei der vier Kegel von den Mittelpunkten

M_1, M_2 und den Spurkegelschnitten L_1, L_2 in der Bildebene gegeben denken, so hat die Annahme der letzteren als Kreise, wie in der Fig. 36, nur die Besonderheit zur Folge, dass das Bild der Curve die Kreispunkte der Bildebene enthält oder circular ist. Wählen wir das Projectionscentrum in der Curve, also die Bilder M_1' und M_2' der Kegelmittelpunkte auf den

Fig. 36.



gleichnamigen Leitcurven, so erhalten wir eine circulare Curve dritter Ordnung, eine Curve also, die nur eine reelle Asymptote hat und die als Vertreter aller andern zweitheiligen oder Durchdringungscurvenbilder dritter Ordnung (gegenüber den Eindringungs- oder eintheiligen Curven, II, §§ 18, 26) angesehen werden kann.

Jede Gerade durch den im Innern beider Leitcurven ge-

wählten Durchstosspunkt S_{12} der Verbindungslinie der Spitzen $M_1 M_2$ ist Spur einer Hülfsebene $\mathbf{H}_i$ und liefert durch die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte in $\mathbf{L}_1$ mit M_1' in den Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte in $\mathbf{L}_2$ mit M_2' vier Punkte A_i', B_i', $A_i^{*\prime}$, $B_i^{*\prime}$ des Bildes der Durchdringung, deren Tangenten nach den Durchschnittspunkten der zugehörigen Paare der Leitcurventangenten gehen. Das Spurenbüschel der $\mathbf{H}_i$ ist das gemeinsame Sehnenbüschel der Bilder derjenigen Involutionen der Mantellinien beider Kegel in den Spurkreisen als Hülfskegelschnitten, welche durch ihre zusammengehörigen Paare die Punkte der Durchdringung in Gruppen von je vier hervorbringen (II, § 26, etc.); die Hülfsebene $\mathbf{H}_i$ schneidet den ersten Kegel in Erzeugenden l_{1i}, l_{1i}^*, den zweiten in l_{2i}, l_{2i}^* und ihre Schnitte $l_1 l_2$, $l_1^* l_2^*$, $l_1 l_2^*$, $l_1^* l_2$ sind Punkte A_i, A_i^*, B_i, B_i^* resp. der Durchdringung.

Verbindet man S mit dem Mittelpunkt von $\mathbf{L}_2$ und schneidet diese Gerade mit den Parallelen aus M_1' zu dem nach demselben Mittelpunkt gehenden Strahl aus M_2', so hat man den Mittelpunkt des durch M_1' gehenden Kreises $\mathbf{L}_2^*$, nach dessen zweitem Schnittpunkt mit $\mathbf{L}_1$ die Spur der Hülfsebene $\mathbf{H}_a$ geht, unter deren vier Curvenpunkten der reelle unendlich ferne Punkt ist und aus der man also mittelst ihres Durchstosspunktes die reelle Asymptote a' des Curvenbildes erhält.

Das Bild der Durchdringung zeigt sich als aus einem ins Unendliche verlaufenden Zweige mit dieser Asymptote und einem Oval bestehend, das in M_1' die Leitcurve $\mathbf{L}_1$ und in M_2' die Leitcurve $\mathbf{L}_2$ berührt. Aus der Geschlossenheit des Ovals folgt sofort, dass keine Tangente der Curve das Oval schneiden kann, also auch, dass das Oval keine Inflexionen enthält; in Folge dessen sind für alle Punkte des Ovals die von ihnen an die Curve gehenden anderwärts berührenden Tangenten imaginär, während sie für die Punkte des unendlichen Astes reell sind, und von jedem seiner Punkte zwei Tangenten an das Oval und zwei an ihn selbst gehen; denn jede Tangente des unendlichen Astes muss denselben noch in einem Punkte schneiden.

Nach der Lehre von den Polgeraden und Polarebenen der Kegel zweiten Grades ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $A_i A_i^*$; $B_i B_i^*$ beider Paare aus der Hülfsebene $\mathbf{H}_i$ ein

Punkt in der Polgeraden von $M_1 M_2$ in Bezug auf beide Kegel oder in der Schnittlinie der Polarebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ der Spitzen M_1, M_2 resp. in Bezug auf die Kegel $M_2 \mathfrak{L}_2$ und $M_1 \mathfrak{L}_1$, in welcher (II, § 25) die Spitzen M_3, M_4 der beiden andern zur Durchdringungscurve gehörenden doppeltprojicierenden Kegel liegen, als das gemeinsame Paar ihrer Polinvolutionen, in beiden Kegeln. Das Bild dieser Geraden m' ist also auch der Ort des dritten Diagonalpunktes M_i' — ausser den beiden festen M_1' und M_2' — des von den vier Punkten des Durchdringungsbildes aus einer Hülfsebene gebildeten Vierecks; die vierstrahligen Büschel $M_1' AB$, $M_1' A^* B^*$; $M_1' M_2' S$, $M_1' M'$ und $M_2' AB^*$, $M_2' A^* B$; $M_1' M_2' S$, $M_2' M'$ (mit Weglassung der Indices i) sind harmonische Büschel. Darin liegt die Zuordnung der Paare der Involutionen ohne weitere Benutzung der Leitcurven.

Wenn wir sodann nach II, § 25 die Gerade d' der scheinbaren Doppelpunkte des Curvenbildes suchen, so finden wir als die Polarebenen des Projectionscentrums in beiden Kegeln die projicierenden Ebenen, welche dieselben längs ihrer projicierenden Mantellinien berühren, deren Spuren also die Tangenten von $\mathfrak{L}_1$ im Spitzenbild M_1' und von $\mathfrak{L}_2$ in M_2' sind; ihre Schnittlinie t' ist also die projicierende Tangente der Durchdringung und erscheint als der Schnittpunkt S_t^c jener Tangenten; dieser Punkt gehört dem Bilde der Durchdringung an als Bild des zum Centrum benachbarten Punktes auf ihr. Nach § 51 sind daher M_1', M_2' conjugierte Punkte der Curve dritter Ordnung und so auch die Paare $A_i A_i^*$, $B_i B_i^*$ jeder Gruppe aus derselben Hilfsebene.

Wir wissen aber, dass jede Tangente unserer Durchdringungscurve vier andere Tangenten derselben — ausser den benachbarten — schneidet, nämlich in den Punkten, wo sie die Ebenen des von den vier Kegelmittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 gebildeten Tetraeders trifft; für die projicierende Tangente sind diese selbst projicierend und haben die Bilder der vier in jenen Punkten geschnittenen Tangenten zu ihren Spuren. Somit gehen von dem Punkt S_t^c der Curve dritter Ordnung vier anderwärts berührende Tangenten an dieselbe, von denen wir die zwei des Ovals als die mit den Berührungspunkten M_1', M_2' schon kennen; damit erkennen wir aber, dass die beiden an-

dern die Berührungspunkte in den Bildern der Mittelpunkte der beiden andern doppeltprojicierenden Kegel M_3' und M_4' auf dem unendlichen Ast des Curvenbildes haben müssen; und durch Verbindung mit dem Vorigen, dass dieselben zwei von den Durchschnittspunkten der Geraden m' mit demselben sind. Offenbar sind auch M_3', M_4' conjugierte Punkte der Curve im Sinn von § 51.

Endlich werden die Kegelschnitte, welche die Spuren $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ der doppeltprojicierenden Kegel der Durchdringung aus M_3, M_4 sein müssen, das Curvenbild in M_3', M_4' resp. berühren, während sie zugleich dem durch die gegebenen Leitcurven $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ bestimmten Büschel angehören; man sieht, dass in den Spuren der doppeltprojicierenden Kegel die vier Kegelschnitte des Büschels hervorgetreten sind, welche von dem Curvenbild und von den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels aus S_t^c berührt werden. Jeder Kegelschnitt dieses Büschels schneidet das Curvenbild in weiteren zwei Punkten, deren Verbindungsgerade der entsprechende Strahl des Büschels aus S_t^c ist.

Wir wissen nun, dass jedes Paar conjugierter Punkte unseres Curvenbildes die Scheitel von zwei involutorischen Strahlbüscheln sind, welche dasselbe sowie die hier betrachteten erzeugen; zu jedem solchen Paar gehört eine Gerade wie m', die die Verbindungslinie des zweiten Paares conjugierter Punkte ist, dessen Tangenten sich mit denen des ersten in demselben Punkt der Curve schneiden. Der gemeinsame Strahl der beiden involutorischen Büschel wird durch die Tangenten der Curve in den Scheiteln zu zwei entsprechenden Paaren der Involutionen ergänzt; sein Schnittpunkt mit der zugehörigen Geraden m' gehört zur Curve als dritter Schnittpunkt beider Geraden mit ihr. Räumlich aufgefasst sagt dies nichts anderes aus, als dass die Transversale aus einem Punkt der Grundcurve des Flächenbüschels zu zwei Gegenkanten seines gemeinsamen Quadrupels die Curve noch ein zweites Mal schneidet; denn der Schnitt der Geraden $M_1'M_2'$ und $M_3'M_4'$ ist das Bild der projicierenden Transversale und diese muss die Curve also ausser dem Centrum nochmals schneiden, in einem Punkt, den eben jener Punkt abbildet. Dieselbe Ueberlegung zeigt, dass auch die Schnittpunkte der Geraden $M_1'M_3'$, $M_2'M_4'$ und $M_1'M_4'$, $M_2'M_3'$ Punkte der Curve sind, was wir auch bereits

als Eigenschaften der conjugierten Punkte der Curve dritter Ordnung kennen.

Nach dem Princip der Dualität entspringen aus den gewonnenen Ergebnissen andere, die sich auf die allgemeine Curve dritter Classe beziehen und in derselben Analogie zu der Erzeugung der Kegelschnitte aus projectivischen Reihen stehen, wie die vorigen zu derjenigen aus projectivischen Büscheln. Zwei involutorische Reihen in verschiedenen Geraden m_1', m_2', deren Paare einander projectivisch entsprechen und bei welchen der gemeinsame Punkt zu entsprechenden Paaren gehört, liefern durch die Quadrupel a, a^*, b, b^* der Verbindungsgeraden entsprechender Paare die Tangenten einer Curve dritter Classe, welche die Träger der Involutionen in den Punkten berührt, die mit dem gemeinsamen Punkt zu denselben Paaren gehören; die Verbindungsgerade dieser Berührungspunkte conjugierter Tangenten, wie man sagt, ist selbst eine Tangente s dieser Curve. Das Entsprechen der involutorischen Paare kann durch einen festen Punkt M' vermittelt werden, welcher die Enveloppe der dritten Diagonalen $(a\,a^*, b\,b^*)$ jener Tangentenvierseite aus entsprechenden Paaren ist. Diese Gerade bestimmt in ihren Schnitten mit m_1' und m_2' resp. die Punkte, welche mit dem gemeinsamen Punkt der involutorischen Reihen gleichzeitig harmonisch conjugiert sind zu den zwei zugehörigen entsprechenden Paaren der Involutionen. In der Verbindungslinie s der Berührungspunkte von m_1', m_2' liegen ausser ihrem Berührungspunkt mit der Curve dritter Classe noch vier Schnittpunkte mit derselben, von denen zwei jene Berührungspunkte selbst sind, während die zwei andern zu zweien der Tangente der Curve aus M' gehören, deren dritte die Verbindungslinie derselben mit dem gemeinsamen Punkt der Reihen m_1', m_2' ist.

Es ist nicht schwierig, die Raumanschauung und die darstellend geometrische Construction zu entwickeln, die zu diesen Resultaten direct hinführt.

Dass man aus jedem Paar conjugierter Tangenten durch den Schnitt mit einer beliebigen Tangente der Curve ein neues Paar conjugierter Tangenten derselben erhalten und aus diesen die Curve auf gleiche Weise erzeugen kann, ergiebt sich ebenso. Wir haben dabei gesehen, dass die allgemeine Curve

dritter Classe von der sechsten Ordnung ist, weil eine jede ihrer Tangenten ausser dem für zwei Schnittpunkte zählenden Berührungspunkt noch vier andere Punkte mit der Curve gemein hat.

Wir wissen aus den Eigenschaften des Flächenbüschels, dass das vierstrahlige Büschel der Tangenten SM_1', SM_2', SM_3', SM_4' der Curve dritter Ordnung aus ihrem Punkt S das constante Doppelverhältniss des Ebenenbüschels hat, welches die projicierende Tangente der Grundcurve mit den vier Punkten des gemeinsamen Quadrupels verbindet; und wir sehen damit die dual entsprechende Anschauung bezeichnet, welcher das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte einer Tangente der Curve dritter Classe mit ihr ausdrückt. Aber wir kommen hierauf wieder bei späterem Anlass.

Wir gehen zur Construction der Durchdringungscurve zurück. Wenn das Hülfsebenenbüschel zwei Grenzlagen zeigt (II, § 18, etc.), deren Spuren Tangenten der nämlichen unter den beiden Leitcurven L_1 und L_2 sind, während sie die andere schneiden, so bleibt, wie die Curve selbst Durchdringung, ihr Bild im Wesentlichen die gleiche zweitheilige Curve; nur dass z. B. M_1' dem unendlichen Ast und M_2' dem Oval der Curve angehört und m' das Oval zweimal und den unendlichen Ast einmal schneidet, sodass der eine jener Schnittpunkte sein zweiter Durchschnitt mit der Geraden $M_1'M_2'$ und der andere sowie der im unendlichen Ast Berührungspunkte von Tangenten aus dem Fusspunkte D der projicierenden Tangente sind. Von den erzeugenden Involutionen, die vorher beide elliptisch waren, ist nun die eine oder es sind beide hyperbolisch; den in den Grenzlagen der Hülfsebenen liegenden Doppelstrahlen der einen entsprechen die Strahlenpaare der andern, die das Erzeugniss berühren — desshalb muss der zugehörige Scheitel dem unendlichen Ast angehören. Die anderen liefern uns wenigstens die zwei reellen Geraden, die die imaginären Berührungspunkte der Tangenten aus dem Scheitel im Oval verbinden.

Wenn aber zwischen den Flächen des Büschels und so zwischen den Kegeln M_1L_1 und M_2L_2 nicht Durchdringung sondern Eindringung stattfindet, so ist der Durchstosspunkt S der Verbindungslinie der Mittelpunkte M_1M_2 Durchschnitts-

punkt einer L_1 schneidenden Tangente von L_2 mit einer L_2 schneidenden Tangente von L_1, nämlich den Spuren der Grenzlagen der Hülfsebenen; diese Grenzlagen liefern je zwei Punkte des Curvenbildes mit den Bildern der zugehörigen Mantellinien des geschnittenen Kegels als Tangenten. Jede andere Hülfsebene liefert vier Punkte des Curvenbildes, die durch den dritten Diagonalpunkt ihres Vierecks je einen Punkt der Geraden m' geben, die das Bild der Durchschnittslinie der Polarebenen P_1, P_2 der Spitzen M_1, M_2 resp. in den Kegeln M_2L_2 und M_1L_1 ist; von derselben aus könnte wie früher die Zuordnung der Paare der beiden involutorischen Strahlbüschel, welche das Curvenbild erzeugen, durch harmonische Theilung geschehen, wenn wir sie nicht durch die Geraden aus dem Punkt S bewirkten — natürlich dann mittelst eines einzigen die Punkte M_1', M_2' enthaltenden Hülfskegelschnittes. Nun ist aber nicht mehr ein Oval des Curvenbildes von einem unendlichen Ast desselben getrennt, sondern die Curve ist eintheilig; die circulare Curve dritter Ordnung speciell verläuft in einem stetigen Zug mit einer wie vorher zu bestimmenden Asymptote a'. Von dem Durchschnittspunkt S_t^c der Tangenten in M_1' und M_2', dem Fusspunkt der projicierenden Tangente oder Bild des dem Centrum benachbarten Punktes der Durchdringung gehen nicht mehr zwei andere reelle sondern zwei conjugiert imaginäre Tangenten an das Curvenbild, die es in den conjugiert imaginären Schnittpunkten mit m' berühren, denn diese Gerade trifft nur in ihrem Schnittpunkt mit $M_1'M_2'$ dasselbe reell.

Aber jede aus M_1', M_2' so abgeleitete Gruppe von zweimal zwei conjugierten Punkten AA^*, BB^* liefert durch die Schnitte ihrer Tangenten noch immer zwei Punkte der Curve, welche mit dem Tangentenschnitt S_t^c von M_1', M_2' in gerader Linie liegen, wie diess auch bei der Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt der Fall ist, von der wir noch zu sprechen haben.

Dieselbe bildet, wie wir wissen, den Uebergang von den zweitheiligen zu den eintheiligen Curven dritter Ordnung. Sie wird als Bild der Kegeldurchdringung erhalten, wenn die Spurkegelschnitte eine den Durchstosspunkt S der Verbindungslinie der Spitzen enthaltende gemeinsame

Tangente besitzen; denn diese liefert als Spur einer Hülfsebene durch die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte an L_1 und L_2 mit M_1' und M_2' resp. das Bild des Doppelpunktes der Durchdringung und den Doppelpunkt ihres Bildes. Weil diese Verbindungslinien zugleich die Doppelstrahlen der erzeugenden projectivischen Involutionen sind, so sieht man, dass das Auftreten eines Doppelpunktes an das Entsprechen eines Paares der Doppelstrahlen der erzeugenden Involutionen geknüpft ist; und man sieht leicht, dass durch Zuordnung auch des zweiten Paares der Doppelstrahlen die Curve dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten d. h. die aus Kegelschnitt und Gerade zusammengesetzte Curve hervorgebracht werden wird.

Im Fall der Curve mit einem Doppelpunkt gehen von M_1', sowohl wie von M_2' zwei reelle eigentliche Tangenten an die Curve, indess die je zwei übrigen in die nach dem Doppelpunkt gehende Gerade fallen.

Jede andere Hülfsebene liefert wie im allgemeinen Fall vier Punkte des Durchdringungsbildes in zwei conjugierten Paaren A', $A^{*\prime}$; B', $B^{*\prime}$, deren Tangenten sich auf der Curve schneiden, wie die von M_1' und M_2' in S_t^c; für die berührende sind dieselben alle im Doppelpunkt des Bildes vereinigt, und jede durch ihn gehende Gerade ist eine (uneigentliche) Tangente derselben.

Die Gerade m' ergiebt sich ebenso wie früher als der Ort der dritten Diagonalpunkte $A'A^{*\prime}$, $B'B^{*\prime}$ dieser Vierecke und trifft die Curve ausser dem Schnittpunkt mit $M_1'M_2'$ in ihrem Doppelpunkt, der für sich allein ein solches Viereck repräsentiert, sodass der fragliche Diagonalpunkt mit ihm zusammenfällt. Er ist daher auch die Vereinigung der Bilder der beiden neuen Kegelmittelpunkte M_3' und M_4'. (II, § 25, p. 155.) Die Gerade von S_t^c nach ihm vertritt zwei der von hier noch an die Curve gehenden Tangenten, und da dieselben als uneigentliche Tangenten ausser Betracht fallen, so erkennt man die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt als von der Classe vier.

Wenn endlich durch die Durchdringungscurve des Büschels keine reellen Kegel gehen, sodass von dem gemeinsamen Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen desselben nur zwei Gegenkanten reell sind, so führt uns eine Betrachtungs-

weise, die eben von diesen ausgeht, zu der Einsicht von der wesentlichen Fortdauer der vorigen Ergebnisse und von der Art und Weise ihrer Gültigkeit für die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, die Bilder der Durchdringung aus beliebigen, nicht auf ihr selbst gelegenen Punkten des Raumes. Unter den Beispielen lenken wir auch die Aufmerksamkeit auf eine Reihe von Dispositionen.

1) Man erläutere den Unterschied bei Curven dritter Classe, der dem von zweitheiligen und eintheiligen Curven dritter Ordnung entspricht, und die Natur der Uebergangsform zwischen denselben von der Natur der projectivischen Involutionen aus.

2) Die zweitheilige und die eintheilige nicht singuläre Curve sind die beiden Hauptarten der Curven dritter Ordnung; die Curven mit isoliertem Doppelpunkt, die mit Knoten und diejenige mit Rückkehrpunkt bilden die übrigen. Durch centrische Collineation mit verschiedenen Lagen der Gegenaxe des Systems der gegebenen Curve leitet man aus ihnen die möglichen verschiedenen Formen der Curven dritter Ordnung ab; bei der zweitheiligen Curve kann die Gerade r das Oval entweder schneiden oder berühren und nicht treffen und im letztern Fall den unendlichen Ast entweder einmal oder dreimal reell schneiden, hierunter auch berühren; von den Schnittpunkten kann einer ein Inflexionspunkt sein oder alle drei. Alle diese Formen sind durch Dispositionen der Kegeldurchdringung herstellbar.

3) Man zeichne folgende Fälle: a) $\mathbf{L}_1$ als Kreis und $\mathbf{L}_2$ als Hyperbel, jenen und $\mathbf{L}_{1\infty}$ viermal schneidend, die Gerade $M_1'M_2'$ als gemeinschaftlichen Durchmesser, ihren Durchstosspunkt ausserhalb $\mathbf{L}_1$ aber innerhalb $\mathbf{L}_2$; drei Aeste, Serpentine und hyperbolisches Paar. Aus der zweitheiligen Curve durch eine das Oval schneidende Gegenaxe r entstehend.

b) $\mathbf{L}_1$ als Kreis, $\mathbf{L}_2$ als ihn und $\mathbf{L}_{1\infty}$ viermal schneidende Ellipse, der Durchstosspunkt von $M_1 M_2$ ausserhalb beider: Oval und drei hyperbolische Aeste oder eintheilig mit zwei hyperbolischen Aesten je nach den Grenzlagen. Aus der allgemeinen Curve für eine Gegenaxe r, die den unendlichen Ast dreimal schneidet.

c) Wie a), nur mit $M_1'M_2'$ als Durchmesser des Kreises und zugleich Hauptaxe der Hyperbel und den Durchstosspunkt auf dem Kreise und im Innern oder andernfalls ausserhalb der Hyperbel; singuläre Curven mit M_2' als Knoten.

4) Für das Projectionscentrum nicht auf der Curve, also die Curve vierter Ordnung, disponiere man die circulare mit drei Knoten aus schneidenden Kreisen $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ mit M_2' im Mittelpunkt von $\mathbf{L}_1$, der den Durchstosspunkt S enthält und M_1' ausserhalb in der Verlängerung von SM_2'. Das Dreieck der Knotenpunkte ist convex nach aussen. Wenn wird es convex nach innen? Wenn

rücken die Knoten zum dreifachen Punkt zusammen? Wenn rücken zwei der Knoten zur Selbstberührung (Berührungsknoten) zusammen? Wenn werden zwei von ihnen zu Rückkehrpunkten? Wenn geht der dritte in einen isolierten Punkt über?

5) Wenn bei kreisförmigen Leitcurven $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ der Kreis $\mathbf{L}_{1_\infty}$ concentrisch mit $\mathbf{L}_2$ wird, so wird die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente des Bildes in den Kreispunkten und die Curve besteht aus zwei Ovalen von schöner Form. Für die bicircularen Curven vierter Ordnung ist in II, § 25, 1 die Disposition besprochen. Hier soll angemerkt werden, dass alle diese Curven, welche die Kreispunkte ihrer Ebene als einfache oder doppelte Punkte enthalten, etc. von wohlgefälligen Formen sind — eine bis jetzt nicht erklärte Thatsache der experimentalen Aesthetik.

54. An Stelle der einzigen Gruppe der Kegel im Flächenbüschel werden wir nun unendlich viele Gruppen von nicht singulären Flächen desselben treten sehen.

Wir wissen, dass jede Bisekante der Grundcurve, insbesondere auch jede Tangente derselben, mit ihr ein einfaches Hyperboloid bestimmt, für welches ihre zweiten Bisekanten aus den Punkten von jener oder die Verbindungsgeraden unter ihren Punktepaaren in den Ebenen ihres Büschels die Erzeugenden der andern Schaar sind. Wir wissen, dass in jeder seiner beiden Regelschaaren vier Tangenten der Grundcurve vorkommen, welche acht Geraden den Rest der Durchdringung des Hyperboloids mit der Tangentenfläche der Curve bilden, in der diese selbst natürlich doppelt zählt; acht Gerade einer Gruppe, in der die übrigen aus einer beliebigen unter ihnen als entsprechende in den involutorischen Centralcollineationen der Durchdringungsfigur mit sich selbst hervorgehen, und die sich in zwei Gruppen von gleichem Doppelverhältniss theilen. Wir wissen, dass das Ebenenbüschel durch eine Bisekante, nach den vier Tangenten der Curve, welche sie schneiden, ein unveränderliches Doppelverhältniss besitzt.

Wir denken nun durch eine vom Projectionscentrum C in der Grundcurve gehende Bisekante derselben mit dem Fusspunkt D in der Tafel — an Stelle der Tangente im Centrum in der vorherigen Entwickelung — die vier die Grundcurve berührenden Ebenen I, II, III, IV gelegt und nach ihren Berührungspunkten mit derselben die projicierenden Strahlen 1, 2, 3, 4 gezogen; wir legen eine Ebene durch den ersten der-

selben, die die Curve noch in zwei Punkten mit den projicierenden Strahlen a und b trifft, deren Durchstosspunkte in der Tafel A und B sein mögen. Sind dann B^*, A^* die Durchstosspunkte der projicierenden Strahlen b^*, a^* nach den vierten Schnittpunkten der Ebenen $2A$, $2B$ mit der Curve, so sind die Ebenenpaare I, 12 und II, 21 und wiederum $1ab$, $1b^*a^*$ und $2ab^*$, $2ba^*$ entsprechende Ebenenpaare von zwei projectivischen Involutionen, die den projicierenden Kegel der Grundcurve aus dem in ihr liegenden Centrum durch die Schnittlinienquadrupel ihrer entsprechenden Paare hervorbringen, wenn man noch für s als einen beliebigen projicierenden Strahl in ihm die nach 1 und 2 gehenden Ebenen einander zuordnet. Weil aber die Strahlen 1 und 2 mit der Grundcurve zwei einfache Hyperboloide $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ des Büschels bestimmen, so ordnen dieselben projectivischen Ebeneninvolutionen die Geraden ihrer bezüglichen Transversalenschaaren in projectivischen Involutionen, deren entsprechende Paare sich in je vier Punkten der Curve schneiden; ebenso für 1, 3 und für 1, 4 in den bezüglichen Hyperboloiden $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ und $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_4$, wenn man 2 durch 3 resp. 4 in der vorigen Erörterung ersetzt.

Nach jenen Vierergruppen von Tangenten treten also zu jedem Hyperboloid des Büschels drei andere Hyperboloide desselben so hinzu, dass die Grundcurve durch projectivische Involutionen ihrer zu jenen transversalen Regelschaaren erzeugt wird oder dass dieselbe ihre Geraden in projectivische Involutionen ordnet.

Man kann auch sagen, dass für jede Fläche des Büschels die drei Paare der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der Curve mit den vier Tangenten in einer ihrer Regelschaaren die drei andern Flächen des Büschels bestimmen, deren Gerade mit denen der ersten durch die Curve in projectivische Involutionen geordnet werden. Dabei bilden die Berührungspunkte der zweimal vier Tangenten in den Regelschaaren einer solchen Fläche eine Gruppe, in welcher die Tangenten solcher vier Punkte zur nämlichen Schaar gehören, deren Verbindungsgerade nicht durch eine Ecke des gemeinsamen Quadrupels im Büschel gehen, und eben diese Geraden liegen auf demselben Hyperboloid des Büschels.

Die Centralprojectionen der Grundcurve aus einem ihrer Punkte und aus einem beliebigen Punkt des Raumes liefern nun die Erzeugungen der allgemeinen Curven dritter Ordnung und die der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten aus projectivischen Involutionen zunächst in folgenden Formen.

Im ersten Falle gehen alle Flächen des Büschels, also auch die aller Vierergruppen derselben durch das Centrum; im zweiten Falle giebt es nur eine das Centrum enthaltende Fläche im Büschel und diese sondert aus der Gesammtheit der übrigen die drei Flächen der Vierergruppe aus, zu der sie gehört; ebenso thut jede andere das Centrum nicht enthaltende Fläche des Büschels.

Im ersten Fall ergeben sich die drei Arten der conjugierten oder correspondierenden Punkte der Curve dritter Ordnung wieder als den drei Erzeugungen durch projectivisch-involutorische Büschel mit sich selbst entsprechendem Scheitelstrahl correspondierend, welche eine Fläche $\mathbf{F}_1$ des Büschels mit der zweiten, dritten und vierten Fläche ihrer Vierergruppe in demselben liefert. Irgend eine vom Projectionscentrum ausgehende Bisekante der Grundcurve bestimmt mit ihr die erste dieser Flächen; die Berührungspunkte von vier Tangenten der Curve, die der nämlichen ihrer beiden Regelschaaren angehören, bestimmen durch ihre Verbindungsgeraden die drei andern; die projectivischen Involutionen der Regelschaaren in $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_i$ $(i = 2, 3, 4)$ werden durch projectivische Strahlbüschelinvolutionen dargestellt, welche die Durchstosspunkte der durch das Projectionscentrum gehenden Erzeugenden der andern Schaaren dieser Hyperboloide zu Scheiteln haben, und in denen der gemeinsame Strahl zu entsprechenden Paaren gehört. Die Scheitel der Involutionen sind Punkte von einerlei Tangentialpunkt im Curvenbild, und von einem beliebigen Punkt desselben ausgehend erhält man ihrer vier. Die Lehre von den conjugierten Punkten der Curve dritter Ordnung ergiebt sich aus den Vierergruppen der einfachen Hyperboloide des Büschels ganz so wie aus den vier Kegeln desselben.

Projicieren wir dann die Grundcurve als auf einer beliebigen Fläche $\mathbf{F}_1$ des Büschels gelegen aus einem ihr nicht angehörigen Punkt des Raumes, so kann sie auf dreierlei Art projiciert werden, nämlich aus den Flächen $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ der

Vierergruppe von $\mathbf{F}_1$, durch Darstellung der erzeugenden projectivischen Involutionen in den betreffenden Regelschaaren. Diese Regelschaaren erscheinen als Tangenten der Umrisskegelschnitte der bezüglichen Flächen und ihre projectivischen Involutionen natürlich als projectivische Involutionen dieser Tangentensysteme. Weil die Originale der Umrisskegelschnitte der Flächen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ in den zugehörigen Polarebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ des Projectionscentrums liegen und diese die Grundcurve in vier Punkten treffen, deren Bilder den Umrissen angehören, während zugleich die Bilder ihrer zugehörigen Tangenten die zugehörigen Tangenten der Umrisse sind (vergl. II, § 46), so berühren jene Kegelschnitte das Bild der Grundcurve in je vier Punkten. Und wir haben schon a. a. O. gezeigt, dass solche zwei Gruppen von vier Punkten in einem Kegelschnitt liegen, durch dessen Schnittpunkte mit der Verbindungsgeraden $D_1 D_2$ der Doppelpunkte noch ein dritter Kegelschnitt des Umrisssystems geht, etc. Wir erinnern dabei, dass vier von diesen Kegelschnitten in Linienpaare zerfallen, entsprechend den vier Kegeln im Flächenbüschel, deren Umrisskegelschnitte Paare von Erzeugenden sind, die vier Paare von Doppeltangenten des Bildes der Curve; ihre Schnittpunkte, die Hauptpunkte, die Bilder der Ecken des gemeinsamen Quadrupels, etc. Jetzt werden wir sagen, dass zu jedem der einfach unendlich vielen die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten einfach berührenden Umrisskegelschnitte drei andere Kegelschnitte desselben Systems gehören — zugewiesen durch die betreffende Vierergruppe des Flächenbüschels —, sodass die Curve durch eine Tangenteninvolution des einen mit einer projectivisch zugeordneten Tangenteninvolution der andern als Ort der Quadrupel der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Paare erzeugt wird. Weil vom Projectionscentrum an die beiden betrachteten Flächen $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ vier gemeinsame Tangentialebenen gehen und die zu einer solchen gehörigen Strahlenpaare der Regelschaaren sich immer in dem zugehörigen Punkt der Grundcurve begegnen müssen, so folgt, dass die gemeinsamen Tangenten solcher zwei Kegelschnitte zu entsprechenden Paaren gehören und das Curvenbild im Bilde jenes Curvenpunktes berühren.

Denken wir aber $\mathbf{F}_1$ als die das Centrum enthaltende oder projicierende Fläche des Büschels, so wird die Involution in seiner die zugehörige Gerade d_1 oder d_2 schneidenden Regelschaar durch eine Strahleninvolution um D_1 oder D_2, d. i. um einen der Doppelpunkte des Bildes dargestellt; jede der zur Vierergruppe von $\mathbf{F}_1$ gehörenden Flächen $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ liefert einen die Curve vierfach berührenden Kegelschnitt des Umrisssystems und eine zu jener Involution im Büschel projectivische Involution seiner Tangenten, welche mit ihr durch den Schnitt entsprechender Paare das Curvenbild erzeugt. Die vom Doppelpunktscheitel an diesen Kegelschnitt gehenden Tangenten sind entsprechende Doppelstrahlen und die Tangenten der Curve im Doppelpunkt.

Wenn das Flächenbüschel keine reellen Kegel enthält, oder wenn es aus lauter einfachen Hyperboloiden besteht, so enthält von den beiden Regelschaaren eines solchen immer nur die eine vier reelle Tangenten der Grundcurve und die Verbindungsgeraden ihrer Berührungspunkte bestimmen die andern Hyperboloide der Gruppe; etc.

Im Fall der eintheiligen Durchdringung oder der Eindringung, wo nur zwei Ecken M_1, M_2 und die Gegenflächen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ des Quadrupels reell sind, enthalten die Vierergruppen von einfachen Hyperboloiden nur je zwei reelle Flächen mit erzeugenden projectivischen Involutionen ihrer Regelschaaren; nothwendig aus der einzigen Reihe von einfachen Hyperboloiden, die nach II, § 45, 4 in diesem Fall im Flächenbüschel existiert.

Es liegt nahe, die Modificationen des Vorigen zu erörtern, welche eintreten, wenn das Projectionscentrum auf einer Tangente der Curve oder in einer der Doppelcurven ihrer Tangentenfläche liegt, womit wie bekannt einer der Doppelpunkte oder beide Doppelpunkte ihres Bildes in Rückkehrpunkte übergehen, ohne dass dasselbe in höherem Grade singulär wird. Wir bemerken nur, dass für das Centrum in der Doppelcurve die Verbindungsebene der zwei projicierenden Tangenten als zugleich eine Berührungsebene durch die erste und eine durch die zweite die Verbindungsgerade der Rückkehrpunkte in den vierstrahligen Tangentenbüscheln aus denselben sich selbst ent-

spricht; sodass die übrigen drei Paare in einer ihrer Zuordnungen drei Punkte einer Geraden erzeugen.

Aber diese Modificationen wären dann auch für die singulären Durchdringungen selbst oder im Fall der Berührung der Flächen des Büschels durchzuführen. Wie nahe verwandt auch andere Erzeugungen den vorigen Betrachtungen sind, vergegenwärtigen wir in den Beispielen.

1) Die Tangentialebenen eines Kegels im Büschel enthalten wie wir wissen (II, § 45,24) je ein Paar sich schneidender Tangenten der Grundcurve, deren Berührungspunkte der zugehörigen Mantellinie angehören; eine solche Ebene schneidet das Flächenbüschel in einem System (Büschel und Schaar) von Kegelschnitten, die sich in diesen Punkten doppelt berühren, und für die das Projectionscentrum enthaltende Fläche des Büschels geht dieser Querschnitt durch die Schnittpunkte der projicierenden Bisekanten d_1, d_2 in ihm. Daher existieren in der Projection der Grundcurve aus einem beliebigen Punkt des Raumes im Allgemeinen vier einfach unendliche Systeme von Kegelschnitten, welche ihre Doppelpunkte D_1, D_2 enthalten und sie ausserdem doppelt berühren nach Sehnen, welche das Strahlbüschel aus der Projection der zugehörigen Kegelspitze oder Quadrupelecke erfüllen.

Ist das Projectionscentrum einer der Nabelpunkte der projicierenden Fläche des Büschels, sodass das Bild der Grundcurve auf eine zur entsprechenden Tangentialebene parallele Ebene eine bicirculare Curve vierter Ordnung ist, so werden diese doppeltberührenden Kegelschnitte zu Kreisen und die Curve kann in vier Arten als Enveloppe eines Systems doppeltberührender Kreise erzeugt werden, deren Berührungssehnen ein Büschel bilden.

Die Quadrupelecke M_i hat in Bezug auf die projicierende Fläche $\mathbf{F}$ des Büschels die Polarebene $\mathbf{M}_i$, die den zu M_i gehörigen Kegel im Büschel in einem Kegelschnitt J schneidet. Die Tangentialebenen dieses Kegels haben ihre Pole in Bezug auf $\mathbf{F}$ in der Ebene $\mathbf{P}_i$ desselben und auf seinem bezüglichen Polarkegelschnitt F_i, der also auch Polarkegelschnitt von J in Bezug auf den Querschnitt der projicierenden Fläche $\mathbf{F}$ des Büschels mit der Ebene $\mathbf{P}_i$ ist.

Ist das Centrum ein Nabelpunkt der Fläche $\mathbf{F}$ und die Projectionsebene der zugehörigen Tangentialebene derselben parallel, so erscheinen nach II, § 45,30 — vgl. ebd. p. 261 f. — alle ebenen Querschnitte der Fläche $\mathbf{F}$ als Kreise mit den Bildern der Pole ihrer Ebenen als Mittelpunkten; und die durch einen Punkt M_i gehenden ebenen Querschnitte insbesondere als die Orthogonalkreise desjenigen Kreises J', der den Querschnitt in der Ebene $\mathbf{P}_i$ abbildet. Die Bilder der Querschnitte mit den Tangentialebenen des doppelt projicierenden Kegels M_i werden also diejenigen Ortho-

gonalkreise von J' sein, deren Mittelpunkte dem festen Kegelschnitt F_i', dem Bilde von F_i, angehören.

Somit wird die bicirculare Curve vierter Ordnung auf vier Arten als die Enveloppe von Kreisen erzeugt, welche ihre Mittelpunkte auf einem festen Kegelschnitt F_i' haben, während sie zugleich einen festen Kreis J' orthogonal durchschneiden; das gemeinsame Tripel harmonischer Pole, welches einer der Kreise J' mit dem Kegelschnitt F_i liefert, bildet die Mittelpunkte der drei andern Kreise J'. Die unendlich kleinen unter den zu J' orthogonalen Kreisen, die den gemeinsamen Tangentialebenen des zugehörigen Kegels im Büschel mit der projicierenden Fläche entsprechen, an Zahl vier in jedem der vier Systeme, sind als doppeltberührende Nullkreise derselben die Brennpunkte der Bildcurve; sie liegen zu vier auf den Kreisen J'.

Jeder der Kreise J' schneidet die Bildcurve in vier Punkten im Endlichen, in deren jedem die zwei Berührungsstellen des Systemkreises benachbart sind, sodass derselbe vier benachbarte Punkte der Curve enthält; man hat diese Punkte als cyklische Punkte der Curve bezeichnet.

Die imaginären Tangenten der Curve in den Doppelpunkten selbst haben, weil sie auch Tangenten des Kegelschnittes F_i' sind, die Brennpunkte dieses Kegelschnittes zu ihren reellen Schnittpunkten und diese gehören somit in singulärer Weise zu den Brennpunkten der Curve.

2) Eine besondere Lagenbeziehung von J' mit F_i' specialisiert die Curve. Eine Berührung macht den Berührungspunkt zum neuen Doppelpunkt, denn sie bedingt die Berührung der sich durchdringenden Flächen. Im Fall der Doppelberührung zerfällt die Curve in zwei Kreise, wie die Durchdringung in zwei Kegelschnitte.

Enthält F' einen der Doppelpunkte der Bildcurve, die wir also nicht bicircular denken, so wird derselbe zur Spitze, das Centrum liegt in der Tangentenfläche der Grundcurve. Die Lage des Centrums in der Polarebene $\mathbf{M}_i$ bedingt, dass F_i' und J' die nämliche Gerade werden. Berührt die Tangentialebene der Fläche $\mathbf{F}$ im Centrum den Kegel M_i, so geht auch F_i durch dasselbe und es liegen drei Brennpunkte in einer Geraden, nämlich in der Spur der projicierenden Quadrupelebene. Ist also F_i' im Fall der bicircularen Curve ein Kreis, so hat diese die imaginären Kreispunkte zu Spitzen; die Brennpunkte sind die Projectionen der drei zugehörigen Kegelspitzen und die Curve kann noch einen reellen Doppelpunkt im Endlichen haben: Cartesisches Oval und Pascal'sche Schnecke. (II, § 26, 19.)

3) Die Gerade durch die Doppelpunkte wird ein Theil der Bildcurve, wenn sie den Kegelschnitt F_i' berührt; im Fall der bicircularen Curve, also wenn derselbe eine Parabel ist. Die Curve wird zur circularen Curve dritter Ordnung, wie sie unsere Entwickelungsfigur in § 53 darstellt.

4) Wenn die Rückkehrpunkte des Bildes die Kreispunkte der Ebene sind, so hat die Curve — das Cartesische Oval — drei in einer Geraden liegende Brennpunkte (II, § 26, 19 f.); erhält sie unter dieser Voraussetzung einen dritten Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt, so wird sie zur Pascal'schen Schnecke (Limaçon) resp. zur Cardioide.

5) Die vorher entwickelte Erzeugung der bicircularen Curven vierter Ordnung ist noch in einer andern Weise ein Bild der Raumcurve vierter Ordnung erster Art, nämlich nach der Methode der Cyklographie. Die zu J' orthogonalen Kreise bilden cyklographisch die Punkte des gleichseitigen Rotationshyperboloids ab, welches J' zu seinem Kehlkreis hat; diejenigen unter denselben, welche ihre Mittelpunkte in F_i' haben, stellen die Punkte der auf diesem Hyperboloid gelegenen Curve vierter Ordnung erster Art dar, welche diesen Kegelschnitt zur orthogonalen Projection hat. Jene als die Enveloppe derselben ist die Spurcurve der entwickelbaren Fläche vom gleichen Fallen von 45^0 durch dieselbe. (Vergl. II, § 9, 15; § 13, 6; § 26, 22; § 47, 16 f.)

55. Durch das Vorige haben wir die einfach unendlich vielen Flächen des Büschels — die Kegel eingeschlossen — in Gruppen zu vier geordnet, sodass aus jeder Fläche einer solchen Gruppe die drei andern Flächen derselben Gruppe in gleicher Weise hervorgehen; die zwei beliebigen das Büschel bestimmenden Flächen zweiten Grades liefern selbst zwei solche Gruppen. Wir werden die Gesammtheit dieser Vierergruppen als eine aus den Flächen des Büschels gebildete Involution vierten Grades zu bezeichnen haben und können dieselbe (siehe noch § 57 f.) auf eine Involution im Ebenenbüschel u. s. w. zurückführen, indem wir für irgend einen Punkt der Grundcurve die Tangentialebenengruppen der Flächen der Gruppen betrachten. Wir schliessen daher nach § 42, 5, dass es sechsmal vorkommt, dass unter den vier Flächen einer Gruppe zwei zusammenfallende auftreten; und erhalten also das Ergebniss, dass es sechs Flächen im Büschel giebt, deren beide Regelschaaren durch die Grundcurve in projectivische Involutionen geordnet werden.

Für die Projection aus einem beliebigen Punkt des Raumes folgt aus der Betrachtung der Umrisse dieser Flächen der Satz: Zu einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten giebt es sechs vierfach berührende Kegelschnitte, für deren jeden dieselbe der Ort der

Schnittpunktequadrupel aus entsprechenden Paaren projectivischer Involutionen seiner Tangenten ist. In den Tangenten in den gemeinsamen Berührungspunkten sind entsprechende Strahlen der Involutionen vereinigt. Es kommt im Allgemeinen zweimal vor, dass zweimal zwei entsprechende Strahlen sich in demselben Punkt schneiden. Wenn ein Paar der Doppelstrahlen der Involutionen sich entsprechen, so wird ihr Schnittpunkt zum dritten Doppelpunkt der Curve; und wenn zwei Doppelstrahlenpaare sich entsprechen, so zerfällt dieselbe in zwei Kegelschnitte (§ 44), wie die Raumcurve selbst auch. Denn diese Tangenteninvolutionen sind die Projectionen der Involutionen in den beiden Regelschaaren der betrachteten Fläche. Denken wir aber das Projectionscentrum auf einer der sechs hervorgehobenen Flächen des Büschels gewählt, so projicieren sich die beiden Involutionen ihrer Regelschaaren als involutorische Strahlbüschel um die Durchstosspunkte der projicierenden unter ihnen oder wir erhalten die Erzeugung der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten durch projectivische Involutionen von Strahlen aus diesen Doppelpunkten — § 44 oben.

Die vier Tangenten der Grundcurve, die in jeder der beiden Regelschaaren enthalten sind, projicieren sich als die von dem bezüglichen Doppelpunkt ausgehenden die Curve anderwärts berührenden Tangenten — es sind jeweilen die Strahlen der einen Involution, die den Doppelstrahlen der andern entsprechen; dieselben bilden daher zwei Büschel von gleichem Doppelverhältniss und erzeugen daher nach § 38, 3 durch den Schnitt mit einander vier Gruppen von je vier Punkten, die mit den Doppelpunkten selbst auf einem Kegelschnitt liegen; oder die aus den Doppelpunkten an die Curve vierter Ordnung vom Geschlecht Eins noch gehenden zweimal vier Tangenten schneiden sich in viermal vier Punkten auf Kegelschnitten durch die Doppelpunkte. Sie sind die Projectionen von acht Tangenten einer hyperboloidischen Gruppe (II, § 47) und theilen sich wie diese in zwei Gruppen von gleichem Doppelverhältniss; die acht dem vierfach berührenden Umrisskegelschnitt, den die Doppelpunkte bilden, mit der Curve von der Classe acht noch gemeinsamen Tangenten, für welche die Berührungspunkte verschieden sind. Insbesondere, wenn das Projections-

centrum einer der Nabelpunkte der bezeichneten Fläche und die Bildebene parallel der zugehörigen Tangentialebene ist, sodass die Doppelpunkte des Bildes die imaginären Kreispunkte im Unendlichen werden, erhalten wir den vorher schon auf andere Art gefundenen Satz, dass die sechszehn Brennpunkte der bicircularen Curve vierter Ordnung viermal zu vier in Kreisen liegen. (Vergl. auch II, § 46,1 und § 42,14f.)

Liegt aber das Projectionscentrum in der Grundcurve, so ist jeder projicierende Strahl eines Punktes derselben eine ihrer Bisekanten und bestimmt mit ihr ein einfaches Hyperboloid und vier sie schneidende Tangenten der Curve auf diesem, die sich als die Tangenten des Curvenbildes aus dem Punkt desselben projicieren, wo jene Bisekante die Bildebene trifft. Wir erhalten den Satz, dass das Doppelverhältniss des von einem Punkt der allgemeinen Curve dritter Ordnung an sie gehenden Tangentenbüschels für alle Punkte der Curve dasselbe ist. Die Projectivität der Tangentenbüschel aus den Doppelpunkten der Curve vierter Ordnung vom Geschlecht Eins erscheint als Gesetz für die Tangentenbüschel aus allen Punktepaaren der Curve dritter Ordnung vom nämlichen Geschlecht. Natürlich schneiden sich auch die Strahlen irgend zweier solcher Büschel bei der Curve dritter Ordnung viermal zu vier in einem durch ihre Scheitel gehenden Kegelschnitt; und wenn die beiden Scheitel unendlich nahe benachbarte Punkte der Curve dritter Ordnung sind, so erfährt man, dass die Berührungspunkte der vier Tangenten derselben, die aus einem ihrer Punkte an sie gehen, mit diesem auf einem Kegelschnitt liegen, der auch seinen Nachbarpunkt enthält oder die Curve dritter Ordnung in ihm berührt. (Vergl. § 60.) Für die von einem Inflexionspunkt und seinem Nachbar in der Curve ausgehenden Tangenten erhalten wir perspectivische Lage, weil der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht und der Kegelschnitt degeneriert in die Inflexionstangente und die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der übrigen drei Tangenten, die man als die harmonische Polare des Inflexionspunktes bezeichnet hat. Für die circulare Curve dritter Ordnung kann man insbesondere die Kreispunkte als Scheitel dieser Tangentenbüschel wählen und erfährt, dass die sechszehn Brenn-

punkte einer circularen Curve dritter Ordnung viermal zu vier in Kreisen liegen.

Auf Grund derselben räumlichen Anschauung geht aber endlich der Satz von der Erzeugung der Bildcurve aus projectivischen Involutionen mit den Doppelpunkten als Scheiteln wieder über in den Satz von der Erzeugung der allgemeinen Curve dritter Ordnung durch projectivische Involutionen, in denen der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, aus conjugierten Punkten der Curve, d. h. solchen mit gleichem Tangentialpunkt als Scheiteln. Denn irgend zwei jener vier Strahlen einer hyperboloidischen Gruppe aus derselben Regelschaar projicieren sich als eines der Tangentenpaare aus dem Durchstosspunkt der projicierenden Bisekante.

Wir kommen sogleich hierauf zurück, nachdem wir einen directen Nachweis der Existenz unserer sechs ausgezeichneten Flächen im Büschel gegeben haben werden.

Es ist das Charakteristische dieser Flächen, dass ihre Geraden sich in Paaren der einen und der andern Schaar zu geschlossenen Vierseiten ordnen, deren Ecken auf der Curve liegen, sodass von einer Geraden der Schaar g ausgehend, die durch ihre Schnittpunkte mit der Grundcurve gehenden beiden Geraden der Schaar l die Curve noch in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungslinie wieder der Schaar g derselben Fläche angehört.

Dreht man um eine beliebige Tangente t der Grundcurve mit dem Berührungspunkt T eine Ebene, so schneidet diese die Curve noch in zwei Punkten R, R^*, deren Verbindungslinien mit T eine Fläche $\mathbf{F}_r$ des Büschels bestimmen, während ihre eigene Verbindungsgerade der durch die Tangente t bestimmten Fläche $\mathbf{F}_t$ derselben angehört. Die Tangentialebenen der Fläche $\mathbf{F}_r$ in den Punkten R, R^* enthalten zwei sich in einem Punkt T^* schneidende Gerade derselben Schaaren, die mit der Curve zwei Punkte S, S^* gemein haben, deren Verbindungslinie mit t zur nämlichen Regelschaar von $\mathbf{F}_t$ gehört. Sobald SS^* zur Tangente der Grundcurve wird, so fällt T^* in die Curve und man hätte ein geschlossenes Vierseit TRR^*T^* und daher eine sich selbst entsprechende Fläche. Nun schneiden die Geraden SS^* sämmtlich die in der Schmiegungsebene der Grundcurve in T gelegene zweite Erzeugende von $\mathbf{F}_t$, sodass

für die Projection aus dem Punkt T sich ergiebt, es müsse bei der Drehung von $R'R^{*'}$ um den Fusspunkt T' von t in der Bildebene die Verbindungslinie $S'S^{*'}$ der Bilder von SS^* durch den Tangentialpunkt U' des Punktes T' in der Bildcurve dritter Ordnung gehen. Nun lassen sich von U' aus ausser der in T' berührenden noch drei weitere Tangenten an diese Bildcurve ziehen, woraus sich drei Punkte $T^{*'}$ ergeben; von jedem von diesen aus gehen wieder vier Tangenten an die Bildcurve und ihre Berührungspunkte müssen nach der Construction von T^* auf zwei Geraden aus T' gelegen sein; jede der drei durch U' noch gehenden Tangenten führt also zu zwei Geraden der verlangten Art und damit zu zwei Flächen mit geschlossenen der Curve eingeschriebenen Vierseiten. Die Zahl solcher Flächen im Büschel ist also sechs; und diese sechs Flächen bilden als die drei bezeichneten Paare drei Gruppen der Vierer-Involution, welche die Eigenschaft haben, aus je zwei sich selbst entsprechenden Flächen zu bestehen.

Zur einfachsten Construction dieser Flächen führt aber die Betrachtung der Scheitel der Grundcurve oder der Berührungspunkte der stationären Schmiegungsebenen derselben. Wir wissen (II, §§ 17, 25), dass sie die sechszehn der Curve mit der Doppelcurve ihrer Tangentenfläche gemeinsamen Punkte sind; nach dem Zerfallen der Doppelcurve in vier rationale ebene Curven vierter Ordnung zu vier in den vier Ebenen des gemeinsamen Quadrupels gelegen. Man erhält sie in den Grenzlagen der Hülfsebenen, welche durch eine Kante des gemeinsamen Quadrupels berührend an die zugehörigen Kegel im Büschel gehen; die zugehörigen Tangenten der Grundcurve sind die Mantellinien des geschnittenen Kegels, d. h. Vereinigungen von zwei Erzeugenden beider Schaaren des Hyperboloids mit Doppelpunkt. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte sind Erzeugende der sechs gesuchten Flächen des Büschels, insofern sie nicht Mantellinien der Kegel sind. Ihre Zahl ist $\frac{1}{2}16 \cdot 15 - 4 \cdot 6$ oder 96, d. h. je 16 von ihnen gehören zu derselben Fläche unserer Gruppe. Wir haben in den Tafeln III und XII von Band II die reellen Punkte der Curve mit stationären Schmiegungsebenen eingetragen; in der ersten Tafel die Punkte C, D, E, F in der Symmetrieebene Y und die Punkte G, H, J, K in der

Quadrupelebene $\mathbf{M}^*$; die Verbindungsgeraden $CG, CH, DG, DH, EJ, EK, FJ, FK$ sind acht Erzeugende des ersten Hyperboloids der Gruppe. Ebenso sind $CJ, CK, DJ, DK, EG, EH, FG, FH$ acht Erzeugende des zweiten. Man hat damit zwei geschlossene Vierseite in der Fläche, $CGDH$ und $EJFK$. In gleicher Weise würden die Verbindungsgeraden der Scheitel in $\mathbf{M}^*$ mit denen in $\mathbf{Y}^*$ zwei Gruppen von acht Erzeugenden der dritten und vierten Fläche der Gruppe und die der Scheitel in $\mathbf{M}^*$ mit denen in $\mathbf{M}$ zwei solche Gruppen der fünften und sechsten Fläche derselben liefern. Die Verbindungen der Scheitel in $\mathbf{M}$ und $\mathbf{Y}$, in $\mathbf{M}$ und $\mathbf{Y}^*$ und endlich in $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y}^*$ liefern für jede dieser Flächen acht weitere Erzeugende. Analog in Tafel XII für die reellen Gruppen der Punkte der stationären Schmiegungsebenen I, II, III, IV und I*, .. IV*. Die Durchführung in Tafel IV ist leicht entsprechend zu ergänzen.

Für das Bild aus einem Punkt der Grundcurve erhält man die demselben eingeschriebenen Vierseite mit Gegenecken in zwei Punkten des Bildes, die denselben Tangentialpunkt haben; den genauen Ausdruck der Erzeugung desselben aus zwei projectivischen Involutionen zweiten Grades, deren gemeinsamer Strahl zu entsprechenden Paaren gehört.

Das Bild aus einem beliebigen Punkt des Raumes zeigt uns Vierseite, die einem das Curvenbild vierfach berührenden Kegelschnitt als aus Paaren von zwei projectivischen Tangenteninvolutionen desselben gebildet umgeschrieben sind und deren vier Ecken dem Curvenbild angehören.

Und das Bild aus einem Punkt, der nicht in der Grundcurve, aber in einer der sechs ausgezeichneten Flächen des Büschels liegt, giebt uns mit der Erzeugung der Curve aus projectivischen Involutionen um die Doppelpunkte eingeschriebene Vierseite eines einfach unendlichen Systems wieder.

J. Steiner hat 1845*) merkwürdige Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung und der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten bekannt gemacht, die man als Steiner'sche Schliessungssätze und deren Figuren man als Steiner'sche Polygone zusammenzufassen pflegt. Die Vierseite der Curve

*) Vorlesung in der Akad. der Wissensch. zu Berlin am 27./XI. Auszug „Werke" II, p. 371—373. Damit verbunden p. 377—380 a. a. O.

3. Ordnung aus conjugierten Punkten und die der aus projectivisch-involutorischen Büscheln erzeugten Curve 4. Ordnung aus den Doppelpunkten sind die einfachsten derselben. Allgemein lautet der fundamentale Satz für die Curve 3. Ordnung so: Werden in einer Curve dritter Ordnung zwei beliebige Punkte P, Q als fest angenommen, wird ferner in derselben ein willkürlicher Punkt A gewählt und die Gerade PA gezogen, die der Curve zum dritten Mal in B begegnet, wird sodann weiter die Gerade QB mit dem dritten Begegnungspunkt C, sodann PC mit dem dritten Punkt D und so weiter die Geraden QDE, PEF, QFG, ... gezogen, die die neuen Punkte E, F, G... enthalten, so entsteht ein der Curve eingeschriebenes Polygon $ABCD...$, dessen Seiten der Reihe nach abwechselnd durch die festen Punkte P und Q gehen, und welches entweder sich nicht schliesst, wie lange auch die Construction fortgesetzt wird, oder sich schliesst und dann eine gerade Zahl $2n$ von Seiten hat. Wenn das Polygon sich schliesst, so schliesst es sich stets und hat immer die nämliche Seitenzahl $2n$, man mag die erste Ecke A in der Curve annehmen, wo man will.

Die betrachtete specielle Involution vierten Grades unter den Flächen des Büschels hat uns den Satz für $n = 2$ geliefert; in erster Bestätigung einer Bemerkung von J. Steiner am gleichen Ort, aber zu anderer Zeit (August 1848, „Werke" II, p. 500), dahingehend, dass das eigentliche Wesen vieler Eigenschaften der Curve dritter Ordnung vornehmlich auf der sog. Involution beruhe. Aber nach dem Satze und den Beispielen für $n = 3$, 4 und 5 a. a. O. muss Steiner auch Involutionen höherer Grade hierbei im Sinn gehabt haben. Wenn er schliesslich die Sätze auf Curven vierter Ordnung mit den Doppelpunkten P, Q erweitert, so regt dies zur Vermuthung einer Ableitung aus dem Flächenbüschel zweiten Grades an.

Es entspringt die Erwartung, dass die hervorgehobenen allgemeinen Sätze aus der Raumanschauung des Flächenbüschels insbesondere seiner Regelschaaren oder der zur Grundcurve gehörigen Strahlencongruenz ihrer Bisekanten abgeleitet werden können, falls es einen für das ganze Flächenbüschel gleichbedeutenden Modus der Auslese jener involutorischen Gruppen giebt. Einen solchen bieten die drei durch das Büschel mitbestimmten Regelflächen vierten Grades dar, welche die Gegen-

kantenpaare seines Quadrupels zu Doppelgeraden haben (vgl. (§ 29, 15) und die nach § 29, 8 in der Correspondenz von Punkt und Harmonikalebene in Bezug auf das Quadrupel sich selbst entsprechen. Wir wiederholen die Bildung der Involution vierten Grades auf diesem Wege, um den hierher gehörigen Theil der Untersuchung mit der Sicherheit ihrer Vervollständigung abzuschliessen.

56. Nach II, § 26 (p. 176) erhalten wir die Punkte der Curve vierter Ordnung erster Art in Gruppen zu acht auf Paaren von Ebenen durch jede der Kanten M_iM_j des Quadrupels, die durch die anliegenden Flächen $\mathfrak{P}_k$, $\mathfrak{P}_l$ desselben harmonisch getrennt werden; von dem Viereck der Curvenpunkte in einer solchen Ebene gehen zwei der Seiten durch M_i, die zwei andern durch M_j, die beiden letzten in beiden Ebenen durch dieselben beiden von M_i und M_j harmonisch getrennten Punkte der Kante M_iM_j und zugleich je in derselben Ebene durch den Schnittpunkt mit der Gegenkante M_kM_l. Diese letzten bilden also ein windschiefes Vierseit von Doppelsekanten der Curve, dessen Ecken auf zwei Gegenkanten des Quadrupels liegen und auf denselben mit den zugehörigen Ecken desselben harmonische Gruppen bilden; jede Gruppe von acht Punkten der Curve liefert zunächst drei solche Vierseite. Die dreimal vier Seiten derselben sind als Transversalen der Gegenkanten im Quadrupel nicht nur Bisekanten der Curve überhaupt, sondern Erzeugende der einen und andern Regelschaar einer Fläche des Büschels, oder die drei Vierseite sind Vierseite auf drei bestimmten Flächen des Büschels, die zur Gruppe gehören. Sowie ihre Ecken zu den Quadrupelecken in den bezüglichen Gegenkanten harmonisch conjugiert sind, so sind diess zugleich ihre Flächen in Bezug auf die anliegenden Flächen desselben. Die Flächen des Büschels bewirken die projectivische Zuordnung der so auf und an den Gegenkantenpaaren gebildeten Involutionen. Die Gesammtheit dieser Vierseite für jedes Paar der Gegenkanten des Quadrupels bildet daher nach beiden dual entsprechenden Erzeugungsweisen eine Regelfläche vierten Grades, die jene zu Doppelgeraden hat, wie in § 43, 10; und jede Fläche des Büschels hat mit jeder dieser Regelflächen ein Vierseit ihrer Erzeugenden gemein, ausser der Grundcurve — wir wollen diese Erzeugenden hier als Linien e derselben bezeichnen.

Die Kegel im Büschel werden insbesondere nach zwei in einer Quadrupelebene gelegenen Erzeugenden von ihr berührt.

Die drei Vierseite von Linien e in derselben Fläche des Büschels erzeugen vierundzwanzig Schnittpunkte ihrer Seiten, die zu je acht einer der drei Durchdringungscurven der drei Regelflächen vierten Grades in Paaren angehören, Curven von der Ordnung zwölf, da sie durch die Grundcurve zur Gesammtdurchdringung ergänzt werden. Da dieselben Ebeneninvolutionen aus zwei sich schneidenden Quadrupelkanten als doppeltprojicierenden Kegel der Durchdringungscurve der zugehörigen Regelflächen vierten Grades einen Kegel vierter Ordnung mit drei Doppelinflexionskanten in den zugehörigen Quadrupelkanten erzeugen, so hat die Durchdringungscurve vierfache Punkte in den Ecken des Quadrupels. Für die drei Kegel von derselben Spitze stellen die zugehörigen drei Quadrupelkanten als doppelt inflexional mit denselben Tangentialebenen die Gesammtdurchdringung dar und die Durchdringungscurven der Regelflächen vierten Grades begegnen einander daher nur in den Quadrupelecken.

Dagegen hat jeder dieser Kegel vierter Ordnung mit dem concentrischen doppeltprojicierenden Kegel der Grundcurve acht Erzeugende gemein, die aus der letztern zwei achtpunktige Durchschnittsgruppen der Curven vierter und zwölfter Ordnung schneiden, welche mit den acht veränderlichen Punkten die vierundzwanzig Schnittpunkte der Curve zwölfter Ordnung mit jeder Fläche des Büschels ausmachen; die drei Curven zwölfter Ordnung liefern auf der Grundcurve sechs solche Gruppen von acht Punkten, in denen sich die Seiten zweier verschiedener Vierseite derselben Fläche des Büschels begegnen.

Zur Uebersicht der vollen Dualität in diesen Beziehungen gelangen wir an der Hand der Darstellung. Wir denken zunächst das Quadrupel M_i, $\mathbf{P}_i$ reell und zwei der doppelt projicierenden Kegel M_1, $\mathbf{L}_1$ und M_2, $\mathbf{L}_2$ gegeben für ein Centrum auf der Grundcurve. Auf der Tafel sind beide Spuren Kreise und der Durchstosspunkt S_{12} der Verbindungslinie der Spitzen ist Schnittpunkt zweier zu einander rechtwinkliger Durchmesser derselben, die also das gemeinsame Paar der zugehörigen Polarinvolutionen für $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ und somit die Spuren der durch $M_1 M_2$ gehenden Ebenen des Quadrupels $\mathbf{P}_3$ und $\mathbf{P}_4$ sind. Dazu

sind die Polaren von S_{12} in $\mathbf{L}_1$ und resp. $\mathbf{L}_2$ die Spuren der Ebenen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ und die drei Paare der Durchschnittspunkte dieser vier Geraden die sechs Durchstosspunkte der Quadrupelkanten — hier S_{13}, S_{24} unendlich fern. Offenbar müssen nach der Polarität des Quadrupels zu den Kegeln je drei Punkte S_a mit einem gemeinsamen Index die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks sein, dessen Ecken der Spur des Kegels von diesem Index angehören und dessen Seitenpaare Tangenten der Spuren der drei andern Kegel sind; die Tangenten aus S_{12} an $\mathbf{L}_2$, d. h. die Spuren der Grenzlagen der Hülfsebenen (II, § 18) geben also z. B. auf $\mathbf{L}_1$ die Ecken eines Vierecks, dessen zwei andere Seitenpaare die Spurkreise $\mathbf{L}_3$ und $\mathbf{L}_4$ berühren und somit bestimmen — in unserem Fall sind die Mittelpunkte derselben die Schnitte der Centrale mit den Spuren von $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$.

Das Projectionscentrum gehört zu einer Gruppe von acht Punkten in der Curve, unter deren Bildern die der Kegelmittelpunkte M_i' sind; die zugehörigen Ebenen $\mathbf{H}_{12}$ durch $M_1 M_2$ sind die projicierende Ebene dieser Geraden und die in Bezug auf $\mathbf{P}_3$ und $\mathbf{P}_4$ zu ihr harmonisch conjugierte, d. h. in unserm Fall symmetrische; die letztere liefert die Punkte M_3' und M_4' des Curvenbildes auf den Kreisen $\mathbf{L}_3$ und $\mathbf{L}_4$, die man auch durch die Verbindung der aus den vorerwähnten Grenzlagen erhaltenen vier Punkte des Durchdringungsbildes findet, und dazu die in den Schnittpunkten der Geraden $M_1'M_3'$, $M_2'M_4'$ und $M_1'M_4'$, $M_2'M_3'$ projicierten, mit M bezeichneten; der Schnitt von $M_1'M_2'$ mit $M_3'M_4'$ ist das Bild des Punktes der Gruppe, als deren erster das Centrum gezählt werden mag, dessen Bild M als Durchstosspunkt S_t^c der Tangente im Centrum erhalten wurde, d. h. als Schnitt der Tangenten des Bildes in den M_i'. Natürlich haben die von den Spuren der $\mathbf{H}_{12}$ in $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ ausgeschnittenen vollständigen Vierecke wieder die Durchstosspunkte der Quadrupelkanten S_{14} und S_{13}, resp. S_{24} und S_{23}, der ausser $M_1 M_2$ durch M_1 und M_2 gehenden also, zu Diagonalpunkten; und wenn man zur projicierenden Ebene $\mathbf{H}_{12}$ von $M_1 M_2$ in gleicher Weise die Hülfsebene von $M_2 M_4$ aus S_{13} ergänzt und die Diagonalpunkte des von ihnen in $\mathbf{L}_3$ bestimmten Vierecks aufsucht, so erhält man auch S_{34}, den Durchstosspunkt der Kante $M_3 M_4$.

Die Tangenten der Grundcurve in den acht Punkten einer Gruppe haben aber nach II, § 25,47 die Eigenschaft, dass jede derselben in ihren Schnittpunkten mit den Ebenen des Quadrupels von vier andern geschnitten wird, und es zerfällt somit jede Gruppe in zwei Halbgruppen wie M_i und M; die Tangenten in den vier Punkten M haben also vier Punkte des Spurkreises $\mathfrak{S}$ von dem durch die projicierende Tangente bestimmten Hyperboloid zu Durchstosspunkten und die vier Tangenten des Bildes begegnen sich also im letzten reellen Schnittpunkt F dieses Kreises mit dem Curvenbilde; und da die Verbindungsgeraden der M unter einander, welche sich als Gegenseitenpaare des Vierecks der M im Curvenbilde projicieren, Linien e auf derselben Fläche des Büschels sind, so sind auch die drei Diagonalpunkte jenes Vierecks Punkte F im Curvenbild — es sei bemerkt, aus den M genau so gefunden, wie diese aus den M_i'.

Die vier Tangenten des Curvenbildes aus dem Punkt F können in drei Arten als zwei Paare einer Involution zweiten Grades aufgefasst werden, dazu die Strahlen ihrer Berührungspunkte als Doppelelemente an einem der drei andern Punkte F; macht man eines dieser Involutionenpaare projectivisch, indem man in beiden das aus dem Scheitelstrahl entspringende Paar als drittes sich entsprechen lässt, so erzeugen sie die Curve dritter Ordnung, weil ihr Erzeugniss die vier Punkte M und ihre Tangenten nebst den Punkten F enthält. In Folge dessen bilden die vier Tangenten in den F ein Büschel aus einem Punkt T der Curve und die Diagonalpunkte ihres Vierecks sind drei weitere Punkte T derselben, d. h. die F sind die Bilder der Punkte einer Halbgruppe in der Curve.

Es ist der Ausdruck ihrer Bedeutung als Scheitel erzeugender Involutionen, dass je zwei Punkte F Fundamentalpunkte für eine unendliche Folge Steiner'scher Vierseite sind. Die vier Punkte F bestimmen aber vier Kreise $\mathfrak{S}$ des Spurenbüschels, die Spuren von vier Hyperboloiden, deren Regelschaaren jene Strahleninvolutionen zu ihren Bildern haben, sodass je ein Paar von Erzeugenden der einen Fläche sich mit einem Paar von jeder der drei andern zu einem windschiefen Vierseit zusammensetzt, dessen Ecken auf der Grundcurve liegen. Die Combination einer dieser Flächen mit den drei andern erzeugt

auf ihr drei Involutionen ihrer Regelschaaren, deren Bilder zu drei Polen P eines Tripels in Bezug auf ihren Spurkreis führen, die paarweise für alle auf sechs Kreisen des Spurenbüschels liegen, die sie als Träger projectivischer Büschel erzeugen. Im Fall unserer Figur fallen vier derselben unendlich fern.

Combiniert man die Involutionen, die ihre Scheitel auf dem unendlichen Ast haben, so hat man reelle Doppelelemente für die erste, die nach den Berührungspunkten N der Tangenten unter den Strahlen der andern gehen, sodass diese Punkte N wieder die Bilder einer Halbgruppe sind; und da F ein Diagonalpunkt ihres Vierecks ist, so sind die beiden andern auch Punkte F.

Weil die Punkte F, durch deren projicierende Strahlen wir sie bestimmen, vier Punkte einer involutorischen Gruppe sind, so bilden die betrachteten vier Flächen die Gruppe einer Involution vierten Grades unter den Flächen des Büschels; und offenbar entsteht die ganze Flächeninvolution, wenn man alle Halbgruppen der Curve nach einander mit deren Centrum verbindet, also mit einem beliebigen Punkt der Curve; die Bewegung desselben in der Curve und jeweilige Verbindung mit einer Halbgruppe führt zu der nämlichen Involution. Für festes Centrum und das Bild der Curve ergiebt sich: Die Verbindungsgeraden eines Punktes P der Curve dritter Ordnung mit den Punkten einer Gruppe schneiden die Curve in Punkten einer zweiten Gruppe; man erhält alle Gruppen, wenn der Punkt P die Curve durchläuft.

Verbindet man zwei beliebige Gruppen von F.-Punkten unter sich, so begegnen sich die sechszehn Verbindungsgeraden zu vier in Punkten einer dritten Gruppe.

Die Flächen einer Gruppe der Involution fanden wir bestimmt durch die Bisekantenpaare zwischen den Punkten einer Halbgruppe der Grundcurve und durch ihre Tangenten in denselben; jene, die Geraden e der drei ersten, führten als Doppelelemente der Involutionen ihrer Regelschaaren bei der Combination mit der vierten auf die Berührungspunkte der Tangenten in dieser; da aber die Doppelelemente irgend einer Combination die degenerierten unter den Steiner'schen Vier-

seiten darstellen, so müssen die Doppelelemente irgend einer Combination gegenseitig zu den Berührungspunkten führen, oder diese Doppelelemente sind Linien e und die zwölf Halbgruppen, die sie aus der Curve schneiden, sind mit den vier Berührungshalbgruppen der Flächen identisch; die auf jeder Fläche gelegenen drei Paare von Linien e gehen nach den Berührungspunkten der Tangenten der drei andern, und die durch eine Berührungshalbgruppe bestimmten drei Paare von Linien e sind die Doppelelemente in den Involutionen der drei andern.

Die projicierenden Tangentialebenen der Flächen einer Gruppe haben die Geraden von S_t^c nach den Punkten der F.-Gruppe zu ihren Spuren und zwei derselben würden zusammenfallen, d. h. ein Doppelelement der Flächeninvolution vierten Grades liefern, wenn die Gerade zwischen zwei Punkten F durch S_t^c ginge. Zur Bestimmung dieser sich selbst entsprechenden oder Doppelflächen sind also die der Centrumstangente begegnenden also auf ihrem Hyperboloid liegenden Geraden e anzugeben. Die Bilder dieser Geraden oder die Spuren der projicierenden Tangentialebenen dieser Flächen sind somit die Doppelelemente der drei durch die Tangenten in den Punkten M_t' bestimmten Involutionen, die also auf bekannte Pole P eines Tripels führen.

Die Vereinigung geht paarweise innerhalb dreier verschiedener Gruppen vor sich, sodass die Doppelflächen drei vollständige Gruppen repräsentieren.

Durch die beiden Regelschaaren werden die vier Berührungsgruppen eines Elements der Flächeninvolution in zwei Abtheilungen aus Halbgruppen M, N, P, Q — die letzteren vorher nicht erwähnt, weil sie imaginär sind; sie liegen aber auf reellen Strahlenpaaren aus den betrachteten Punkten F — und M^*, N^*, P^*, Q^* getheilt; die sechs Ebenen durch jeden der vier Punkte einer unbesternten Gruppe nach den drei Paaren der Verbindungsgeraden in den drei nicht zugehörigen besternten, die auf der zugehörigen Fläche liegen, sind die Tangentialebenen der sechs Doppelflächen $V^{(4)}$; oder die Verbindungsgeraden der Punkte einer unbesternten Halbgruppe mit den Punkten der besternten der drei andern sind zu je acht Erzeugende der zusammengehörigen Paare von Flächen $V^{(4)}$. Die sechszehn Verbindungsgeraden der Punkte N in der Figur mit

den Punkten M_i' gehen somit zu vier durch die Punkte F_r projicierender Tangentialebenen der $V^{(4)}$.

Das Vorige sagt zugleich aus, dass die gemeinsame Developpable vierter Classe zweier Flächen $V^{(4)}$, die aus derselben Vierergruppe entstanden sind, auch gemeinsame Developpable von zweien der Regelflächen vierten Grades ist, zu denen die betreffenden Linien e gehören; natürlich nicht die gesammte, vielmehr nur der Rest zu einer allen drei Regelflächen vierten Grades gemeinsamen Developpabeln von der Classe zwölf, die als Umhüllte aller Ebenen zu bezeichnen ist, welche drei Punkte einer Halbgruppe verbinden. Offenbar werden dadurch die Tangentialebenen dieser Developpabeln in Gruppen zu vier oder in Tetraeder geordnet, sodass jedes die Grundcurve in einer weiteren Halbgruppe von Punkten schneidet.

Es findet Reciprocität statt nach der früher (§§ 20. 29, 14. 16) betrachteten Art zwischen den Punkten des Raumes und ihren Harmonicalebenen in Bezug auf das Quadrupel, die Ebene dreier Punkte einer Halbgruppe ist die Harmonicalebene des vierten; aus einer achtpunktigen Gruppe der Grundcurve entspringen acht solche Ebenen, die sich viermal paarweis in den Quadrupelebenen schneiden und die Involutionen auf den Quadrupelkanten jeder Ebene in projectivische Zuordnung bringen, deren Erzeugniss eine in ihr liegende Doppelcurve vierter Classe ist mit Spitzen in den Schnittpunkten dieser Kanten mit dem zugehörigen Kegel im Büschel. Jede Quadrupelebene berührt die Developpable vierfach.

Unter den zwölf projicierenden unter den Tangentialebenen derselben sind drei die Ebenen des durch das Centrum bestimmten Tetraeders, die neun andern Ebenen der Tetraeder, für welche das Centrum der vierte Schnittpunkt einer seiner Ebenen ist, also die projicierenden Tangentialebenen der drei Regelflächen vierten Grades, oder ihre Spuren die neun gemeinsamen Tangenten der drei Curven dritter Classe, welche die Umrisse dieser Flächen sind und von den Verbindungslinien der F.-Punktegruppen umhüllt werden. Die Spuren s^v sind die noch durch S_i^e gehenden Tangentenpaare dieser Curven.

Ein Flächenpaar $V^{(4)}$, das aus der nämlichen Gruppe der Involution entstanden ist, bestimmt durch die Diagonalen der auf ihm liegenden geschlossenen Vierseite als Linien e mit

zwei Gegenkanten des Quadrupels Punkt- und Ebenen-Involutionen J mit den zugehörigen Ecken und Ebenen des Quadrupels als gemeinsames Paar. Die Gruppen der Flächeninvolution bringen die Involutionen J an sämmtlichen Kanten in solche Beziehung, dass ihre Ebenenpaare die nämlichen vier Gruppen ihrer Berührungspunkte herausschneiden; und wenn man zu den Ebenen, die ein Punkt M der Grundcurve mit den sechs Quadrupelkanten bestimmt, in allen Involutionen die entsprechenden nimmt, so bestimmen diese auf der Grundcurve die noch fehlenden drei Halbgruppen N, P, Q. Die Benutzung dieser Involutionen auf zwei Gegenkanten zeigt dann, dass die zwei Gruppen von acht Verbindungsgeraden aus den Paaren der Scheitel der Curve (II, § 25, 9) in allen vier Quadrupelebenen je auf derselben Fläche $V^{(4)}$ liegen. In der Figur müssen daher die zwei Diagonalpunkte des Vierecks von vier Scheiteln S_i, von denen je zwei denselben Index haben, und so dass die Verbindungsgeraden von diesen dasselbe Gegenkantenpaar treffen, zwei Punkte F_ν sein. Wir bemerken, dass die Ausführung nur vier Punkte S_i hervorhebt, weil die andern vier den Punkten F benachbart sind.

1) Von den sechs Flächen $V^{(4)}$ des Büschels sind im Fall des reellen Quadrupels zwei nicht reell, zwei elliptisch und zwei hyperbolisch; im Fall des imaginären Quadrupels zweimal zwei reelle Hyperboloide.

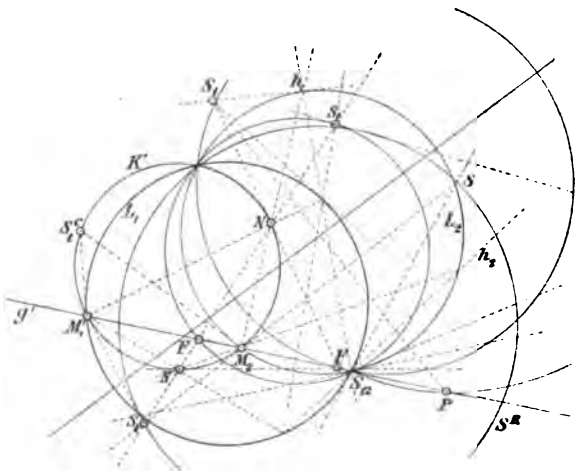
2) Im Fall der eintheiligen Grundcurve oder des Quadrupels aus zwei reellen Ecken, Flächen und Kanten sind von den Flächen $V^{(4)}$ vier nicht reell und zwei, eine elliptische und eine hyperbolische, reell.

3) Im Fall der Berührung der reellen Kegelflächen im Büschel wird die Flächeninvolution unserer Untersuchung quadratisch, weil zwei Flächen jeder Gruppe mit dem uneigentlichen doppeltprojicierenden Kegel (II, § 25) vereinigt sind; dieser ist auch die eine der sich selbst entsprechenden Flächen und die andere ist elliptisch im Fall des Knotens und hyperbolisch im Fall des isolierten Doppelpunktes. Im Fall der Curve mit Spitze, wo die Tangente der Grundcurve in derselben die einzige eigentliche Quadrupelkante ist, kann von Involution keine Rede sein.

4) Eingehende Discussion verdient noch der Fall der Kegel mit gemeinsamer Mantellinie $M_1 M_2$ und der Fall der sich doppelt berührenden Kegel, deren Verhältnisse nur von den Involutionen auf der Verbindungsgeraden der Doppelpunkte, aber nicht von diesen selbst abhängen. Wir besprechen den ersten Fall an Hand

der Fig. 37 durch das Bild aus einem Punkt der Curve dritter Ordnung. Die beiden Kegel $M_1\mathbf{L}_1$, $M_2\mathbf{L}_2$ haben die Gerade M_1M_2 gemein, ihre Tangentialebenen längs derselben sind die beiden eigentlichen Quadrupelebenen, die Punkte M_1, M_2 die Ecken desselben, die Gerade M_1M_2 vertritt alle sechs Kanten; Punkt- und Ebenen-Involution für das zweite Paar der Quadrupelecken sind unbestimmt. Das Bild der Curve erscheint als Kreis K und ein Paar $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ der Ebeneninvolution an M_1M_2 bestimmt auf ihm zwei Punkte N, deren Tangenten sich auf ihr begegnen und deren Verbindungsgerade daher durch den Schnittpunkt S_t seiner Tan-

Fig. 37.



genten in M_1' und M_2' geht. Jede Fläche des Büschels besitzt also zwei Tangenten, deren Berührungspunkte als Verbindungslinien dasjenige Hyperboloid durch die Raumcurve dritter Ordnung bestimmen, welches die Tangenten derselben in M_1 und M_2 enthält. Dieses Hyperboloid vertritt die einzige hier vorkommende Regelfläche vierten Grades, seine Spur $\mathbf{S}^R$ ist durch die Durchstosspunkte der Tangenten in M_1, M_2 und der Geraden NN bestimmt. Der Schnitt der Tangenten in N und der Punkt in ihrer Verbindungsgeraden mit M_1M_2 sind je ein Paar der Involution der Quadrupelkante und das Curvenbild entspringt aus der projectivischen Zuordnung der Polarinvolutionen für K an ihnen, also mit einem Doppelstrahl als entsprechend gemein. Die Involution der F.-Gruppen ist auf der Geraden und auf der Curve quadratisch, die gemeinschaftlichen Punkte M_1, M_2 sind die Doppelelemente für beide. Die Verbindung eines Paares F der Involution auf der Geraden mit einem Paare N der Involution auf der Curve liefert ein

geschlossenes Vierseit auf zwei Flächen, und zwar für die projectivische Zuordnung derjenigen Schaaren, welche keine Tangenten enthalten. Die Verbindung irgend zweier F.-Punktepaare der Curve ergiebt ein Vierseit auf zwei Flächen für diejenige Schaar, zu der die Gerade gehört; für beide Involutionen ist die Gerade ein Doppelelement und entspricht sich selbst. Die Flächeninvolution ist quadratisch. Da nur in M_1 oder M_2 ein Punkt N mit einem Punkt F auf einer Geraden durch S_t^e liegen kann, so kann es keine eigentlichen sich selbst entsprechenden Flächen geben; die Kegel vertreten sie.

5) Zu den Angaben des § 44 fügen wir hinzu, dass durch projectivische Zuordnung der Involutionen in den nicht reellen Regelschaaren einer elliptischen Fläche ausser der zweitheiligen Durchdringung mit vier reellen doppeltprojicierenden Kegeln noch entstehen eine Curve mit Knotenpunkt bei zwei entsprechenden Doppelelementen, und ein Paar von Ellipsen mit nicht reellen Schnittpunkten und auf zwei reellen Kegelflächen bei zweimal zwei solchen.

6) Die Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt kann nicht in dieser Weise erzeugt werden.

57. Die homogene Gleichung zweiten Grades mit vier Veränderlichen $\mathbf{S} = 0$ oder

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{13}x_1x_3 + \cdot = 0$$

wird durch Einsetzung von $(x_i' + \lambda x_i'')$ für x_i mit Anordnung nach Potenzen von λ

$$\mathbf{S}' + \lambda P + \lambda^2 \mathbf{S}'' = 0,$$

wenn $\mathbf{S}'$ und $\mathbf{S}''$ das in x_i' resp. x_i'' geschriebene Polynom $\mathbf{S}$ bezeichnen und P das Doppelte der in den x_i' und x_i'' symmetrischen und bilinearen Function bedeutet

$$x_1'(a_{11}x_1'' + a_{12}x_2'' + a_{13}x_3'' + a_{14}x_4'') + x_2'(a_{12}x_1'' + a_{22}x_2'' + \cdots) + x_3'(a_{13}x_1'' + \cdots) + x_4'(a_{14}x_1'' + \cdots)$$

oder

$$x_1''(a_{11}x_1' + \cdots) + x_2''(a_{12}x_1' + \cdots + a_{24}x_4') + x_3''(a_{13}x_1' + \cdots + a_{34}x_4') + x_4''(a_{14}x_1' + \cdots + a_{44}x_4').$$

Daraus folgt für das Paar der Parameterwerthe der Schnittpunkte der Geraden $X'X''$ mit der Fläche zweiter Ordnung wie in § 49 (es könnte also auch die weitere Entwickelung ganz ebenso gegeben werden)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4\mathbf{S}'\mathbf{S}''}}{2\mathbf{S}''},$$

deren Summe und Product also resp. sind $-P:\mathfrak{S}''$ und $\mathfrak{S}':\mathfrak{S}''$. Die beiden Doppelverhältnisse der Punkte λ_1, λ_2 mit den Punkten X', X'' sind somit $\lambda_1:\lambda_2$ und $\lambda_2:\lambda_1$ mit dem Product Eins und der Summe $(\lambda_1^2+\lambda_2^2):\lambda_1\lambda_2$ oder

$$\{(\lambda_1+\lambda_2)^2-2\lambda_1\lambda_2\}:\lambda_1\lambda_2;$$

diese Doppelverhältnisse d_1, d_2 sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$d^2-\frac{P^2-2\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''}{\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''}d+1=0.$$

Die drei speciellen Werthe der Doppelverhältnisse (I, § 16, 10, 12) $d=-1$, $d=+1$ und $d=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ fordern somit der Reihe nach

$$P=0;\quad P^2-4\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''=0\quad\text{und}\quad 3\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''-P^2=0;$$

die erste Relation fordert die Lage von X'' in der Polarebene von X' oder umgekehrt, wofür λ_1 und λ_2 entgegengesetzt gleich sind, d. h. dass X', X'' harmonische Pole sind in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung. Die zweite fordert, dass X'' in dem Mantel des aus X' an die Fläche gehenden Tangentenkegels liegt, wofür λ_1 und λ_2 gleich werden. Jene ist also für x_i' als die Coordinaten des Pols unter Ersetzung der x_i'' durch die laufenden Coordinaten die Gleichung der Polarebene; diese unter den gleichen Voraussetzungen die Gleichung des von X' ausgehenden Tangentenkegels der Fläche. Der Forderung auf gleiche fundamentale Doppelverhältnisse entspricht für jeden Punkt X' eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung unter denen, welche die Fläche $\mathfrak{S}=0$ in ihrem Querschnitt mit der Polarebene von X' ringsum berühren; mit der Gleichung

$$3\mathfrak{S}'\mathfrak{S}-P^2=0.$$

Für X' als einen Punkt der Fläche $\mathfrak{S}=0$ verschwindet $\mathfrak{S}'$ und man erhält ausser $\lambda=0$ auf jedem von ihm ausgehenden Strahl $X'X''$ den Schnittpunkt mit der Fläche aus $\lambda=-P:\mathfrak{S}''$, der für $P=0$ gleichfalls mit ihm zusammenfällt; die Polarebene wird zur Tangentialebene. Zugleich repräsentiert diese doppelt gezählt den Tangentenkegel der Fläche aus ihrem Punkt X'.

Wir besprechen wieder die wichtigsten Anwendungen in ihrer allgemeinen Form.

Zuerst den Uebergang von der Gleichung in Punktcoordinaten x_i zu der Gleichung derselben Fläche zweiten Grades in Ebenencoordinaten ξ_i.

Nach der entwickelten Form von $P = 0$ sind die Coordinaten ξ_i der Polarebene des Punktes x_i' in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung $\mathfrak{S} = 0$ aus

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' = k\xi_1,$$
$$a_{12}x_1' + \cdots = k\xi_2, \quad a_{13}x_1' + \cdots = k\xi_3, \quad a_{14}x_1' + \cdots = k\xi_4$$

zu bestimmen; tritt nun die Bedingung der Incidenz von Pol und Polarebene, d. i.

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' = 0$$

hinzu, welche die Polarebene zur Tangentialebene der Fläche im Pol macht, so können die x_i' linear eliminiert werden und die von den Coordinaten aller Tangentialebenen der Fläche zu erfüllende Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34}, & \xi_3 \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44}, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder für A_{ik} als die Elemente des adjungierten Systems zur Determinante der Coefficienten a_{ik} in entwickelter Form

$$A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + \cdots = 0.$$

Die gleiche Rechnung giebt den dualen Uebergang.

Sodann zweitens den Uebergang von der Gleichung in Punktcoordinaten zur Gleichung derselben Fläche in Strahlencoordinaten. Wir denken einen Strahl als Schnitt der Ebenen ξ_i, η_i bestimmt und bedingen seine Berührung mit der Fläche; findet dieselbe in einem seiner Punkte x_i' statt, so ist die Polarebene dieses Punktes in Bezug auf die Fläche nothwendig eine Ebene des Büschels ξ, η oder man hat

$$(\xi_1 + \lambda\eta_1)x_1 + \cdots = 0$$

bis auf einen Factor übereinstimmend mit

$$(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \cdots)x_1 + (a_{12}x_1' + \cdots)x_2 + (a_{13}x_1' + \cdots)x_3 + (a_{14}x_1' + \cdots)x_4 = 0;$$

dies liefert die vier Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' &= \varrho(\xi_1 + \lambda\eta_1), \\ a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4' &= \varrho(\xi_2 + \lambda\eta_2), \\ a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4' &= \varrho(\xi_3 + \lambda\eta_3), \\ a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4' &= \varrho(\xi_4 + \lambda\eta_4), \end{aligned}$$

welche mit den beiden für x_i' zu erfüllenden Incidenzbedingungen

$$\begin{aligned} \xi_1x_1' + \xi_2x_2' + \xi_3x_3' + \xi_4x_4' &= 0, \\ \eta_1x_1' + \eta_2x_2' + \eta_3x_3' + \eta_4x_4' &= 0 \end{aligned}$$

die lineare Elimination der sechs Grössen x_i', ϱ und $\lambda\varrho$ gestatten und die Gleichung der Fläche in Strahlencoordinaten liefern als

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \xi_1 & \eta_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \xi_2 & \eta_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \xi_3 & \eta_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \xi_4 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

in der That eine homogene Function zweiten Grades in den Strahlencoordinaten $(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i)$, aber eine sehr specielle, weil ihre Coefficienten sämmtlich aus den zehn Coefficienten der Function **S** zusammengesetzt sind.

Analog geht man von der Gleichung in Ebenencoordinaten zu der in Strahlencoordinaten über. Man vollzieht diese Uebergänge auch, indem man (II, § 39,13 f.) zu dem Strahl zwischen den Ebenen oder Punkten den Strahl zwischen ihren Polen resp. Polarebenen entwickelt und die Bedingung aufstellt, unter welcher diese einander harmonisch conjugierten Geraden sich schneiden; denn der Schnittpunkt ist ein Punkt der Fläche und die gemeinsame Ebene die zugehörige Polar- und Tangentialebene.

Ferner drittens die Entwickelung der Bedingung, unter welcher die Fläche zweiter Ordnung einen Doppelpunkt hat und also ein Kegel ist; und der, unter welcher die Fläche zweiter Classe eine singuläre Tangentialebene besitzt oder zum

Kegelschnitt wird als dem dualen Gegenbild des Kegels vom zweiten Grade.

Die Polarebenen aller Punkte des Raumes gehen durch die Spitze oder den Doppelpunkt des Kegels, und umgekehrt, wenn die Polarebenen von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades durch einen Punkt gehen, so muss diese Fläche ein Kegel und der Punkt seine Spitze sein. Nun sind die Polarebenen der vier F.-Punkte in Bezug auf die Fläche zweiten Grades der allgemeinen Gleichung

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0, \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 &= 0; \end{aligned}$$

die Bedingung ihrer Verträglichkeit oder das Verschwinden der Determinante ihrer Coefficienten oder der Discriminante zeigt somit die Existenz des Doppelpunktes an und charakterisiert die Kegelfläche. Diese Bedingung ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung vierten Grades zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Dualistisch ist das Verschwinden der Determinante der a_{ik} die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Ebenencoordinaten einen Kegelschnitt repräsentiert.

Setzt man in jene Bedingung die Binome $(a_{ik} + \lambda b_{ik})$ an Stelle der a_{ik}, d. h. stellt man die Bedingung des Kegels auf für die Flächen eines Büschels, so kann der Parameter λ auf vierfache Art so bestimmt werden, dass die zugehörige Fläche ein Kegel ist, da die Bedingung eine biquadratische Gleichung in λ liefert; in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung kommen also vier Kegel und dual in einer Schaar von Flächen zweiter Classe vier Kegelschnitte vor.

Die Spitzen jener Kegel und dual die Ebenen dieser Kegelschnitte haben als Pole resp. Polarebenen eine geometrisch leicht zu erkennende besondere Bedeutung. Die Polarebene

eines Punktes x_i' in Bezug auf die Fläche vom Parameter λ in dem Büschel aus den Flächen zweiten Grades $\mathbf{S}_1 = 0$ und $\mathbf{S}_2 = 0$ mit den Coefficienten a_{ik} und b_{ik} hat die Coordinaten

$$a_{11}x_1' + \cdots + \lambda(b_{11}x_1' + \cdots),\quad a_{12}x_1' + \cdots + \lambda(b_{12}x_1' + \cdots), \ldots,$$

die Summen aus den Coordinaten der Polarebene desselben Punktes in Bezug auf die Fläche $\mathbf{S}_1 = 0$ mit dem λfachen der gleichnamigen Coordinaten seiner Polarebene in Bezug auf $\mathbf{S}_2 = 0$; oder für $P_1 = 0$ als die erste und $P_2 = 0$ als die zweite der genannten Polarebenen des Punktes x_i' ist die Polarebene desselben Punktes in Bezug auf die Fläche vom Parameter λ im Büschel oder $\mathbf{S}_1 + \lambda\mathbf{S}_2 = 0$ durch $P_1 + \lambda P_2 = 0$ ausgedrückt. D. h. die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels vom zweiten Grade bilden ein Ebenenbüschel mit demselben Parameterwerth für entsprechende Flächen. Fallen nun für irgend einen Punkt die Polarebenen in Bezug auf zwei der Flächen, also z. B. $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ zusammen, so fallen mit denselben auch die für alle andern Flächen zusammen. Da nun für jenes Zusammenfallen nöthig ist, dass für eine Constante k

$$a_{11}x_1' + \cdots = -k(b_{11}x_1' + \cdots),$$
$$a_{12}x_1' + \cdots = -k(b_{12}x_1' + \cdots), \text{ etc.}$$

ist, so folgt, dass die Verträglichkeitsbedingung der vier in x_i' linearen homogenen Gleichungen

$$(a_{11} + kb_{11})x_1' + \cdots = 0,$$
$$(a_{12} + kb_{12})x_1' + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11}+kb_{11}, & a_{12}+kb_{12}, & a_{13}+kb_{13}, & a_{14}+kb_{14} \\ a_{12}+kb_{12}, & a_{22}+kb_{22}, & a_{23}+kb_{23}, & a_{24}+kb_{24} \\ a_{13}+kb_{13}, & a_{23}+kb_{23}, & a_{38}+kb_{33}, & a_{34}+kb_{34} \\ a_{14}+kb_{14}, & a_{24}+kb_{24}, & a_{34}+kb_{34}, & a_{44}+kb_{44} \end{vmatrix} = 0$$

die vier Werthe von k bestimmt, welche zu einem jenen Gleichungen zugleich genügenden Werthesystem der x_i' führen. Es giebt also vier Punkte, welche im Flächenbüschel zweiter Ordnung einerlei Polarebene haben in allen Flächen desselben und man sieht, dass die Bestimmungsgleichung der k dieselbe ist, wie die für die Parameter λ der Kegel im Büschel. Für jeden der Werthe von λ aus jener biquadratischen Glei-

chung ist der Schnittpunkt der vier Ebenen — wir wollen schreiben $\mathfrak{S}_{11} + \lambda \mathfrak{S}_{21} = 0$, $\mathfrak{S}_{12} + \lambda \mathfrak{S}_{22} = 0$, $\mathfrak{S}_{13} + \lambda \mathfrak{S}_{23} = 0$, $\mathfrak{S}_{14} + \lambda \mathfrak{S}_{24} = 0$, indem wir durch $\mathfrak{S}_{1i}$ die Hälfte des partiellen Differentials vom Polynom $\mathfrak{S}_1$ nach der Veränderlichen x_i und ebenso durch $\mathfrak{S}_{2k}$ die Hälfte des partiellen Differentials von $\mathfrak{S}_2$ nach x_k bezeichnen — ein Punkt dieser Gruppe*). Die Polarebene für jeden dieser Punkte ist die Verbindungsebene der drei andern oder sie bilden das für alle Flächen des Büschels gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole und Polaren. Wir wissen, dass für jede Ecke und Gegenfläche dieses Tetraeders sämmtliche Flächen des Büschels und ihre Durchdringungscurve mit sich selbst in centrischer involutorischer Collineation sind, aus II, § 43.

Hierdurch ist nun aber auch die geometrische Bedeutung des Parameters im Büschel von Flächen zweiten Grades begründet. Für die Flächen $\mathfrak{S}_1 = 0$, $\mathfrak{S}_2 = 0$, $\mathfrak{S}_1 + \lambda \mathfrak{S}_2 = 0$ des Flächenbüchels sind $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_1 + \lambda P_2 = 0$ die Polarebenen eines beliebigen Punktes, der Parameter einer Fläche im Flächenbüschel ist derselbe wie der ihrer Polarebene im Büschel der Polarebenen, und hat somit die geometrische Bedeutung des § 37. Wir sagen, das Büschel der Flächen zweiter Ordnung und das Büschel ihrer Polarebenen für einen beliebigen Pol seien projectivisch, sodass die Polarebenenbüschel von zwei oder mehreren verschiedenen Polen für die Flächen zweiter Ordnung desselben Büschels zu einander projectivisch sind, wenn man die Ebenen derselben einander zuordnet, welche Polarebenen derselben Fläche zweiter Ordnung des Büschels sind. Und wir gewinnen den Begriff der Projectivität von zwei Büscheln von Flächen zweiter Ordnung mittelst der projectivischen Zuordnung ihrer Polarebenenbüschel. Ebenso sind dual für die Flächen $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = 0$, $\Sigma_1 + \lambda \Sigma_2 = 0$ einer Schaar von Flächen zweiter Classe die Punkte $\mathfrak{P}_1 = 0$, $\mathfrak{P}_2 = 0$, $\mathfrak{P}_1 + \lambda \mathfrak{P}_2 = 0$ die Pole

*) Nach derselben Schreibung ist die Polarebene von x_i' in Bezug auf die Fläche vom Parameter λ im Büschel

$x_1'(\mathfrak{S}_{11} + \lambda \mathfrak{S}_{21}) + \cdots = 0$ oder $x_1(\mathfrak{S}_{11}' + \lambda \mathfrak{S}_{21}') + \cdots = 0$,

wenn $\mathfrak{S}_{1i}'$ etc. das Resultat der Substitution der x_i' an Stelle der x_i in $\mathfrak{S}_{1i}$ ausdrückt.

einer beliebigen Ebene; dieselben bilden eine gerade Punktreihe, in welcher jedem Punkt derselbe Parameter zukommt, wie der Fläche der Schaar, von der er der Pol ist, wenn man die Pole für die beiden fundamentalen Flächen der Schaar als die F.-Punkte der Reihe nimmt. Daher sind die Polreihen zweier Ebenen zu einander projectivisch und können als projectivisch zu den Flächen der Schaar bezeichnet werden; endlich kann man durch projectivische Zuordnung ihrer Polreihen in Bezug auf irgend eine Ebene zwei Schaaren von Flächen zweiter Classe zu einander projectivisch machen. Und man kann natürlich bei den Curven wie bei den Flächen zweiten Grades aus ihrer Projectivität unter einander oder mit Elementargebilden erster Stufe neue Curven und Flächen als die Erzeugnisse dieser projectivischen Verbindung hervorgehen lassen. Wir sprechen davon in den folgenden Paragraphen.

1) Die Polarebene der Richtung λ, μ, ν von $x:y:z = \lambda:\mu:\nu$ in Bezug auf die Fläche zweiten Grades

$$a_{22}x^2 + a_{33}y^2 + a_{44}z^2 + a_{11} + 2a_{23}xy + 2a_{24}xz + 2a_{34}yz + 2a_{12}x + 2a_{13}y + 2a_{14}z = 0$$ ist

$$\lambda(a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z + a_{12}) + \mu(a_{23}x + a_{33}y + a_{34}z + a_{13}) + \nu(a_{24}x + a_{34}y + a_{44}z + a_{14}) = 0.$$

Dieselbe ist zur gegebenen Richtung normal, wenn die Coefficienten von x, y, z in ihr zu λ, μ, ν proportional sind, was die drei Bedingungsgleichungen liefert

$$\lambda a_{22} + \mu a_{23} + \nu a_{24} = k\lambda, \quad \lambda a_{23} + \mu a_{33} + \nu a_{34} = k\mu, \quad \lambda a_{24} + \mu a_{34} + \nu a_{44} = k\nu.$$

Dieselben sind verträglich mit einander für die Werthe von k aus

$$\begin{vmatrix} a_{22}-k, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{23}, & a_{33}-k, & a_{34} \\ a_{24}, & a_{34}, & a_{44}-k \end{vmatrix} = 0,$$

in entwickelter Form

$$k^3 - k^2(a_{22}+a_{33}+a_{44}) + k(a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{33}a_{44} - a_{34}^2 + a_{44}a_{22} - a_{24}^2) - (a_{22}a_{33}a_{44} + 2a_{23}a_{34}a_{24} - a_{44}a_{23}^2 - a_{22}a_{34}^2 - a_{33}a_{24}^2 = 0;$$

d. h. für drei Werthe von k. Dieselben bestimmen, in die Bedingungsgleichungen der Rechtwinkligkeit eingesetzt, die Richtungen λ, μ, ν der drei Hauptaxen und damit als die Polarebenen der-

selben die drei Hauptebenen der Fläche; sie sind stets reell. (II, § 42.) Aehnlich für Kegelschnitte.

Der Schnittpunkt der drei Ebenen

$$a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z + a_{12} = 0, \quad a_{23}x + a_{33}y + a_{34}z + a_{13} = 0,$$
$$a_{24}x + a_{34}y + a_{44}z + a_{14} = 0,$$

durch welchen die Polarebenen aller Richtungen gehen, ist der Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades. Wenn die Determinante der Coefficienten der Veränderlichen in diesen Gleichungen verschwindet, die zugleich die Discriminante des Querschnittes der Fläche mit der unendlich fernen Ebene ist, so ist der Mittelpunkt der Fläche unendlich fern, der bezeichnete Querschnitt wird ein Linienpaar und die Fläche ist ein Paraboloid. (II, § 40, 7.) Wenn zugleich auch die Zähler der Ausdrücke für die Coordinaten des Mittelpunktes verschwinden, so wird der Mittelpunkt unbestimmt. Welches ist die geometrische Bedeutung davon?

2) Die Gleichung der Polarebene verbindet mit den Coordinaten des Pols die Coordinaten aller derjenigen zweifach unendlich vielen Punkte, die zu ihm harmonisch conjugiert liegen oder mit ihm Paare harmonischer Pole bilden, für die Fläche zweiter Ordnung. In Bezug auf das Flächenbüschel entsprechen einem Punkt die einfach unendlich vielen Punkte einer Geraden als seine Partner in Paaren harmonischer Pole für alle Flächen des Büschels. In einem linearen Gebilde zweiter Stufe aus Flächen zweiter Ordnung giebt es zu jedem Punkt nur einen, der mit ihm in allen Flächen derselben ein Paar harmonischer Pole bildet; die Polarebenen des Punktes bilden ein Bündel. Ist $\mathfrak{S}_1 + \lambda\mathfrak{S}_2 + \mu\mathfrak{S}_2 = 0$ die Gleichung des Gebildes und sind $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ die Gleichungen der Polarebenen des betrachteten Pols in den drei bestimmenden Flächen, so ist die Polarebene desselben in Bezug auf die Fläche von den Parametern λ und μ ausgedrückt durch $P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 = 0$. Für einen reellen gemeinsamen Punkt der drei Flächen als Pol geht das Bündel der Polarebenen in das der Tangentialebenen über. Und dual entsprechend.

3) Die Polarebenenbüschel von zwei Punkten in Bezug auf dasselbe Büschel von Flächen zweiter Ordnung sind projectivisch und erzeugen durch den Schnitt ihrer entsprechenden Ebenenpaare die Strahlen einer Regelschaar; diese sind die polarconjugierten der geraden Verbindungslinie der Pole in den Flächen des Büschels und es ist gleichgültig, für welche zwei Punkte der Geraden als Pole die Polarenbüschel gebildet werden. Durch jeden Punkt des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole des Büschels geht ein Strahl der Regelschaar. (II, § 45, 12.)

Die Polarebenenbüschel von drei Punkten, die ein Dreieck bilden, erzeugen durch den Schnitt ihrer projectivisch einander zugeordneten Ebenen — also der Polarebenen bezüglich derselben

Fläche — eine Raumcurve dritter Ordnung, die durch die vier Punkte des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole geht. Die Benutzung der beiden das Büschel bestimmenden Flächen zweiter Ordnung genügt zu ihrer Bestimmung, weil zu der der betheiligten Regelschaaren, als deren gemeinsame Durchdringung sie erhalten wird, während je zwei derselben ausser ihr eine Gerade gemeinsam haben. (II, § 45, 13.) Die Mittelpunkte der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels liegen in einer solchen Curve dritter Ordnung und das Büschel enthält daher im Allgemeinen drei Paraboloide.

Geht die Ebene durch einen der Punkte des gemeinsamen Quadrupels, so liegen ihre Pole in dem Kegelschnitt, in welchem die zu einer ihrer Geraden conjugierte Regelschaar die Gegenebenen des Quadrupels schneidet. Wie, wenn die Ebene durch zwei Punkte des Quadrupels geht?

4) Man erläutere die dual entsprechenden Ergebnisse über die Polreihen von zwei und von drei Ebenen und von den Erzeugnissen ihrer Projectivität.

5) Für einen Punkt der Grundcurve des Büschels von Flächen zweiter Ordnung wird das Büschel der Polarebenen zu dem der Tangentialebenen. Das Erzeugniss von zwei solchen projectivischen Tangentialebenenbüscheln ist eine Regelschaar durch die Ecken des Quadrupels, welche die beiden Grundcurventangenten zu Transversalen hat. Wenn die letzteren sich schneiden, was in einer Quadrupelebene wie auf der Doppelcurve geschieht, so wird sie zum Kegel zweiten Grades aus diesem Schnittpunkt, und da drei Erzeugende dieses Kegels in der Quadrupelebene liegen, zum Ebenenpaar, die Büschel sind perspectivisch, d. h. die beiden sich schneidenden Tangenten liegen in der Tangentialebene einer und derselben Fläche des Büschels, nämlich eines seiner doppeltprojicierenden Kegel.

6) Wenn drei Flächen zweiten Grades ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole besitzen, so bilden ihre acht gemeinsamen Punkte P und resp. Tangentialebenen $\mathbf{T}$ Achtergruppen von numerisch gleichen Coordinaten in Bezug auf jenes als fundamental. (§ 29, 4.) Durch jeden der acht Punkte gehen drei Tangentialebenen $\mathbf{P}$ der Flächen und drei Tangenten t ihrer Durchdringungscurven in Paaren; und in jeder der Ebenen liegen drei Berührungspunkte T der Flächen und drei Erzeugende e ihrer gemeinsamen Developpabeln zu zweien. Die Ebenen $\mathbf{P}$, die Geraden t und e berühren je eine Fläche zweiten Grades und die Punkte T liegen in einer solchen; die vierundzwanzig t und e liefern jedoch nicht eine sondern vier solche Flächen. Man stelle ihre Gleichungen auf.

7) Von den acht Grundpunkten eines linearen Gebildes zweiter Stufe von Flächen zweiter Ordnung ist einer durch die sieben übrigen bestimmt, weil zur Bestimmung des Gebildes sieben lineare Bedingungen genügen. Je zwei Flächen des Gebildes durchdringen

sich in einer die Grundpunkte enthaltenden Curve vierter Ordnung oder durch diese acht Punkte geht ein Bündel von solchen Curven. In demselben kommen achtundzwanzig zerfallende Durchdringungen vor, bestehend aus einer Geraden durch zwei der Grundpunkte und der Raumcurve dritter Ordnung durch die sechs übrigen; die Gerade muss Bisekante dieser Curve sein, weil beide zusammen die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung bilden müssen. Wenn man also — was durch Linealconstruction geschieht, wie wir wissen II, § 24, 6 — durch sechs von sieben gegebenen Grundpunkten die Raumcurve dritter Ordnung legt und wiederum linear durch den siebenten die Bisekante derselben bestimmt, so enthält dieselbe auch den achten Grundpunkt; d. h. man kann linear die sieben Geraden verzeichnen, die die sieben gegebenen Grundpunkte mit dem achten verbinden und ihn also durch zwei derselben bestimmen.

8) Die Bedingung der Berührung einer Geraden mit der Fläche zweiter Ordnung ist im Text als Bedingung ihres Schnittes mit der zu ihr conjugierten Geraden bezeichnet; man bestimme die Coordinaten der conjugierten aus denen der gegebenen Geraden und vergleiche das Ergebniss.

Wenn die Gerade mit ihrer conjugierten in Bezug auf die Fläche identisch ist, so liegt sie in der Fläche und wir erhalten die Bedingung für die Coordinaten von einer der geraden Erzeugenden der Fläche. Denken wir zwei Punkte X', X'' derselben, so muss, weil jeder ihrer Punkte X oder $x_i' + \lambda x_i''$ der Fläche angehört, die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Parameter der Schnittpunkte alle ihre Coefficienten gleich Null haben; also $\mathfrak{S}' = 0$, $\mathfrak{S}'' = 0$, $P = 0$. In Bezug auf eine Curve zweiter Ordnung bedingt die gleichzeitige Erfüllung dieser Gleichungen eine Relation unter den Coefficienten; für die Flächen nicht.

58. Die Projectivität eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung zu einem andern oder zu einem Ebenenbüschel wird durch sein Polarebenenbüschel für einen beliebigen Punkt vermittelt; dasselbe wird also zu einem Ebenenbüschel projectivisch sein, wenn diess Polarebenenbüschel es ist; und zu einem andern Flächenbüschel zweiter Ordnung, wenn die beiderseitigen Polarebenenbüschel zu einander projectivisch sind.

Das Erzeugniss der projectivischen Verbindung ist im ersten Fall eine Fläche dritter Ordnung, welche die Grundcurve des Flächenbüschels und die Scheitelkante des Ebenenbüschels enthält; im zweiten Fall eine Fläche vierter Ordnung durch die beiden Grundcurven vierter Ordnung erster Art. Insbesondere erzeugen die Flächen zweiter Ordnung eines Büschels mit ihren

Polarebenen für einen beliebigen Punkt eine solche Fläche dritter Ordnung.

Die Querschnitte der Tangentialebenen einer solchen Fläche dritter Ordnung mit ihr sind Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt im Berührungspunkt; eine zweifach berührende Ebene schneidet aus der Fläche eine Gerade und einen Kegelschnitt, deren gemeinsame Punkte die beiden Berührungspunkte derselben sind, wie diess für alle Ebenen des erzeugenden Ebenenbüschels stattfindet. Eine dreifach berührende Ebene schneidet die Fläche in dem Dreiseit, in dessen Eckpunkten sie dieselbe berührt. Solche dreifach berührende Ebenen sind fünf in dem erzeugenden Ebenenbüschel enthalten, nämlich diejenigen, welche die ihnen entsprechenden Flächen zweiten Grades berühren und somit in zwei Geraden durch den Berührungspunkt statt in einer Curve zweiter Ordnung schneiden. Ist nämlich die F.-Gerade $A_1 A_2$ die Scheitelkante des Ebenenbüschels, also seine Gleichung $x_3 - \lambda x_4 = 0$, und ist $U_1 - \lambda U_2 = 0$ die Gleichung der der Ebene λ entsprechenden Fläche zweiter Ordnung, so wird durch Ersetzung von x_3 durch λx_4 aus dieser die Gleichung der Centralprojection des bezüglichen Querschnittes aus dem F.-Punkt A_3 gebildet in Form einer homogenen Gleichung zweiten Grades in x_1, x_2, x_4, in welcher die Glieder $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$ den Parameter λ im ersten Grade, die Glieder $x_1 x_4, x_2 x_4$ im zweiten und das Glied x_4^2 im dritten Grade enthält. Die Bedingung seines Zerfallens in zwei Gerade, das Verschwinden der Discriminante dieser Gleichung, enthält daher λ im fünften Grade und liefert die Parameterwerthe für fünf Ebenen des Büschels $x_3 - \lambda x_4 = 0$, welche dreifach berührende des Erzeugnisses sind. Da nun für jede der gefundenen neuen Geraden die analoge Construction der Fläche dritter Ordnung ausführbar ist und derselbe Satz gilt, dass sie von zehn andern Geraden in der Fläche geschnitten wird, so sieht man, dass die allgemeine Fläche dritter Ordnung siebenundzwanzig Gerade enthält, von denen jede durch zehn andere von ihnen geschnitten wird, sodass sie $27 \cdot 5 : 3$ d. i. fünfundvierzig Dreiecke und dreifach berührende Ebenen bilden; während die die Fläche doppelt berührenden Ebenen in siebenundzwanzig Büscheln durch die Geraden der Fläche vertheilt sind. Man kann ein solches System von Geraden

construieren und damit die Fläche selbst zur Darstellung bringen wie folgt: Wird eine Gerade a_1 von fünf beliebigen andern Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 geschnitten, so bestimmt diese Gruppe eine Fläche dritter Ordnung nach § 33 weil $4+3\cdot5=19$; man construiere nun zu den fünf Vierergruppen $b_3b_4b_5b_6$, etc. die zweiten gemeinsamen Transversalen a_2, etc. also a_3, a_4, a_5, a_6, letztere zu der Gruppe $b_2b_3b_4b_5$ und zu vier von diesen die Transversale b_1, die dann auch die fünfte schneiden muss. So hat man zwölf Gerade, sechs a und sechs b; und man erhält nun durch den Schnitt der Ebenen a_ib_k, a_kb_i je eine neue Gerade c_{ik} der Fläche — weil jede solche Schnittlinie vier Punkte mit derselben gemein hat — zusammen die fünfzehn noch fehlenden Geraden des Systems.

Wenn die Grundcurve des Büschels von Flächen zweiter Ordnung die Scheitelkante des Ebenenbüschels zur Sekante resp. zur Bisekante hat, so erhält die erzeugte Fläche einen Doppelpunkt resp. zwei Doppelpunkte und die Zahl der in ihr enthaltenen verschiedenen Geraden vermindert sich; durch den einen Doppelpunkt gehen sechs Gerade der Fläche und in jeder der fünfzehn Verbindungsebenen ihrer Paare liegt eine Gerade, die ihn nicht enthält. Bei zwei Doppelpunkten hat man ausser der Verbindungsgeraden derselben, durch jeden der Doppelpunkte vier Gerade und sieben Gerade, welche keinen Doppelpunkt enthalten. Zählt man die durch einen Doppelpunkt gehenden Geraden zweifach und daher diejenige, welche zwei Doppelpunkte verbindet vierfach, so bleibt die Gesammtzahl der Geraden der Fläche siebenundzwanzig. Wir wissen, dass es eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten giebt und bemerken nun, dass die vierfach gezählten sechs Verbindungsgeraden derselben zusammen mit den drei einzelnen Geraden (§ 29, 7 f.) wiederum die allgemeine Anzahl liefern. Bei einer Fläche mit drei Doppelpunkten erscheinen die drei Verbindungslinien derselben vierfach, drei durch sie gehende Paare als doppelt und drei sie nicht enthaltende diese Paare schneidende einfache Gerade.

Aus einer geraden Punktreihe und einer zu ihr projectivischen Schaar von Flächen zweiter Classe, nämlich als Enveloppe aller der Tangentenkegel von den Punkten der Reihe an die entsprechenden Flächen der Schaar, entsteht ebenso eine Fläche dritter Classe mit dualen Haupteigenschaften.

Sind beide projectivische Gebilde erster Stufe Büschel resp. Schaaren von Flächen zweiten Grades, so ist ihr Erzeugniss eine Fläche vierter Ordnung resp. Classe. Die erstere erhält Doppelpunkte z. B. wenn die Grundcurven der Büschel gemeinsame Punkte besitzen.

Wenn die Grundcurven zerfallende sind, also entweder aus zwei Kegelschnitten, oder aus einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung mit zwei gemeinsamen Punkten bestehen, so können sie einen dieser Theile gemein haben und also Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve erster, zweiter oder dritter Ordnung erzeugen. So giebt der Fall von zwei projectivischen Kugelbüscheln bei allgemeiner Projectivität Flächen vierter Ordnung, welche den absoluten Kreis zur Doppelcurve haben. (Vergl. II, Schlussbetrachtung.) Ihre ebenen Querschnitte sind daher bicirculare Curven vierter Ordnung, die Querschnitte mit den Tangentialebenen insbesondere solche mit einem reellen Doppelpunkt im Endlichen; die Schnitte mit zweifach berührenden Ebenen bestehen aus je zwei Kreisen und die mit den dreifach berührenden Ebenen müssen je ein Paar von Geraden absoluter Richtung ausschneiden. Am a. O. ist die Zahl dieser Geraden in der Fläche auf sechszehn bestimmt worden, und wir können jetzt ihre Gruppierung mit derjenigen der Geraden in der Fläche dritter Ordnung verbinden. Wenn man nämlich die bezeichnete Fläche vierter Ordnung aus einem ihrer Punkte als Anfangspunkt durch reciproke Radien transformiert oder ihre Inverse bildet, so wird dieselbe zu einer Fläche dritter Ordnung durch den absoluten Kreis; diese Fläche enthält ausserdem in der unendlich fernen Ebene eine reelle Gerade und zehn andere von ihren Geraden müssen diese treffen, sodass also die sechszehn übrigen den absoluten Kreis schneiden. Diese letzten allein verwandeln sich durch Inversion wieder in Gerade, die also der Fläche vierter Ordnung angehören müssen. Jede dieser Geraden wird von fünf andern geschnitten.

Zwei Büschel von Flächen zweiten Grades, die einen reellen Querschnitt als gemeinsamen Theil ihrer Grundcurve haben, werden als Ort aller Schnitte ihrer entsprechenden Flächenpaare bei projectivischer Zuordnung eine Fläche vierter Ordnung erzeugen, die jenen Kegelschnitt zur Doppelcurve hat

und deren sechszehn Gerade reell sind; man kann nach dem Vorigen das System derselben construieren und damit die Fläche zur Anschauung bringen.

Hätten ferner die erzeugenden Büschel von Flächen zweiter Ordnung eine Fläche gemein, so würden die acht Schnittpunkte der beiden Grundcurven vierter Ordnung auf ihr zu Doppelpunkten des Erzeugnisses; und wäre diese gemeinsame Fläche überdiess sich selbst entsprechend, so würde der Ort der Durchdringungscurven ihrer entsprechenden Paare eine zweite Fläche zweiter Ordnung sein, die Büschel können als perspectivisch und diese Fläche zweiter Ordnung als das Analogon der Perspectivaxe bezeichnet werden. Aus den Gleichungen

$$U + \lambda V = 0, \qquad U + \mu V^* = 0$$

folgt für $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$

die Gleichung des Erzeugnisses

$$aU^2 - bUV^* - cUV + dVV^* = 0;$$

wenn aber die Parameterwerthe Null einander entsprechen oder für $d = 0$ wird sie

$$U(aU - bV^* - cV) = 0.$$

Projectivische resp. involutorische Zuordnung der Flächen innerhalb desselben Büschels liefert als Erzeugniss ein Paar reelle oder conjugiert imaginäre Flächen desselben als Doppelelemente.

Endlich können auch zwei involutorische Büschel von Ebenen oder von Flächen zweiten Grades durch projectivische Zuordnung ihrer Paare zu einander oder zu den Elementen eines einfachen Gebildes zur Erzeugung einer Fläche verbunden werden, deren Ordnung man leicht bestimmt und für welche die Scheitelkanten, resp. Grundcurven vierter Ordnung erster Art Doppellinien sind; wiederum mit manchen Specialfällen.

Aber auch drei Flächenbüschel können durch projectivische Verbindung ein Erzeugniss liefern, nämlich eine Curve als den Ort der gemeinsamen Punkte ihrer entsprechenden Elemente; dual erzeugen drei Flächenschaaren eine entwickelbare Fläche.

Den einfachsten Fall bilden drei projectivische Ebenenbüschel mit windschiefen Scheitelkanten; sie erzeugen eine Raumcurve dritter Ordnung als gemeinsame Curve der

zwei einfachen Hyperboloide, welche aus dem ersten und zweiten, resp. dem zweiten und dritten Büschel hervorgehen und für die die Scheitelkante des zweiten Büschels den Rest der Durchdringung bildet. (II, § 45, 19.)

Zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugen mit einem ihnen projectivisch zugeordneten Büschel von Flächen zweiter Ordnung eine Raumcurve fünfter Ordnung, die gemeinsame Curve des einfachen Hyperboloids der beiden ersten mit den Flächen dritter Ordnung aus einem von ihnen und dem dritten, neben der Scheitelkante des bezüglichen Ebenenbüschels. (Vergl. §§ 29, 43.)

Zwei projectivische Büschel von Flächen zweiter Ordnung und ein Ebenenbüschel liefern als den Ort der gemeinsamen Punktegruppen entsprechender Elemente eine Curve von der Ordnung acht aus den Flächen dritter Ordnung, die die Scheitelkante des Ebenenbüschels gemeinsam haben, etc.

Wären drei Büschel oder Schaaren einander projectivisch zugeordnet, welche theils oder ganz Involutionen bilden, von Flächen erster oder zweiter Ordnung resp. Classe, so entstehen Curven und entwickelbare Flächen, die sich ebenfalls leicht bestimmen lassen.

1) Die Flächen eines Büschels, welche reellen Gleichungen entsprechen, werden als die reellen Flächen desselben bezeichnet; ihre Polarebenen für reelle Pole sind reell, selbst wenn ihnen keine reellen Punkte angehören. So ist die Polarebene des Punktes (x', y', z') in Bezug auf das Ellipsoid mit imaginären Halbaxenlängen $b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 = -a^2b^2c^2$ reell, als ausgedrückt durch

$$b^2c^2xx' + c^2a^2yy' + a^2b^2zz' = -a^2b^2c^2;$$

dieselbe hat somit auch reelle Hauptebenen und Axen und überhaupt ein reelles System conjugierter Paare von Durchmessern und Diametralebenen.

Dagegen sind die den imaginären Parameterwerthen entsprechenden Flächen des Büschels etc. als imaginär zu bezeichnen, wie es auch die in Bezug auf sie genommenen Polarebenen sind.

2) Man denke ein Flächenbüschel zweiter Ordnung mit zwei Kegelschnitten als Grundcurve und erläutere das Erzeugniss der projectivischen Verbindung desselben mit einem Ebenenbüschel oder mit einem andern Büschel von Flächen zweiter Ordnung von derselben Art, wenn die aus dem Paar der Kegelschnittebenen bestehende

Fläche des ersten Büschels der zerfallenden Fläche des zweiten entspricht; oder wenn ausserdem eine Ebene jenes Paares mit einer von diesem oder mit der entsprechenden Ebene des Ebenenbüschels zusammenfällt.

3) Man untersuche die Construction der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art aus der projectivischen Verbindung von zwei Ebenenbüscheln mit einer Involution in einem dritten Ebenenbüschel (II, § 60, 3) und zeige insbesondere, dass durch einen Punkt im Allgemeinen drei Bisekanten der Curve gehen. (II, § 24, *14) (§ 43.)

4) Man erläutere die Bedeutung der Gleichung, welche das Erzeugniss der projectivischen Zuordnung eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung mit einer geraden Punktreihe resp. mit einer Schaar von Flächen zweiter Classe ausdrückt. (Vergl. II, § 49.)

59. Wir zeigen nun, dass die nämliche Interpretation des Parameters für lineare Gebilde beliebiger Grade fortbesteht, indem wir die Entwickelung des § 49 für diese wieder aufnehmen. Wir wollen sie für vier Veränderliche x_i ausgeführt denken. Sei U eine homogene Function n^{ten} Grades von x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) oder $U = 0$ die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung; so gehört der Punkt λ oder $x_i' + \lambda x_i''$ in der durch die Punkte x_i' und x_i'' bestimmten geraden Reihe der Fläche an, wenn λ einer der Werthe ist, welche die aus $U = 0$ nach Ersetzung von x_i durch $x_i' + \lambda x_i''$ entstehende Gleichung n^{ten} Grades in λ befriedigen. Man kann dieselbe nach dem allgemeinen Taylor'schen Satz einfach schreiben mittelst der Symbole

$$\Delta'' U' = x_1'' \frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + x_4'' \frac{\partial}{\partial x_4'}, \quad \text{etc.}$$

$$\Delta''^k U' = \left(x_1'' \frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots \right)^k,$$

wenn die Differentiationen an der mit gestrichenen Veränderlichen geschriebenen Function U vollzogen werden und die k^{te} Potenzierung von $\frac{\partial}{\partial x_i'}$ die $k$fache successive Wiederholung der Differentiation nach x_i' bedeutet und analog bei jedem Product aus solchen Potenzen. Dann ist das Ergebniss der bezeichneten Substitution die Gleichung, gleichviel für welche Zahl der Veränderlichen,

$$U' + \lambda \cdot \Delta'' U' + \frac{1}{2!} \lambda^2 \cdot \Delta''^2 U' + \cdots + \frac{1}{n!} \lambda^n \cdot \Delta''^n U' = 0;$$

dabei ist der Coefficient $\Delta''^n U'$ von λ^n, wie leicht zu sehen, gleich U''; der Coefficient von λ^{n-1}, also $\frac{1}{(n-1)!}\Delta''^{n-1}U'$, gleich $\Delta' U''$, u. s. w. Aus dem Coefficienten des k^{ten} Gliedes von links her gezählt entspringt der Coefficient des k^{ten} Gliedes von rechts her gezählt, indem man die $''$ und die $'$ mit einander vertauscht und k durch $(n-k)$ ersetzt.

Die n Wurzeln dieser Gleichung in λ, also $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sind die Parameter der n Schnittpunkte $X_1, X_2, \ldots X_n$ der Geraden $X'X''$ mit der Fläche n^{ter} Ordnung, resp. bei drei Veränderlichen mit der Curve n^{ter} Ordnung. Denken wir nun diese Gleichung durch den Coefficienten von λ^n d. h. durch U'' dividiert, sodass ihre linke Seite dem Product

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

gleich ist, so erhält man die Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln

$$(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \frac{U'}{U''},$$

$$(-1)^{n-1}\{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2 \cdots \lambda_n\} = \frac{\Delta'' U'}{U''},$$

$$(-1)^{n-2}\{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-3}\lambda_n + \cdots \lambda_3\lambda_4 \cdots \lambda_n\} = \frac{1}{2!}\frac{\Delta''^2 U'}{U''}, \text{ etc. bis}$$

$$-\{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\Delta''^{n-1}U'}{U''} = \frac{\Delta' U''}{U''}.$$

Wegen $\lambda_i = -\frac{X_i X'}{X_i X''}$ erhalten wir aber

$$-\{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\} = \frac{X_1 X'}{X_1 X''} + \frac{X_2 X'}{X_2 X''} + \cdots + \frac{X_n X'}{X_n X''};$$

$$\{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n\}$$

$$= \left\{\frac{X_1 X'}{X_1 X''}\frac{X_2 X'}{X_2 X''} + \frac{X_1 X'}{X_1 X''}\frac{X_3 X'}{X_3 X''} + \cdots + \frac{X_{n-1} X'}{X_{n-1} X''}\frac{X_n X'}{X_n X''}\right\}; \text{ etc.}$$

$$\{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} + \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2 \cdots \lambda_n\}$$

$$= \left\{\frac{X_1 X'}{X_1 X''}\frac{X_2 X'}{X_2 X''} \cdots \frac{X_{n-1} X'}{X_{n-1} X''} + \frac{X_1 X'}{X_1 X''} \cdots \frac{X_{n-2} X'}{X_{n-2} X''}\frac{X_n X'}{X_n X''} + \frac{X_2 X'}{X_2 X''} \cdots \frac{X_n X'}{X_n X''}\right\},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \frac{X_1 X'}{X_1 X''}\frac{X_2 X'}{X_2 X''} \cdots \frac{X_n X'}{X_n X''}.$$

Wenn einer der Coefficienten unserer Gleichung verschwindet, so ist die entsprechende Summe der Producte der Theilverhältnisse Null, sodass die vier beispielsweise geschriebenen Summen Null sind der Reihe nach zugleich mit

$$\Delta''^{n-1}U', \quad \Delta''^{n-2}U', \quad \ldots \quad \Delta''U', \quad U'$$

oder mit $\quad \Delta'U'', \quad \Delta'^{2}U'', \quad \ldots \quad \Delta''U', \quad U'.$

Denken wir dann den Punkt X'' als fest, sodass die Gerade $X'X''$ sich um denselben drehen kann, so schneidet sie in jeder ihrer Lage n Punkte $X_1, \ldots X_2$ aus der Curve oder Fläche und wenn einer der Coefficienten unserer Gleichung verschwinden soll, so wird dadurch der Punkt X' in jedem Strahl auf eine gewisse Gruppe von Lagen und für die Gesammtheit aller durch X'' gehenden Strahlen auf einen Ort beschränkt. Dieser Ort ist bei drei Veränderlichen x_i eine Curve oder Kegelfläche, je nachdem dieselben in der Ebene oder im Bündel interpretiert werden; und er ist bei vier Veränderlichen x_i eine krumme Fläche. Die Gleichung derselben ist durch das Verschwinden des betreffenden Coefficienten gegeben, und die durch das Verschwinden der entsprechenden Productensumme der Theilverhältnisse der Strecke $X'X''$ durch die dem Strahl angehörigen Punkte der Curve oder Fläche ist die geometrische Definition der neuen Curve oder Fläche.

Das Verschwinden des zuerst genannten von den vier beispielsweise hervorgehobenen Coefficienten liefert als solchen Ort eine Curve oder Fläche, die durch das Verschwinden einer in den Veränderlichen x_i' linearen homogenen Function algebraisch ausgedrückt wird, d. h. für drei Veränderliche eine Gerade (oder eine Ebene im Bündel) und für vier Veränderliche eine Ebene; oder wenn eine Gerade (Ebene) sich um einen festen Punkt (Strahl) in der Ebene (aus der Spitze) einer Curve (eines Kegels) n^{ter} Ordnung oder im Raum einer Fläche n^{ter} Ordnung dreht, so ist der Ort eines Punktes in ihr, welcher so liegt, dass die Summe der Theilverhältnisse der Schnittpunkte (Erzeugenden) der Geraden (Ebene) mit der (dem) ursprünglichen Curve (Kegel) oder Fläche stets verschwindet, eine gerade Linie (Ebene aus der Spitze) oder eine Ebene. Die Gleichung derselben ist im Fall von vier Veränderlichen

$$\Delta'U'' = 0 \quad \text{oder} \quad x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1''} + \cdots + x_4' \frac{\partial U}{\partial x_4''} = 0;$$

ihre geometrische Definition

$$\sum \frac{X_i X'}{X_i X''} = 0$$

lässt sich wegen $X_i X' = X_i X'' - X' X''$ auch in der Form schreiben

$$\frac{1}{n} \sum \frac{X' X''}{X_i X''} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{n}{X' X''} = \frac{1}{X_1 X''} + \frac{1}{X_2 X''} + \cdots + \frac{1}{X_n X''}.$$

Sie liefert auf jedem Strahl einen Punkt des Ortes, den man als das harmonische Centrum ersten Grades der Gruppe $X_1, X_2, \ldots X_n$ in Bezug auf X'' bezeichnet. Für $n = 2$ oder die Fläche (Curve) zweiter Ordnung wird diess

$$\frac{X' X''}{2} \left(\frac{1}{X_1 X''} + \frac{1}{X_2 X''} \right) = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{X_1 X''} + \frac{1}{X_2 X''} = \frac{2}{X' X''},$$

d. h. (I, § 16, 10) der Punkt X'' ist von dem Punkt X' durch die Schnittpunkte der Geraden $X' X''$ mit der Fläche (Curve) harmonisch getrennt, sein Ort ist die Polare des Punktes X'' in Bezug auf die Fläche (Curve). Die Gleichung

$$x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1''} + \cdots = 0$$

ist die Gleichung $P = 0$ der §§ 49, 57 und man sieht geometrisch wie algebraisch, dass für U als Function zweiten Grades kein anderer derartiger Ort existiert; letzteres weil schon die zweimalige Differentiation auf Constante führt.

Ebenso führt im allgemeinen Fall (insbesondere für $n \gtrless 3$) das Verschwinden des zweitgenannten Coefficienten auf die Gleichung einer Fläche oder Curve etc. zweiter Ordnung

$$\Delta'^2 U'' = 0 \quad \text{oder} \quad \left(x_1' \frac{\partial}{\partial x_1''} + \cdots \right)^2 U'' = 0,$$

d. h.

$$x_1'^2 \frac{\partial^2 U''}{\partial x_1''^2} + \cdots + 2 x_1' x_2' \frac{\partial^2 U''}{\partial x_1'' \partial x_2''} + \cdots = 0;$$

von der geometrischen Definition

$$\Sigma \lambda_i \lambda_k = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \frac{X_i X'}{X_i X''} \frac{X_k X'}{X_k X''} = 0,$$

d. h. auch

$$\sum \left\{ \left(1 - \frac{X' X''}{X_i X''} \right) \left(1 - \frac{X' X''}{X_k X''} \right) \right\} = 0,$$

nach welcher auf jedem Strahl aus X'' zwei Punkte X' gelegen sind, die ihr genügen und als harmonische Centra zweiten Grades der Gruppe $X_1, \ldots X_n$ in Bezug auf X'' zu bezeichnen sind.

Neben jener ersten Fläche oder Curve, der linearen Polare des Pols X'' in Beziehung auf die gegebene Fläche oder Curve n^{ter} Ordnung, nennt man diese die quadratische Polare desselben in Bezug auf sie. Für Flächen und Curven dritter Ordnung ist damit die Reihe der Polaren abgeschlossen.

Man sieht aber, dass einem Punkt als Pol in Bezug auf eine Fläche oder Curve n^{ter} Ordnung Polarflächen resp. Polarcurven von allen Ordnungen von der ersten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ entsprechen, die als Orte der harmonischen Centra ersten bis $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Gruppen $X_1, \ldots X_n$ auf allen Strahlen durch den Pol in Bezug auf ihn geometrisch definiert werden.

Die Operation ΔU liefert in successiver Wiederholung ihre Gleichungen, d. h. auch, eine beliebige Polarfläche oder Polarcurve des Pols X'' in Bezug auf eine gegebene Fläche resp. Curve ist auch seine Polare in Bezug auf jede andere seiner in Bezug auf dieselbe gebildeten Polaren, deren Ordnung die ihrige übersteigt.

Für die dual entsprechende Entwickelung in den Coordinaten ξ_i erhält man die geometrischen Interpretationen nach der Regel für den Parameter im Strahl- resp. Ebenenbüschel

$$\lambda = -\frac{\sin(\Xi, \mathrm{Y})}{\sin(\Xi, \mathrm{Z})} \qquad (\S\ 37);$$

die Reihe der Polaren eines Pols ξ_i'' beginnt mit einer linearen also punktförmigen oder erster Classe und endet in jedem Fall mit einer Polare der Classe $(n-1)$.

Dieselben Resultate lassen sich von denselben Grundlagen aus auch nach darstellend geometrischer construierender Methode erkennen, wie an dem Fall der ebenen Curven n^{ter} Ordnung kurz erläutert werden mag. Ist in der Ebene der Curve ein Pol gegeben, so ziehe man durch ihn nach einem beliebigen Punkt ausserhalb der Ebene eine Gerade und verbinde diesen und einen zweiten Punkt derselben mit der Curve durch ihre projicierenden Kegel. Diese beiden Kegel durchdringen sich als Flächen von der Ordnung n ausser in der gegebenen noch

in einer nicht ebenen Curve von der Ordnung $n(n-1)$, die die Ebene in $n(n-1)$ Punkten auf jener durchschneidet, welche sämmtlich Doppelpunkte der Durchdringung und daher nach II, § 20 Berührungspunkte beider Kegel, d. h. Berührungspunkte der Spuren bezüglicher gemeinsamer Tangentialebenen derselben sind; also die Berührungspunkte der vom Pol an die Grundcurve gehenden Tangenten.

Dieselbe Durchdringungscurve ist zugleich die Grundcurve eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung, unter denen eine in die Ebene der gegebenen Curve und eine Fläche von der Ordnung $(n-1)$ zerfällt, deren Schnitt mit jener Ebene durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte geht und durch dieselben völlig bestimmt ist (§ 33); dieser Schnitt ist die Polare der Ordnung $(n-1)$ des angenommenen Pols in Bezug auf die angegebene Curve n^{ter} Ordnung.

Die Ausführung der nämlichen Construction in Bezug auf diese Polare bestimmt ebenso die Polare von der Ordnung $(n-2)$, etc. Von der Polare zweiter Ordnung gelangt man so zuletzt zu der geraden Polare des Pols und kann von da aus die geometrischen Definitionen verfolgen wie vorher.

Die Construction zeigt die Analogie zu der der harmonischen Gruppe (§ 5) durch die Projection eines Paares aus zwei Punkten in einer Geraden durch den Pol als den ersten Punkt des zweiten Paares. Ihre Erweiterung aus dem Raum von zwei auf den von drei Dimensionen ist damit offenbar.

1) Man entwickle die Gleichung und bestimme die Coordinaten des Pols einer Geraden ξ_i'' in Bezug auf die durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellte Curve zweiter Classe.

2) Man bilde die Gleichungen der verschiedenen Polaren eines Elementes in Bezug auf die früher erwähnten Curven und Flächen dritter und vierter Ordnung resp. Classe und erläutere sie; insbesondere die Gleichungen der bezüglichen linearen Polaren der unendlich fernen Geraden resp. Ebene, also des Mittelpunktes der Classen-Curven und -Flächen.

3) Die harmonischen Centra verschiedener Grade für die Gruppen $U=0$ eines Elementargebildes erster Stufe in Bezug auf ein in demselben liegendes Element werden durch $\Delta''^k U' = 0$ dargestellt und bilden das Analogon der Polaren in der Theorie der homogenen Formen mit nur zwei Veränderlichen. Man zeige die Anwendung der zuletzt im Text entwickelten Methode auf diesen Fall.

4) Für $U = 0$ als eine homogene Function n^{ten} Grades in den Strahlencoordinaten p_{ik} liefert die Substitution von $p_{ik}' + \lambda p_{ik}''$ für p_{ik} eine analoge Entwickelung, deren geometrischer Ausdruck eine Theorie der Polarcomplexe der Geraden in Bezug auf den gegebenen Complex ist. Wir treten in diese Entwickelung nicht ein. (Vergl. jedoch § 30.)

5) Wenn gemäss § 35 die fünf homogenen Coordinaten x_i einer Kugel in Bezug auf fünf F.-Kugeln durch eine Gleichung verbunden sind, d. h. wenn ein dreifach unendliches System von Kugeln oder ein Kugelcomplex aus der Gesammtheit aller ausgeschieden ist, so liefert die Entwickelung des Substitutionsresultates von $x_i' + \lambda x_i''$ für x_i eine Lehre von den Polarcomplexen, etc. in Analogie zu dem Vorigen.

6) Für U als eine allgemeine homogene Function dritten Grades mit drei Veränderlichen, also $U = 0$ als Gleichung einer Curve resp. eines Kegels dritter Ordnung oder Classe wird die Grundgleichung des Textes

$$U' + \lambda \Delta'' U' + \frac{\lambda^2}{1.2} \Delta''^2 U' + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta''^3 U' = 0$$

oder

$$U' + \lambda \Delta'' U' + \lambda^2 \Delta' U'' + \lambda^3 U'' = 0;$$

und es sind U', $\Delta'' U'$, $\Delta' U''$ und U'' homogene Functionen der Grade 3 und 0, 2 und 1, 1 und 2, 0 und 3 in den einfach und resp. zweifach gestrichenen Veränderlichen. Setzen wir Veränderliche x_i voraus und ist x_i'' der Pol, also die x_i'' constante Zahlen, so sind U', $\Delta'' U'$, $\Delta' U''$ und U'' Functionen von den Graden 3, 2, 1, 0 resp. in den einfach gestrichenen oder veränderlichen Coordinaten; die drei ersten gleich Null gesetzt die Curve dritter Ordnung, den Polarkegelschnitt und die Polargerade des gegebenen Pols ausdrückend. Schreiben wir die Gleichung in der hiernach deutlichen Form

$$U + \lambda K + \lambda^2 g + \lambda^3 P = 0,$$

so giebt uns die Bedingung, unter welcher sie für λ zwei gleiche Werthe liefert, das Verschwinden ihrer Discriminante, die vom Pol an die Curve dritter Ordnung gehenden Tangenten; denn sie bedingt, dass die Verbindungsgerade des Pols x_i'' mit dem laufenden Punkte x_i zwei der Doppelwurzel entsprechende zusammenfallende Punkte mit der Curve $U = 0$ gemein hat. Nach der Algebra der binären Formen erhält man aber diese Bedingung in der Form

$$(27 U P^2 + 4 g^3 - 18 g K P) U = (g^2 - 4 K P) K^2,$$

zunächst eine homogene Function der x_i vom sechsten Grade, was also lehrt, dass von einem beliebigen Punkte x_i'' aus sechs Tangenten an die Curve dritter Ordnung gehen. Die Form der Glei-

chung, links das Product von zwei Functionen dritten Grades, rechts das von einer Function zweiten Grades in das Quadrat einer andern, zeigt an, dass der durch sie dargestellte Ort der sechs Tangenten die Curve $U = 0$ in den Punkten berührt, wo diese von dem Kegelschnitt $K = 0$, der ersten Polare des Pols, geschnitten wird; und dass er die Curve ausserdem in den sechs Punkten schneidet, welche sie mit dem Kegelschnitt $g^2 = 4KP$ gemein hat. Endlich zeigt die Form der Gleichung dieses Kegelschnittes, dass derselbe mit dem Polarkegelschnitt $K = 0$ die Polargerade $g = 0$ zur Sehne doppelter Berührung hat.

7) Im Fall der Curve n^{ter} Ordnung ergiebt sich ebenso, dass die $n(n-1)$ von einem Punkt ihrer Ebene an sie gehenden Tangenten ihre Berührungspunkte im Schnitt derselben mit der ersten Polare haben, und dass die $(n-2)$ Schnittpunkte einer jeden derselben mit der Curve in einer Curve von der Ordnung $(n-1)(n-2)$ liegen, die durch die Schnittpunkte der ersten und zweiten Polare des Punktes hindurch geht. Für die allgemeine Curve vierter Ordnung erhält man also zwölf Tangenten, deren vierundzwanzig fernere Schnittpunkte mit der Curve mit den sechs Schnittpunkten der ersten und zweiten Polare des Punktes auf einer Curve sechster Ordnung liegen.

8) Für einen auf der Curve selbst genommenen Pol ist $P = 0$ und die Grundgleichung reduciert sich auf $U + \lambda K + \lambda^2 g = 0$, ihre Discriminante aus der obigen allgemeinen Form auf $4g^3U = g^2K^2$ oder mit Ausscheidung der doppeltzählenden Polargeraden $4gU = K^2$; sie ist vom vierten Grade in den x_i und es gehen also vier Tangenten von dem Pol aus, die die Curve anderwärts berühren. Wir erklären dies weiter im folgenden Paragraph. Weil die reducierte Gleichung mit $K = 0$ liefert $U + \lambda^2 g = 0$ oder $\lambda^2 = -U : g$, so folgt, dass die Geraden aus einem Curvenpunkt die Curve und den Polarkegelschnitt in harmonischen Punktepaaren schneiden.

9) Die darstellend geometrische Behandlung der doppelt gekrümmten Durchdringungscurve **R** der beiden projicierenden Kegel einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung U aus zwei Punkten M_1, M_2 einer Geraden durch den Pol P mittelst ihrer Punkte und Tangenten fordert nach II, § 18 folgende zwei Constructionen: Eine Gerade dreht sich um P und es werden a) ihre Schnittpunkte mit U jeweilen mit den festen Punkten M_1', M_2' in einer Geraden durch P verbunden, sodass ein Ort R' der Gruppen von $n(n-1)$ Schnittpunkten dieser Strahlen ausser auf U entsteht. Man erläutert denselben, das Bild der Durchdringung, leicht nach dem Text. Es werden sodann b) in den Schnittpunkten der Transversalen aus P mit U die Tangenten an U verzeichnet und der Ort ihrer n^2 Schnittpunkte für jede Transversale gebildet; jeder dieser Schnittpunkte ist Durchstosspunkt der Tangenten der Curve **R** in den zwei Punkten,

in welchen sich die Verbindungsstrahlen ihrer Berührungspunkte an U mit M_1' und M_2' noch schneiden. Dieser Ort b) ist also die in der Grundebene gelegene Doppelcurve **D** der Tangentenfläche der Curve **R**; singuläre Punkte, die sie besitzt, können daher nicht weniger als dreifache Punkte sein, und sie hat keine Rückkehrpunkte in den Schnitten der Grundcurve U mit der Raumcurve **R**, sondern sie berührt dieselbe in diesen, also auf der ersten Polare von P.

10) Ist U eine allgemeine Curve dritter Ordnung, so wird der Ort a) sechster Ordnung als Bild einer Curve sechster Ordnung und schneidet die Grundcurve mit ihr zugleich in den sechs Punkten auf der ersten Polare des Pols P. Die Schnittpunkte der Ortscurve b) mit U können wir vollständig aufzählen, da nur die Tangenten von U aus P und die durch P gehenden Verbindungslinien conjugierter Punkte der Curve solche liefern können; jede der Tangenten liefert aber einen Punkt des Ortes in ihrem Berührungspunkt und zwei vereinigte Punkte desselben in ihrem dritten Schnittpunkt mit der Curve; d. h. die dem Ort b) mit der Grundcurve gemeinsamen Punkte bestehen aus sechs einfachen Punkten in der ersten Polare des Pols und aus sechs doppelt zählenden, also Berührungsstellen, in dem Kegelschnitt $g^2 = 4KP$ unter 6), welcher den ersten in einer Geraden $g = 0$ doppelt berührt; ausserdem gehen in jedem der drei Systeme conjugierter Punktepaare der Curve U drei Sehnen eines Paares durch P und liefern je drei Punkte unseres Ortes auf U und in einer Geraden, und zusammen siebenundzwanzig Punkte, die der Grundcurve und dem Ort b) gemeinsam sind, sodass dieser von der Ordnung neun ist. Dass die letztgenannten Geraden mit der Polargeraden g ein Büschel bilden, sowie dass auf g der Ort b) drei dreifache Punkte besitzt, ist abhängig von den Eigenschaften der Hesse'schen Curve, einer Curve dritter Ordnung, die wir später erwähnen (§ 61).

60. Liegt der Pol X'' in der Fläche oder Curve resp. berührt die Polebene Ξ'' dieselbe, so wird die Grundgleichung des vorigen Paragraphen in λ durch das Verschwinden von U'' auf den Grad $(n-1)$ reduciert; die Relation $\Delta' U'' = 0$ drückt dann aus, dass von den $(n-1)$ übrigen Schnittpunkten der Geraden $X'X''$ mit der Fläche noch ein zweiter in X'' liegt, resp. von den $(n-1)$ übrigen Tangentialebenen der Fläche durch dieselbe noch eine zweite mit Ξ'' zusammenfalle; d. h. dass sich X' auf einer Tangente und somit in der Tangentialebene von $U = 0$ in X'' befinde, resp. Ξ' durch eine Tangente und somit durch den Berührungspunkt von $U = 0$ mit Ξ'' gehe. Oder $\Delta' U'' = 0$ ist für veränderliche x_i' resp. ξ_i' die Gleichung der Tangentialebene resp. des Berührungspunktes

der Fläche $U = 0$ in X'' resp. Ξ''. Die lineare Polare eines Punktes der (Ordnungs-)Fläche ist ihre Tangentialebene in demselben, die einer Ebene der (Classen-)Fläche ihr Berührungspunkt mit derselben; und ebenso die lineare Polare eines Punktes der ebenen Curve ihre zugehörige Tangente, die einer Tangente ihr zugehöriger Berührungspunkt.

Nach dem Vorigen gehen die Tangenten der Grundcurve in ihren Schnittpunkten mit der ersten Polare eines gegebenen Pols durch diesen; aber es gilt allgemein, dass die linearen Polaren aller Punkte der ersten Polare eines Pols durch ihn gehen; ebenso die quadratischen Polaren aller Punkte der zweiten Polare, die cubischen aller Punkte der dritten, u. s. w. Denn

$$x_1'' \frac{\partial U}{\partial x_1'} + \cdots \quad \text{und} \quad x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1''} + \cdots$$

gehen durch Vertauschung der ein- und zweigestrichenen x_i in einander über, für x_i'' als die Coordinaten des Pols die linke Seite der Gleichung der ersten Polare in die der letzten oder der Polargeraden; die letztere ist eine Relation zwischen den Coordinaten des Pols und denen irgend eines Punktes der Polargeraden; denken wir den letzteren fest und den Pol veränderlich, so geht die Gleichung in die der ersten Polare über. Und ebenso in den übrigen Fällen.

Liegt insbesondere der Pol in der Polare, so ist er ein Punkt der Curve und alle Polaren eines Curvenpunktes gehen durch ihn hindurch, weil der Ausdruck $x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \cdots$ sich von der Function U selbst nur durch einen Zahlenfactor unterscheidet. Zugleich berühren alle Polaren einander und die Grundcurve in diesem Pol, weil die gerade Polare, die zugehörige Tangente der Grundcurve, zugleich die gerade Polare desselben Pols für alle seine höheren Polaren ist.

Alles analog für Oberflächen bezüglich der Tangentialebene als der linearen Polare des Berührungspunktes, und wiederum in dual entsprechender Interpretation.

Damit ergiebt sich die Formulierung für den Uebergang von der Gleichung einer Curve oder Fläche in Punktcoordinaten x_i zur Gleichung derselben Curve oder Fläche in Coordinaten ξ_i oder umgekehrt. Denn ist $U = 0$ die Gleichung

der Curve (Fläche) in Coordinaten x_i, und x_i' ein Punkt derselben, so ist die lineare Polare desselben $x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1'} + \cdots = 0$ von den Coordinaten $k\xi_i = \frac{\partial U}{\partial x_i'}$ für k als einen constanten Multiplicator; eliminiert man also die x_i' und die Constante k zwischen diesen Gleichungen und den beiden Gleichungen $U' = 0$ und $\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \cdots = 0$, so erhält man die Relation, welcher die Coordinaten ξ_i aller Tangentialebenen resp. Tangenten genügen, oder die Gleichung der Fläche resp. Curve in den ξ_i. Dual entsprechend kommt man von der Gleichung in den ξ_i $\Sigma = 0$ durch Elimination der ξ_i' und einer Constanten λ zwischen $\Sigma' = 0$, $\xi_1' x_1 + \cdots = 0$ und den $\lambda x_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi_i'}$ zu der entsprechenden Gleichung in den x_i.

Es ist nach dem Vorigen evident, dass für eine ebene Curve von der Ordnung n der Grad der Gleichung in den ξ_i die Zahl $n(n-1)$ nicht übersteigen kann; und in gleicher Weise ist die Ordnung einer Curve von der Classe n nicht grösser als und im Allgemeinen gleich $n(n-1)$. Denkt man sich eine Curve dritter Ordnung, so ergiebt sich ihre Classe im allgemeinen Fall gleich sechs; die Ordnung einer Curve sechster Classe ist aber im Allgemeinen dreissig und muss doch für die so erhaltene gleich drei wieder gefunden werden. Diess erklären und bedingen die Singularitäten der Curve, die singulären Punkte, also Doppel- und Rückkehrpunkte der Ordnungscurven und resp. die singulären Tangenten, Doppel- und Wendetangenten der Classencurven; denn sie stehen in besonderer Beziehung zu den Polarcurven.

Die ersten Polaren aller Punkte in Bezug auf eine Curve gehen einfach durch jeden Doppelpunkt und zweifach durch einen dreifachen Punkt derselben, die zweiten Polaren also noch einfach durch jeden dreifachen Punkt, u. s. w. Denn für den Doppelpunkt als F.-Punkt z. B. A_1 sind die in x_2 und x_3 niedrigsten Glieder der Curvengleichung vom Grade zwei, für den dreifachen Punkt vom Grade drei, etc.; also erscheinen diese Glieder in den Gleichungen der ersten, zweiten u. s. w. Polare, deren Bildung nur erste, zweite u. s. w. Differentiale von U umfasst, noch im ersten resp. zweiten u. s. w. Grade.

Und wenn von den Tangenten der Curvenäste in diesem vielfachen Punkte zwei zusammenfallen, so enthält die Gruppe jener in x_2, x_3 niedrigsten Glieder das Quadrat der linken Seite der Gleichung dieser Tangente als Factor, ihre ersten Differentiale also diese selbst, d. h. die erste Polare hat dieselbe Tangente in diesem Punkt.

In Folge dessen zählt ein Doppelpunkt als zweifacher und ein Rückkehrpunkt als dreifacher Schnittpunkt der Curve mit der ersten Polare eines beliebigen Punktes; u. s. w. Und da diese Schnittpunkte die Berührungspunkte der vom Pol an die Curve gehenden Tangenten sind, so erscheinen für jeden Doppelpunkt zwei und für jeden Rückkehrpunkt der Curve drei uneigentliche unter den Tangenten derselben aus einem Punkt ihrer Ebene. Die Zahl der eigentlichen Tangenten, d. h. die Classenzahl der Curve, die im Fall der nicht singulären das Product der Ordnungszahl in die um Eins verminderte Ordnungszahl ist, wird für δ Doppelpunkte um 2δ und für $\varkappa$ Rückkehrpunkte um $3\varkappa$ Einheiten vermindert. Und dual ganz ebenso für Doppel- und stationäre Tangenten. Wir haben die beiden Plücker'schen Gleichungen begründet (II, § 1, p. 4 Anm.):

$$\nu = \mu(\mu - 1) - 2\delta - 3\varkappa, \quad \mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - 3\iota.$$

Die Erzeugung der ersten Polarcurve durch die Bildung der projicierenden Kegel der Grundcurve aus zwei Punkten einer Geraden durch den Pol führt auf dasselbe Resultat für die Classenzahl, weil die Raumcurve der Durchdringung an denselben Stellen dieselben Singularitäten und in einem Rückkehrpunkt insbesondere auch dieselbe Tangente hat wie die Originalcurve.

Man erhält aber dieselbe Formel auch durch die Betrachtung einer unendlich kleinen Verschiebung der Curve oder die Betrachtung ihrer centrisch-collinearen für gegebenes Centrum $\mathfrak{C}$ und willkürliche Axe s der Collineation, wenn dem Punkt P der Curve der ihm unendlich nahe auf der Geraden $P\mathfrak{C}$ entspricht: Dann sind die Schnittpunkte beider Curven, welche nicht der Collineationsaxe angehören, an Zahl $\mu^2 - \mu$ also, die Berührungspunkte der von $\mathfrak{C}$ aus an dieselbe gehenden Tangenten; und diese Zahl vermindert sich für jeden Doppelpunkt um zwei und für jeden Rückkehrpunkt um drei Einheiten nach Anschauung der Figur.

Wir haben a. a. O. zu den hier entwickelten als dritte Plückersche Gleichung die Gleichung $\iota - \varkappa = 3(\nu - \mu)$ hinzugefügt und es fragt sich daher, ob dieselbe in analoger Weise zu begründen sei. Der Umstand, dass sie zu sich selbst dual ist, da sie sich durch den Uebergang von der Ordnung zur Classe und umgekehrt, und von der Zahl der stationären Punkte zu der der stationären Tangenten und umgekehrt nicht ändert, giebt die Wegweisung, dass geometrisch nicht Collineation sondern Reciprocität im Kegelschnitt als einfachste sich selbst duale Figur zu benutzen sein werde. In Bezug auf einen festen Kegelschnitt K der Ebene hat jede Curve C derselben eine Reciprokalcurve C_1, den Ort der Pole ihrer Tangenten und zugleich die Enveloppe der Polaren ihrer Punkte; aus der Verbindung von beiden gehen ein Ort (CC_1) und eine Enveloppe $[CC_1]$ hervor, von denen der erste im Allgemeinen keine stationären Punkte und die zweite keine stationären Tangenten besitzt; nämlich der Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangentenpaare, d. h. von Tangenten, deren eine die Polare vom Berührungspunkt der andern ist; und die Enveloppe der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, oder von Punkten, deren einer der Pol der Tangente im andern ist, der Berührungspunkte solcher Tangenten also, welche sich in (CC_1) schneiden. Sie sind in Bezug auf K zu einander reciprok, die erste Curve von der Ordnung, die zweite von der Classe $\mu + \nu$, wenn μ, ν Ordnung und Classe der gegebenen Curve bezeichnen, da z. B. jeder Schnittpunkt von (CC_1) mit K einen Schnittpunkt von K mit C oder mit C_1 bedingt und umgekehrt.

Ersetzen wir dann den Kegelschnitt K durch einen unendlich wenig von ihm verschiedenen Kegelschnitt K^*, der mit ihm eine doppelte Berührung hat, so ist nach § 43, 1 diess einer collinearen Umformung äquivalent, bei der der Kegelschnitt K in sich selbst transformiert wird, sodass die beiden Berührungspunkte die Doppelpunkte der auf ihm entstehenden projectivischen Reihen und die gemeinsamen Tangenten die Doppelstrahlen der zugehörigen projectivischen Tangentensysteme sind; insbesondere für K und K^* als unendlich nahe concentrische Kreise wären diese Punkte und Tangenten also die absoluten Richtungen und die Tangenten von absoluten Richtungen durch den Mittelpunkt.

Dann entspricht der Curve C in Bezug auf K^* eine Reciproke C_1^* und durch Verbindung mit dieser ein Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten (CC_1^*), welcher gleichfalls dem vorigen unendlich nahe liegt. Bezeichnen wir die Ordnung des Ortes (CC_1) durch $\dot{\mu}$, so entspringen die $\dot{\mu}^2$ Schnittpunkte dieser beiden Curven aus fünf verschiedenen Ursachen: nämlich 1) aus den stationären Tangenten der gegebenen Curve, an Zahl ι; 2) aus den Schnittpunkten zwischen C und K, an Zahl 2μ; 3) aus den μ Schnittpunkten der Curve C mit der Sehne der Doppelberührung zwischen K und K^*; 4) aus den $\dot{\mu}$ Schnittpunkten dieser Sehne mit der Curve (CC_1) und endlich 5) in Paaren aus den Doppelpunkten der Curve (CC_1), an Zahl also $2\dot{\delta}$. Diess giebt die Relation

$$\dot{\mu}^2 = \iota + 2\mu + \mu + \dot{\mu} + 2\dot{\delta}$$

oder
$$\dot{\mu}(\dot{\mu} - 1) - 2\dot{\delta} = \dot{\nu} = \iota + 3\mu.$$

Untersuchen wir nun auf ganz dieselbe Weise die Curven $(C_1 C)$ und $(C_1 C^*)$, deren erste mit (CC_1) identisch ist, so treten an Stelle von ι und μ die reciproken Charaktere $\varkappa$ und ν in das Resultat und es heisst $\dot{\nu} = \varkappa + 3\nu$. Die Vergleichung beider Ausdrücke liefert die sich selbst duale Gleichung

$$\iota + 3\mu = \varkappa + 3\nu \quad \text{oder} \quad \iota - \varkappa = 3(\nu - \mu).$$

Ersetzt man hier ν durch seinen Werth in μ, δ, $\varkappa$, so erhält man für die Zahl der Inflexionen oder stationären Tangenten — dual für die der stationären Punkte — den Ausdruck

$$\iota = \varkappa + 3\{\mu(\mu-1) - 2\delta - 3\varkappa\} - 3\mu = 3\mu(\mu-2) - 6\delta - 8\varkappa,$$

nach welchem die Zahl der Inflexionen im Allgemeinen das dreifache Product der Ordnungszahl in die um zwei verminderte Ordnungszahl ist und für jeden Doppelpunkt um sechs, für jeden stationären Punkt um acht Einheiten vermindert wird. (Vergl. z. B. II, § 23, *11.)

Mit den begründeten Plücker'schen Gleichungen ergeben sich für die Curven dritter Ordnung resp. Classe aus $\mu = 3$ $(\nu = 3)$, wenn sie nicht singulär sind, also mit $\delta = 0$, $\varkappa = 0$ resp. $\tau = 0$, $\iota = 0$ die Classe und resp. Ordnung gleich sechs, dazu neun stationäre Tangenten und keine Doppeltangente, resp. neun stationäre Punkte und kein Doppelpunkt. Und die

Charaktere $\nu = 6$, $\iota = 9$, $\tau = 0$ liefern in der That für die Ordnung

$$\mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - 3\iota \quad \text{wieder} \quad 6.5 - 3.9 = 3,$$

wie es sein muss; die Reciproke der Reciproken ist wieder die Originalcurve.

Hat die Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt oder einen stationären, so wird die Classe auf vier resp. drei reduciert und die Zahl der Inflexionen auf drei resp. eins; und dual für die singulären Curven dritter Classe.

Wir sehen, dass die Ordnungscurven stationäre und bei höheren Ordnungen als drei doppelte Tangenten haben müssen, dass sie aber singuläre Punkte nur haben können, und dual. Die Bedingung, unter der diess der Fall ist, kann in der That aus dem Vorigen sofort gebildet werden nach dem Satze, dass die ersten Polaren aller Punkte ihrer Ebene den Doppelpunkt der Grundcurve enthalten müssen; denn damit die Gleichung

$$x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1} + \cdots = 0$$

für jeden Punkt x_i' als Pol und für die Coordinaten des singulären Punktes erfüllt wird, muss für diese gleichzeitig

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0$$

sein oder die ersten Polaren der F.-Punkte müssen sich in ihm schneiden. Die linke Seite der Verträglichkeitsbedingung dieser Gleichungen, das Polynom, welches durch die Elimination der x_i zwischen denselben resultiert, die Resultante der ersten partiellen Differentiale von U wird wie für den Fall des quadratischen U (§ 49) die Discriminante von U genannt, und ihr Verschwinden ist die Bedingung für die Existenz des Doppelpunktes. Sie ist nach den Regeln der Algebra im Fall von drei Veränderlichen eine Function vom Grade $3(n-1)^2$ in den Coefficienten von U, also für Curven dritter und vierter Ordnung resp. von den Graden zwölf und siebenundzwanzig.

Für algebraische Flächen oder für vier Veränderliche geht aus denselben Ueberlegungen durch Elimination der x_i zwischen den vier Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \quad \text{oder} \quad U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0$$

— wenn wir das partielle Differential der Function nach x_i durch den Index i anzeigen — die entsprechende Bedingung als eine homogene Function der Coefficienten vom Grade $4(n-1)^3$ hervor, also für die Ordnungen drei und vier resp. von den Graden 32 und 108.

Denken wir ein Büschel von Curven oder Flächen $U+\lambda U^*=0$, so wird dasselbe — wenn auch bestimmt durch zwei nicht singuläre Curven oder Flächen $U=0$, $U^*=0$ — immer eine entsprechende Zahl von singulären Curven resp. Flächen enthalten; denn für a_i und a_i^* als die Coefficienten von Gliedern mit derselben Verbindung der Veränderlichen wird durch die Substitution von $a_i+\lambda a_i^*$ für a_i in die Discriminante die Bedingung ihres Verschwindens in eine Bestimmungsgleichung für λ vom Grade derselben verwandelt. Das Büschel von Curven und resp. von Flächen dritter Ordnung enthält zwölf Curven und zweiunddreissig Flächen mit Doppelpunkt etc.

Für ein lineares Gebilde zweiter Stufe $U+\lambda_1 U^{(1)}+\lambda_2 U^{(2)}=0$ entspringt aus der Substitution von $a_i+\lambda_1 a_i^{(1)}+\lambda_2 a_i^{(2)}$ für a_i in die Discriminante eine Relation zwischen den Parametern λ_1 und λ_2; analog für ein lineares Gebilde dritter Stufe eine solche zwischen den Parametern λ_1, λ_2, λ_3 u. s. w. Die Doppelpunkte der Curven und Flächen in einem linearen Gebilde zweiter Stufe erfüllen somit eine Curve, diejenigen der Flächen in einem linearen Gebilde dritter Stufe eine Fläche.

1) Die Tangenten der allgemeinen Curve dritter Ordnung, die aus zwei auf ihr einander unendlich nahen Punkten P, P' noch an sie gehen, schneiden sich als selbst unendlich benachbart in ihren Berührungspunkten A, B, C, D und bilden, da diese auf dem in P berührenden also auch P' enthaltenden Polarkegelschnitt von P liegen, zwei Büschel von demselben Doppelverhältniss. Und da dieses Doppelverhältniss sich beim Uebergang von einem Punkt der Curve zum folgenden nicht ändert, so ist es für dieselbe Curve dritter Ordnung constant. (Vergl. § 55.) Aus einer gegebenen Curve dritter Ordnung entstehen durch Projection nur solche Bilder, für welche diese charakteristische Constante denselben Werth hat. Nach § 38, 3 liegen die sechszehn Punkte, in welchen sich die Tangentengruppen derselben Curve dritter Ordnung aus zwei beliebigen Punkten P_1, P_2 derselben schneiden, viermal zu vier in Kegelschnitten durch diese; insbesondere also die sechszehn Brennpunkte einer circularen Curve dritter Ordnung viermal zu vier in Kreisen.

2) Die Gleichung der allgemeinen Curve dritter Ordnung kann in der Form geschrieben werden

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0,$$

da die Polarkegelschnitte der F.-Punkte

$$x_1^2 + 2mx_2x_3 = 0, \quad x_2^2 + 2mx_3x_1 = 0, \quad x_3^2 + 2mx_1x_2 = 0$$

keinen gemeinsamen Punkt haben.

Die Bildung ihrer Gleichung in den ξ_i fordert nach dem Text die Elimination der Grössen λ und x_i zwischen dieser und den Gleichungen

$$3x_i^2 + 6mx_kx_l + \lambda\xi_i = 0, \quad \xi_1x_1 + \cdots = 0.$$

Sie kann aber auch durch Einsetzen des Werthes von x_3 aus $\xi_1x_1 + \cdots = 0$ in die Gleichung der Curve und Bildung der Discriminante der entstehenden homogenen Gleichung dritten Grades in x_1 und x_2 erhalten werden; jene giebt zunächst

$$(\xi_1x_1 + \xi_2x_2)^3 - \xi_3^3(x_1^3 + x_2^3) + 6mx_1x_2\xi_3^2(\xi_1x_1 + \xi_2x_2) = 0$$

oder geordnet nach den Veränderlichen x_i

$$x_1^3(\xi_1^3 - \xi_3^3) + 3x_1^2x_2(\xi_1^2\xi_2 + 2m\xi_1\xi_3^2)$$
$$+ 3x_1x_2^2(\xi_1\xi_2^2 + 2m\xi_2\xi_3^2) + x_2^3(\xi_2^3 - \xi_3^3) = 0;$$

und die Discriminante dieser Gleichung giebt nach Ausscheidung des Factors ξ_3^6 die gesuchte Gleichung in der Form

$$\xi_1^6 + \cdots - 2(1 + 16m^3)(\xi_2^3\xi_3^3 + \cdots)$$
$$- 24m(1 + 2m^3)\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 - 24m^2\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1^3 + \cdots) = 0.$$

Man sieht, dass dieses letztere Verfahren immer anwendbar ist, wenn man die Discriminante der bezüglichen binären Form kennt.

3) Für die Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten in §§ 29, 7 u. 58 kann die Tangentialebene im Punkte x_i' geschrieben werden

$$\frac{a_1x_1}{x_1'^2} + \frac{a_2x_2}{x_2'^2} + \cdots = 0;$$

damit die Ebene $\xi_1x_1 + \cdots = 0$ die Fläche berühre, muss daher zwischen ihren Coordinaten ξ_i die Relation stattfinden

$$(a_1\xi_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2\xi_2)^{\frac{1}{2}} + \cdots = 0;$$

es ist die Gleichung der Fläche in den ξ_i.

4) Man erhält die Gleichung der Polarreciproken der vorigen Fläche in Bezug auf die Fläche zweiten Grades

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

indem man die $a_i\xi_i$ durch die x_i ersetzt; also

$$x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + \cdots = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x_1^2 + \cdots - 2x_1x_2 - \cdots - 2x_1x_3 - \cdot)^2 - 64x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Dieselbe berührt die F.-Ebenen $x_i = 0$ in den Kegelschnitten

$$x_j^{\frac{1}{2}} + x_k^{\frac{1}{2}} + x_l^{\frac{1}{2}} = 0,$$

welche die F.-Geraden paarweise in denselben sechs Punkten $x_i = x_k$ berühren. In Folge dessen sind die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Paare dieser Punkte drei doppelte Gerade in der Fläche und der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ oder E, in dem sie sich schneiden, ist ein dreifacher Punkt derselben. Ihre ebenen Querschnitte sind rationale Curven vierter Ordnung mit den drei Doppelpunkten in den Doppelgeraden, diejenigen ihrer Berührungsebenen Paare von Kegelschnitten, deren vierter gemeinsamer Punkt der Berührungspunkt ist.

Diese Fläche ist als Steiner'sche Fläche bekannt durch ihren Reichthum an leicht erkennbaren Eigenschaften.

5) Die ersten Polaren der F.-Punkte für die Curve dritter Ordnung in 1) gehen durch einen Punkt mit $m = -\frac{1}{2}$; für die Curve

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 0$$

ist somit der Einheitpunkt der Doppelpunkt.

Ist der Doppelpunkt einer der F.-Punkte, z. B. A_1, so kann die Gleichung in der Form $(x_2^2 \mp x_3^2)x_1 = x_2^3$ geschrieben werden, in welcher das Linienpaar $x_2^2 \mp x_3^2 = 0$ die zugehörigen Tangenten bildet, sodass der Doppelpunkt für das untere Zeichen ein Knoten und für das obere ein isolierter Punkt ist. Da jede Gerade aus A_1 nur noch einen Punkt der Curve enthält, so führt die Verbindung der Gleichung mit $x_3 = \mu x_2$ zur Parameterdarstellung in der Form $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (1 \mp \mu^2) : \mu(1 \mp \mu^2)$. Sie zeigt durch Einsetzen in die allgemeine Gleichung der Geraden, dass für die drei Punkte der Curve in ihr die Summe der Producte der Parameter zu zweien gleich ∓ 1 ist, woraus für den Schnittpunkt der Tangente im Punkt μ der Parameter μ' durch $\mu^2 + 2\mu\mu' = \mp 1$ und für den Parameter eines Inflexionspunktes durch $3\mu^2 = \mp 1$ erhalten wird; somit gehen von einem Punkt der Curve an sie zwei anderwärts berührende Tangenten und dieselbe hat drei Inflexionspunkte, von denen einer, der F.-Punkt A_3 stets reell ist, die beiden andern nur im Fall des oberen Zeichens. Man bildet leicht die Gleichung der Geraden von μ_1 nach μ_2 und die Gleichung der Tangente in μ_1, letztere z. B. als

$$\mp(1 \mp \mu^2)x_1 + (3\mu^2 \mp 1)x_2 - 2\mu x_3 = 0.$$

6) Für die Curve dritter Ordnung mit stationärem Punkt in A_1 kann man mit A_1A_3 oder $x_2 = 0$ als der zugehörigen Tangente schreiben

$$x_1 x_2^2 = x_3^3,$$

wonach $x_1 = 0$ die Inflexionstangente ist. Durch $x_3 = \mu x_2$ folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \mu^3 : 1 : \mu;$$

für die Schnittpunkte mit der Geraden ξ_i also $\xi_1 \mu^3 + \xi_2 + \xi_3 \mu = 0$, d. h. verschwindende Parametersumme wegen Fehlen des zweiten Gliedes, sodass die Tangente im Punkt μ die Curve noch schneidet im Punkt -2μ und die Tangente aus dem Curvenpunkt μ in $-\frac{1}{2}\mu$ berührt, $\mu = 0$ giebt den Inflexionspunkt. Die Gleichung der Tangente in μ ist

$$x_1 + 2\mu^3 x_2 - 3\mu^2 x_3 = 0;$$

sie liefert drei Tangenten durch den Punkt x_i und für die Berührungspunkte verschwindende Summe der Producte der Parameter.

7) Die Curven aus projectivischen Involutionen in Strahlbüscheln derselben Ebene von den Graden p und q (§ 43) haben

$$\varkappa = 0, \quad \mu = p + q, \quad 2\delta = p(p-1) + q(q-1),$$

weil ein $p$facher Punkt für $\frac{1}{2}p(p-1)$ Doppelpunkte zählt; also erhält man für dieselben

$$\nu = 2pq, \quad \iota = 3(2pq - p - q), \quad \tau = 2pq(pq-5) + 4(p+q).$$

Für $p = 3$, $q = 2$, also z. B. $\mu = 5$, $\nu = 12$, $\iota = 21$, $\tau = 32$.

61. Auf Grund des Vorigen ergiebt sich nun die geometrische Deutung des Parameters im Büschel und damit in den linearen Gebilden überhaupt für den allgemeinen Fall. Denn wenn in der Entwickelung des § 59 an Stelle der Function U eine Function $U + kV$ gesetzt wird, so ist die durch Δ bezeichnete Operation an dieser zu vollziehen und man erhält für $\Delta' U'' = 0$ oder die lineare Polare von X''

$$x_1' \frac{\partial (U + kV)}{\partial x_1''} + \cdots = 0$$

oder

$$x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1''} + \cdots + k \left\{ x_1' \frac{\partial V}{\partial x_1''} + \cdots \right\} = 0;$$

wenn man also die lineare Polare von X'' in Bezug auf U durch U_1 und die lineare Polare von X'' in Bezug auf V mit V_1 bezeichnet, so ist die von X'' für $U + kV = 0$

$$U_1 + kV_1 = 0.$$

Zudem ist ganz ebenso

$$\left\{ x_1' \frac{\partial (U + kV)}{\partial x_1''} + \cdots \right\}^{\iota} = 0$$

nichts anderes als

$$\left\{x_1' \frac{\partial U}{\partial x_1''} + \cdots\right\}^l + k\left\{x_1' \frac{\partial V}{\partial x_1''} + \cdots\right\}^l = 0$$

oder mit U_l und V_l als den Polaren von der Ordnung l von X'' für U und V

$$U_l + k V_l = 0.$$

Man hat also den wichtigen Satz: Die gleichnamigen Polaren eines Elementes in Bezug auf die Formen eines linearen Gebildes erster Stufe bilden ein lineares Gebilde erster Stufe mit derselben Folge der Parameterwerthe; die eines Punktes in Bezug auf ein Büschel von Curven oder Flächen ein Büschel aus Curven resp. Flächen mit demselben Parameter.

Und insbesondere die linearen Polaren eines Elementes in Bezug auf die Formen eines Gebildes erster Stufe liefern ein Elementargebilde erster Stufe mit derselben Folge der Parameterwerthe. Speciell: Die geraden Polaren eines Punktes der Ebene in Bezug auf die Curven eines Büschels bilden ein Strahlbüschel von demselben Parameter; die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden ein Ebenenbüschel von demselben Parameter — mit Einschluss der Tangentenbüschel und Tangentialebenenbüschel in einem gemeinsamen Punkt der Curven resp. Flächen.

Sowie dual: Die Pole einer Geraden resp. Ebene in Bezug auf die Curven oder Flächen einer Schaar bilden eine gerade Punktreihe von demselben Parameter — mit Einschluss der Reihe der Berührungspunkte in einer gemeinsamen Tangente oder Tangentialebene.

Und die harmonischen Centra ersten Grades (Punkte, Gerade oder Ebenen) einer Involution von Elementengruppen liefern ein Elementargebilde erster Stufe von demselben Parameter.

Daher ist aber auch die geometrische Deutung des Parameters der Formen in Gebilden erster Stufe aus dem Elementargebilde erster Stufe ihrer linearen Polaren für irgend ein Element speciell aus dem für ein ihnen gemeinsames Element zu entnehmen und daher durch diese erledigt.

Ebenso in den Gebilden höherer Stufen.

Offenbar gelten aber die gleichen Entwickelungen auch für lineare Gebilde höherer Stufen. Die gleichnamigen Polaren eines Elementes in Bezug auf die Formen eines Gebildes p^{ter} Stufe erfüllen ein Gebilde p^{ter} Stufe mit denselben Parametern; die linearen Polaren insbesondere ein Elementargebilde p^{ter} Stufe mit denselben Parametern.

Daraus folgt auch, dass die linearen Polaren eines Elements in Bezug auf die Formen eines Gebildes p^{ter} Stufe immer hinreichen, alle diese Formen zu bestimmen, wenn die zur Bestimmung des Gebildes nöthigen $(p+1)$ Formen gegeben sind. Im Fall eines gemeinschaftlichen Elementes im Gebilde ist diess aus der Natur der Tangenten resp. Tangentialebenen und aus dem Umstand evident, dass jede einzelne Form des Gebildes durch ein einziges Element ausser den gemeinsamen bestimmt wird.

Es ist ebenso evident, wie der Hauptsatz dieses Paragraphen, dass die gleichnamigen Polaren der Punkte einer Reihe etc. in Bezug auf eine Curve oder Fläche ein lineares Gebilde erster Stufe von Curven oder Flächen bilden; die der Punkte einer Ebene ein lineares Gebilde zweiter Stufe, der Punkte des Raumes ein solches dritter Stufe, bestimmt durch die betreffenden Polaren von zwei, drei, vier als fundamental ausgewählten Punkten, etc.

Und mit dem Allen erhellt, dass die Ausdrucksformen der Projectivitäten, Involutionen u. s. w. solcher Gebilde höherer Stufen von denen der Elementargebilde gleicher Stufen nicht verschieden sind; wir entnehmen daraus, dass die genauere Untersuchung der letzteren die wesentliche Grundlage für die allgemeineren Sätze liefern wird und beschränken uns weiterhin auf dieselbe. (§§ 69 f.) Für die Gebilde erster Stufe ist dem Früheren nichts Wesentliches hinzuzufügen, als etwa die Erzeugung von Raumcurven aus drei projectivischen Flächenbüscheln und dual (vergl. 6), und die Verbindung projectivischer Involutionen aus Curven in der Ebene und aus Flächen (7, 8).

Wir heben eine besonders wichtige Anwendung heraus. Weil die ersten Polaren der Punkte einer geraden Reihe in Bezug auf eine Curve oder Fläche n^{ter} Ordnung ein Büschel von Curven resp. Flächen $(n-1)^{ter}$ Ordnung bilden, und in

einem solchen Büschel $3(n-2)^2$ Curven und $4(n-2)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkt vorkommen, so folgt, dass der Ort der Pole, deren erste Polaren in Bezug auf eine Curve oder Fläche n^{ter} Ordnung einen Doppelpunkt haben, eine Curve von der Ordnung $3(n-2)^2$ resp. eine Fläche von der Ordnung $4(n-2)^3$ ist. Man nennt diese Curve oder Fläche die Steiner'sche Kerncurve und Kernfläche der gegebenen. Für Curven und Flächen zweiten Grades treten sie nicht auf; für die Curve dritter Ordnung erhält man als den Ort eines Punktes, dessen Polarkegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt, eine Curve dritter Ordnung, für die Fläche dritter Ordnung eine Fläche vierter Ordnung als den Ort der Punkte mit konischen Polaren etc.

Wenn wir die partielle Differentiation der Function U nach der Veränderlichen x_i durch U_i bezeichnen, so ist die erste Polare des Punktes x_i' ausgedrückt durch

$$x_1' U_1 + x_2' U_2 + \cdots = 0$$

und für einen Doppelpunkt x_i derselben müssten unter Anzeigung zweimaliger Differentiation durch Doppelindex gleichzeitig die drei oder vier Bedingungsgleichungen

$$x_1' U_{11} + x_2' U_{12} + x_3' U_{13} + \cdot = 0,$$
$$x_1' U_{12} + x_2' U_{22} + x_3' U_{23} + \cdot = 0, \quad \text{etc.}$$

bestehen. Die Elimination der x_i' zwischen diesen Bedingungen liefert uns für den Ort der Doppelpunkte in ersten Polaren die Gleichung aus der Determinante der zweiten Differentiale (Hesse'sche Determinante der Function U), für Curven in der Ebene also

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13} \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23} \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

und abkürzend $\mathbf{H}=0$, eine Curve von der Ordnung $3(n-2)$, die man als die Hesse'sche Curve der gegebenen bezeichnet; im Fall der Fläche n^{ter} Ordnung natürlich eine Fläche von der Ordnung $4(n-2)$. Wir kommen sogleich auf dieselbe zurück.

Wir erhalten natürlich die Gleichung der Steiner'schen Curve resp. Fläche durch die Elimination der x_i zwischen denselben Bedingungsgleichungen, was nach den Regeln der Algebra auf den Grad $3(n-2)^2$ und $4(n-2)^3$ führt. Man sieht,

dass zu jedem Punkt der Hesse'schen Curve und Fläche als einem Doppelpunkt einer ersten Polare der zugehörige Pol in der Steiner'schen Curve und Fläche gehört und umgekehrt. Man nennt daher diese beiden Gebilde etwa auch conjugierte Kern-Curven und -Flächen. Die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punktepaare bilden eine wichtige Strahlencongruenz im Fall der Flächen und umhüllen eine Curve im Fall der ebenen Curven. Weil aber mit der Erfüllung der Bedingung $\mathbf{H} = 0$ zugleich die Polare zweiten Grades für den Punkt x_i, nämlich

$$U_{11}x_1^2 + \cdots + 2U_{12}x_1x_2 + \cdots = 0$$

nach § 49 einen Doppelpunkt hat, also ein Linienpaar resp. eine Kegelfläche zweiten Grades ist, so haben wir auf Grund des Satzes: Wenn die erste Polare des Punktes A einen Doppelpunkt B hat, so ist A ein Doppelpunkt in der Polare zweiten Grades, für die Hesse'sche Curve und Fläche — auch die Erklärung als Ort von Punkten, deren Polarkegelschnitte in Linienpaare zerfallen, resp. deren Polarflächen zweiten Grades Kegel sind; und ebenso erkennen wir die Steiner'sche Kern-Curve und -Fläche als den Ort von Punkten, welche Doppelpunkte in Polarkegelschnitten resp. in Polarflächen zweiten Grades sind.

Da für einen Doppelpunkt der Curve oder Fläche die Polare zweiten Grades sein Tangentenpaar und resp. sein Berührungskegel ist, so gehört derselbe der Hesse'schen Curve resp. Fläche an; er ist selbst ein Doppelpunkt in dieser. Im ersten Fall hat er auch die nämlichen Tangenten und zählt daher für sechs unter den Schnittpunkten beider Curven; für den specielleren Fall des Rückkehrpunktes zeigt eine nähere Untersuchung, dass derselbe ein dreifacher Punkt in der Hesse'schen Curve ist, von dessen Tangenten zwei mit der zugehörigen Rückkehrtangente zusammenfallen, sodass er acht der Schnittpunkte beider Curven vertritt.

Wir haben das Vorige noch in einer andern Form darzustellen; zunächst für Flächen. Wenn die Gerade durch einen Punkt x_i' der Fläche $U=0$ daselbst drei aufeinander folgende Punkte mit der Fläche gemein haben, d. h. eine ihrer beiden Haupttangenten in demselben sein soll (II, § 48), so muss nicht nur $U' = 0$ und $\Delta U' = 0$ sein, sondern auch $\Delta^2 U' = 0$ oder man hat

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4'}\right)^2 U' = 0,$$

oder die Gerade muss der Polarfläche zweiten Grades von diesem Punkt angehören. Da diese aber nach dem Früheren in dem Punkt die Fläche und die zugehörige Tangentialebene berührt, so sind die Haupttangenten der Fläche $U = 0$ die beiden Geraden ihrer Polarfläche zweiter Ordnung für diesen Pol. Für Punkte in den hyperbolischen Regionen einer Fläche ist die Polarfläche zweiter Ordnung hyperbolisch, für Punkte in den elliptischen Regionen elliptisch.

Sollen die Haupttangenten zusammenfallen, wie diess für jeden Punkt in der Grenzcurve zwischen den elliptischen und hyperbolischen Theilen der Fläche stattfinden muss, so ist die Polarfläche zweiter Ordnung nothwendig ein Kegel zweiten Grades und alle Punkte dieser Grenzcurve gehören daher (wie schon die Doppelpunkte) der Hesse'schen Kernfläche von $U = 0$ an oder dieselbe ist die Durchdringung der Fläche mit ihrer Hesse'schen Fläche; sie ist daher von der Ordnung $4n(n-2)$.

Für algebraische ebene Curven erhalten wir ein analoges Resultat. Soll die Tangente der Curve $U = 0$ im Punkt x_i' dieselbe dreipunktig berühren, so muss ausser $U' = 0$ nicht nur $\Delta U' = 0$ sondern auch $\Delta^2 U' = 0$ sein. Diese Bedingungen sind in der einen möglichen Art erfüllt in einem Doppelpunkt der Curve, wo der Polarkegelschnitt in das Tangentenpaar zerfällt; und sie werden auf eine zweite Art erfüllt in einem Inflexionspunkt, da die Inflexionstangente eine unter den vom Inflexionspunkt noch an die Curve gehenden Tangenten ist und somit ein Theil seines Polarkegelschnittes sein muss.

Da die Hesse'sche Curve der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $3(n-2)$ ist, so folgt die Anzahl der Inflexionen einer nicht singulären Curve n^{ter} Ordnung gleich $3n(n-2)$, für die allgemeinen Curven dritter und vierter Ordnung also neun und resp. vierundzwanzig. Diese Zahl reduciert sich aber bei dem Vorhandensein singulärer Punkte und zwar auch nach dem letztvorhergehenden in Uebereinstimmung mit § 60 durch jeden Doppelpunkt um sechs und durch jeden Rückkehrpunkt um acht Einheiten, sodass z. B. die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt oder Spitze nur drei Inflexionen resp. eine solche haben können, indess die Curven vierter Ord-

nung mit zwei Doppelpunkten z. B. zwölf Inflexionen haben werden, wie wir auch bereits wissen.

1) Die Gleichung, welche geometrisch die Polargerade definiert (§ 59), nämlich für X'' als den Pol, X_1, X_2, X_3 als die Schnittpunkte des Strahls mit der Curve und X' als den in ihm liegenden Punkt der Polargeraden

$$\frac{1}{n}\sum \frac{X'X''}{X_iX''} = 0,$$

wird für die Curve dritter Ordnung

$$\frac{3}{X'X''} = \frac{1}{X_1X''} + \frac{1}{X_2X''} + \frac{1}{X_3X''}.$$

Wenn man auf zwei vom Pol ausgehenden Geraden aus den zugehörigen X_i die Punkte X' bestimmt, so ist die gerade Polare ihre Verbindungslinie; sie ist also dieselbe für alle die Curven dritter Ordnung, welche durch die drei Punkte X_i in der ersten und durch die in der zweiten Geraden hindurchgehen, insbesondere auch dieselbe für ein Dreiseit, welches die Verbindungsgeraden jener drei Punkte mit diesen bilden. Denkt man dies Dreiseit als fundamental, sodass die Gleichung der von ihm gebildeten Curve dritter Ordnung $\cdot\, x_1x_2x_3 = 0$ ist, so ist die gerade Polare eines Punktes x_i' in Bezug auf dieselbe

$$\frac{x_1}{x_1'} + \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} = 0,$$

d. h. sie ist die Harmonikale des Pols in Bezug auf das Dreiseit im Sinn von § 15, 6.

Offenbar wird durch die Punkte auf drei Strahlen aus dem Pol auch der Polarkegelschnitt desselben nach den metrischen Relationen seiner Punkte in § 59 bestimmt.

2) Für die Curve dritter Ordnung ist die Hesse'sche Curve identisch mit der Steiner'schen Curve und die entsprechenden Punkte beider Curven sind entsprechende Punkte dieser Curve dritter Ordnung in dem Sinn von § 53, d. h. ihre Tangenten begegnen sich in der Curve. Daher giebt es dann zu einer gegebenen Curve dritter Ordnung drei andere, welche dieselbe zu ihrer Hesse'schen Curve haben, nach den drei Systemen correspondierender Punkte, die sie besitzt.

Weil die Gleichung des Polarkegelschnittes von y_i

$$y_1U_1 + y_2U_2 + y_3U_3 = 0$$

die Gesammtheit der Polarkegelschnitte aller Punkte der Ebene als ein lineares Gebilde zweiter Stufe charakterisiert und die Gleichung der Polare des Punktes x_i' in Bezug auf einen Kegelschnitt des Systems

$$y_1(U_{11}x_1' + U_{12}x_2' + U_{13}x_3') + y_2(U_{12}x_1' + U_{22}x_2' + U_{23}x_3') + y_3(U_{13}x_1' + \cdot\cdot) = 0$$

durch die Coordinaten seines correspondierenden Punktes erfüllt wird, so sind die Paare A, B der conjugierten Punkte je Scheitel der Polarenbüschel des andern in der Jacobi'schen Curve dieses Netzes von Kegelschnitten, d. h. dem Ort der Pole, deren Polaren in Bezug auf dieselben Büschel bilden. Conjugierte Punkte sind durch alle Polarkegelschnitte harmonisch von einander getrennt und für einen in zwei Gerade, die sich auf ihrer Verbindungslinie schneiden, zerfallenden Kegelschnitt des Systems kann nur entweder A oder B der Doppelpunkt sein. Die Gerade AB schneidet nun die Hesse'sche Curve in noch einem dritten Punkt C und eine von den zwei Geraden des durch C gehenden zerfallenden Kegelschnittes des Systems ist die Gerade AB, die zweite kann die zu ihr conjugierte genannt werden. Die Enveloppe dieser Verbindungsgeraden conjugierter Punkte ist von der dritten Classe; denn die einzigen Punkte, deren Polarkegelschnitte zugleich zerfallen und einen gegebenen Punkt enthalten, sind die Schnittpunkte der Hesse'schen Curve mit der Polargeraden dieses Punktes. Und weil sie nach ihrer Construction weder doppelte noch stationäre Tangenten haben kann, ist sie von der sechsten Ordnung; man nennt sie die Cayley'sche Curve der gegebenen.

3) Jede Gerade hat in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung vier Pole, die Grundpunkte des Büschels der Polarkegelschnitte ihrer Punkte. Für eine Tangente der Hesse'schen Curve, die den Punkt A mit dem benachbarten Punkt A' derselben verbindet, werden diese Pole als Schnitte zweier unendlich benachbarter Linienpaare durch den doppelt zählenden correspondierenden Punkt B und die Berührungspunkte der beiden von B ausgehenden Geraden mit ihrer Cayley'schen Enveloppe gebildet. Die Polargerade eines Punktes der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Curve dritter Ordnung ist die Tangente der Hesse'schen Curve im correspondirenden Punkt derselben. Der Ort der Pole der Tangenten der Hesse'schen Curve in Bezug auf die gegebene besteht also aus der zweifach zählenden Hesse'schen Curve und der besagten Enveloppe. Die 36 gemeinsamen Tangenten der Hesse'schen und der Cayley'schen Curve setzen sich aus den 18 Tangenten von $U = 0$ in ihren Schnittpunkten mit der Cayley'schen Curve und aus den doppelt zählenden 9 Inflexionstangenten in den Schnittpunkten mit der Hesse'schen Curve zusammen. Der Polarkegelschnitt eines Inflexionspunktes A besteht aus der Inflexionstangente und einer sie in dem correspondierenden Punkt B der Hesse'schen Curve schneidenden Geraden, der harmonischen Polare von A. Die Tangente der Hesse'schen Curve in B ist die Polare von A für die Curve dritter Ordnung, d. h. die Inflexionstangente, oder in dem Punkt, wo die Inflexionstangente die Hesse'sche Curve berührt, schneidet sie die entsprechende harmonische Polare. Daher hat die Aufgabe, zu einer als Hesse'sche Curve gegebenen die Curve dritter Ordnung U zu finden, drei Lösungen; man kennt die neun Inflexionspunkte,

welche für acht Bedingungen zählen und die desshalb zur Bestimmung hinreichende Tangente in einem derselben kann jede der drei Tangenten sein, die von ihm noch an die Curve gehen; sie gehören zu dem Büschel mit gemeinsamen Inflexionspunkten. (Vergl. das Folgende.)

4) Für die Gleichung der allgemeinen Curve dritter Ordnung

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

ist jede der F.-Geraden die Verbindungsgerade von drei Inflexionspunkten; denn für j als eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, sodass $j^3 = 1$ und $1 + j + j^2 = 0$ sind, kann die Gleichung in den äquivalenten Formen geschrieben werden

$$(x_1 + x_2 - 2mx_3)(jx_1 + j^2x_2 - 2mx_3)(j^2x_1 + jx_2 - 2mx_3) + (1 + 8m^3)x_3^3 = 0,$$

$$(x_2 + x_3 - 2mx_1)(jx_2 + j^2x_3 - 2mx_1)(j^2x_2 + jx_3 - 2mx_1) + (1 + 8m^3)x_1^3 = 0,$$

$$(x_3 + x_1 - 2mx_2)(jx_3 + j^2x_1 - 2mx_2)(j^2x_3 + jx_1 - 2mx_2) + (1 + 8m^3)x_2^3 = 0;$$

in deren jeder drei Inflexionstangenten und eine F.-Gerade als Verbindungslinie der zugehörigen Inflexionspunkte ersichtlich werden, weil sie von der Form $def = \lambda a^3$ in § 42, 3 sind. Man sieht daraus, dass die Inflexionspunkte in $x_3 = 0$, sagen wir $3, 3', 3''$ die Coordinatenverhältnisse $x_2 : x_1$ gleich $-1, -j, -j^2$ haben; ebenso die in $x_1 = 0$ oder $1, 1', 1''$ die $x_3 : x_2$ und die in $x_2 = 0$ oder $2, 2', 2''$ die $x_1 : x_3$.

Diese neun Punkte liegen zwölfmal zu drei in einer Geraden, nämlich ausser den eben aufgezählten auch 123, $1'2'3'$, $1''2''3''$ in den Geraden

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + jx_2 + j^2x_3 = 0,$$
$$x_1 + j^2x_2 + jx_3 = 0;$$ sodann

$12'3''$, $12''3'$ in $jx_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $j^2x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

$1''23'$, $1'23''$ in $x_1 + jx_2 + x_3 = 0$ und $x_1 + j^2x_2 + x_3 = 0$,

und

$1'2''3$, $1''2'3$ in $x_1 + x_2 + jx_3 = 0$ und $x_1 + x_2 + j^2x_3 = 0$.

Die gefundenen Gruppen sind die Elementenzeilen, die Elementenreihen und die positiven und negativen Glieder der Entwickelung von

$$\begin{vmatrix} 1 & 1' & 1'' \\ 2 & 2' & 2'' \\ 3 & 3' & 3'' \end{vmatrix};$$

durch jeden Punkt gehen vier der Geraden nach seinem Vorkommen in Zeile, Reihe und zwei Gliedern der Entwickelung; die Zeilen geben das einzige reelle Tripel von Geraden, welches alle neun Inflexionspunkte enthält, die erste Reihe giebt die vierte reelle Gerade durch drei Inflexionspunkte, hier die E.-Linie. Wir schliessen, dass die Curve in vier Arten auf diese einfachste Gleichungsform gebracht werden könne, weil aus diesen vier Geraden vier fundamentale Tripel gebildet werden können. Man kann die drei andern zu bilden verlangen.

5) Die Hesse-Steiner'sche Kerncurve hat für die betrachtete Gleichungsform den Ausdruck

$$(1 + 2m^3)\, x_1 x_2 x_3 - m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 0;$$

sie hat die Inflexionspunkte der gegebenen Curve zu ihren Inflexionspunkten und man mag die zugehörigen Tangenten anschreiben.

Und für dieselbe Gleichung in 4) ist die der Cayley'schen Curve dritter Classe und sechster Ordnung

$$m(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (1 - 4m^3)\, \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0;$$

man kann durch Zerlegung in Factoren wie oben ihre neun stationären Punkte ausdrücken.

Man bilde diese Gleichungen für die Curve mit Doppelpunkt, und die erste auch für die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Die Kerncurven haben dieselben Doppelpunkte mit den nämlichen Tangenten und treffen daher die gegebene resp. noch in drei und in zwölf Punkten, den Inflexionspunkten.

6) Drei Flächenbüschel von den Ordnungen μ_1, μ_2, μ_3 erzeugen, wenn jedes auf die beiden andern projectivisch bezogen ist, eine doppeltgekrümmte Curve als den Ort der Schnittpunkte entsprechender Tripel ihrer Flächen und dual; die Curve ist von der Ordnung $(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1)$. Denn aus der Projectivität des ersten und zweiten Flächenbüschels geht als Erzeugniss eine Fläche von der Ordnung $(\mu_1 + \mu_2)$ hervor, die durch die Grundcurven derselben von den Ordnungen μ_1^2 und μ_2^2 geht; ebenso aus der Projectivität des zweiten und dritten Büschels eine Fläche von der Ordnung $(\mu_2 + \mu_3)$ durch die Grundcurven von den Ordnungen μ_2^2 und μ_3^2 dieser Büschel. Das Erzeugniss aller drei Büschel ist die gemeinsame Curve dieser und der aus den Büscheln μ_3 und μ_1 ebenso erzeugten Flächen, von der Ordnung

$$(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3) - \mu_2^2 = (\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1) - \mu_3^2$$
$$= (\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1^2.$$

So erzeugen drei projectivische Ebenenbüschel die Curve dritter Ordnung, zwei Ebenenbüschel und ein zu ihnen projectivisches Flächenbüschel zweiten Grades eine Curve fünfter, zwei Flächenbüschel zweiten Grades und ein Ebenenbüschel eine Curve neunter

Ordnung etc.; allgemeiner zwei Ebenenbüschel und ein ihnen projectivisches Flächenbüschel der n^{ten} Ordnung eine Curve von der Ordnung $(2\mu + 1)$. (Vergl. § 43.)

7) Wenn $U - \varkappa V = 0$ und $W - \lambda Z = 0$ Büschel von Curven der Ordnungen μ_1 und μ_2 in derselben Ebene sind und zwischen ihren Parametern eine Gleichung besteht, die in $\varkappa$ vom p^{ten} und in λ vom q^{ten} Grade ist, so werden dadurch die Büschel in Involutionen geordnet und diese projectivisch auf einander bezogen. Das Resultat der Elimination von $\varkappa$ und λ zwischen den drei Gleichungen d. i. die Einsetzung von $U : V$ für $\varkappa$ und von $W : Z$ für λ in die Parametergleichung ist die Gleichung des Erzeugnisses, homogen in W und Z im Grade q und in U und V mit dem Grade p, also vom Grade $p\mu_1 + q\mu_2$ in den Veränderlichen x_i jener Functionen. Dieselbe ergiebt für $U = 0$ $V^p = 0$ und für $W = 0$ $Z^q = 0$, d. h. die Grundpunkte des ersten Büschels sind $p$fach und die des zweiten $q$fach in der erzeugten Curve.

Man erläutere das dualisch Entsprechende und füge specielle Fälle hinzu; besonders auch in Bezug auf die Reduction der Ordnungszahl des Erzeugnisses.

8) Für Büschel resp. Schaaren von Flächen lässt sich dasselbe ausführen; die Grundcurven der Büschel werden p- und resp. $q$fache Curven in der erzeugten Fläche, die gemeinsamen Developpabeln der Schaaren ebenso vielfache Developpable derselben. Eine quadratische Involution im Flächenbüschel zweiten Grades erzeugt durch projectivische Zuordnung mit einem Ebenenbüschel von beliebiger Scheitelkante eine Fläche fünfter Ordnung durch diese und mit der Grundcurve vierter Ordnung des Flächenbüschels als Doppelcurve; ihre Querschnitte mit allen Ebenen des Büschels bestehen aus Paaren von Kegelschnitten ausser der Scheitelkante.

C. Die projectivischen Gebilde, speciell die Elementargebilde zweiter und dritter Stufe.

62. Wir haben in § 39 gesehen, dass Elementargebilde erster Stufe projectivisch sind, wenn die Coordinaten eines Elementes im gestrichenen Gebilde lineare homogene Functionen der Coordinaten des entsprechenden Elementes im ungestrichenen Gebilde sind; also für Reihen und Büschel resp. wenn

$$\mu x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2, \qquad m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2,$$
$$m\xi_i' = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2.$$

Indem man dieselben als Schnitte und Scheine von entsprechenden Elementargebilden erster Stufe in projectivischen Gebilden zweiter oder dritter Stufe auf oder aus F.-Elementen denkt, gelangt man zu der Verallgemeinerung des Ergebnisses für diese, wonach die Projectivität derselben durch die lineare Abhängigkeit der Coordinaten der Elemente des einen von denjenigen der entsprechenden des andern bedingt wird. Zu demselben Resultat führt der algebraische Ausdruck der Grundeigenschaften projectivischer Elementargebilde zweiter und dritter Stufe, welche wir in § 3 auseinandergesetzt haben; wir wollen diess an den Gebilden dritter Stufe entwickeln; zunächst für den Fall der Collineation. Wenn dem Punkt x_i in einer bestimmten Collineation zweier Räume der Punkt x_i' entspricht, so folgern wir aus der Construction, welche immer von jenem zu diesem mit Hülfe der gegebenen Bestimmungselemente führt, zunächst, dass sich die x_i' als algebraische homogene Functionen der x_i ausdrücken lassen und erkennen sofort aus den Grundeigenschaften der Collineation, dass diese Functionen linear sein müssen. Mit

$$\mu x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv f_i$$

erhalten wir nämlich für die zweifach unendliche Gesammtheit

der Punkte des ungestrichenen Raumes, welche den Punkten der Ebene $\xi_1'x_1' + \xi_2'x_2' + \xi_3'x_3' + \xi_4'x_4' = 0$

des gestrichenen entsprechen, die Gleichung mit den Veränderlichen x_i $\quad \xi_1'f_1 + \xi_2'f_2 + \xi_3'f_3 + \xi_4'f_4 = 0,$

und diese stellt nur dann immer, d. h. für alle Werthegruppen ξ_i', eine Ebene dar, wenn die f_i lineare homogene Functionen der x_i sind. Setzen wir darnach also, übereinstimmend mit der Bezeichnung bei den Gebilden erster Stufe in § 39,

a) $\quad \mu x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4,$

so entsteht als Gleichung der der Ebene ξ_i' entsprechenden Ebene $\quad \xi_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)$

$$+ \xi_2'(a_{21}x_1 + \cdots) + \xi_3'(a_{31}x_1 + \cdots) + \xi_4'(a_{41}x_1 + \cdots) = 0$$

oder nach den Veränderlichen geordnet

$$(a_{11}\xi_1' + a_{21}\xi_2' + a_{31}\xi_3' + a_{41}\xi_4')x_1$$
$$+ (a_{12}\xi_1' + \cdots)x_2 + (a_{13}\xi_1' + \cdots)x_3 + (a_{14}\xi_1' + \cdots)x_4 = 0;$$

d. h. es gelten für den Uebergang von den Coordinaten einer Ebene ξ_i' im gestrichenen Raum zu denen der entsprechenden Ebene im ungestrichenen Raum die Gleichungen

b) $\quad \varrho\xi_k = a_{1k}\xi_1' + a_{2k}\xi_2' + a_{3k}\xi_3' + a_{4k}\xi_4'.$

Im Fall der Collineation sind also die x_i' und resp. ξ_k lineare homogene Functionen der x_i resp. ξ_k' mit denselben sechszehn Coefficienten a_{ik}, jedoch so, dass die Coefficienten in den Horizontalreihen der einen die gleichgeordneten Coefficienten in den entsprechenden Verticalreihen der andern sind. Man sagt, dass man durch eine lineare Substitution von den Coordinaten des Elementes in dem einen Gebilde zu denen des entsprechenden Elementes im andern Gebilde übergeht. Das System der Coefficienten a_{ik} der Substitution und das adjungierte System derselben A_{ik} im Sinn von § 24, also

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix},$$

liefern die Determinante der Substitution D und ihre adjungierte oder Reciprocaldeterminante mit dem Werth D^3 (weil ihr Product

mit D sich nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten gleich D^4 ergiebt) und vermitteln den Ausdruck des Ueberganges von x_i' zu x_i und resp. von ξ_k' zu ξ_k. Denn man erhält durch Auflösung der a) sofort

$$\text{a')} \qquad \frac{1}{\mu} D x_i = A_{1i} x_1' + A_{2i} x_2' + A_{3i} x_3' + A_{4i} x_4';$$

da der Rückgang zu den x_i wieder die Gleichungen a) liefern muss, so erfährt man zugleich, dass die ersten Unterdeterminanten $\mathbf{A}_{ik}$ der Reciprocaldeterminante den mit D^2 multiplicierten entsprechenden Coefficienten a_{ik} der Substitution gleich sind.

Ebenso liefert die Auflösung des Systems der b) die

$$\text{b')} \qquad \frac{1}{\varrho} D \xi_k' = A_{k1}\xi_1 + A_{k2}\xi_2 + A_{k3}\xi_3 + A_{k4}\xi_4.$$

Wenn sodann im Fall der Reciprocität der Räume dem Punkt x_i eine Ebene ξ_i' correspondiert, so müssen entsprechend der von jenem zu dieser führenden Construction (§ 3) die Coordinaten ξ_i' sich als homogene Functionen φ_i der Coordinaten x_i ausdrücken lassen; hat man aber

$$m\xi_i' = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \varphi_i,$$

so liegen diejenigen Punkte des ungestrichenen Raumes, welche den Ebenen des Punktes

$$\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3' + \xi_4' x_4' = 0$$

im gestrichenen Raume entsprechen, in dem durch die Gleichung

$$x_1'\varphi_1 + x_2'\varphi_2 + x_3'\varphi_3 + x_4'\varphi_4 = 0$$

dargestellten Ort des ungestrichenen Raumes, d. h. in einer Fläche, deren Ordnung von dem Grade der Functionen φ_i abhängt, und die nur dann immer eine Ebene sein wird, wenn diese Functionen lineare homogene Functionen der x_i sind. Man hat also nothwendig

$$\text{c)} \qquad m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4,$$

wie oben.

Dann entspricht dem Punkt x_i' oder $\xi_1' x_1' + \cdots = 0$ die Ebene $(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4)x_1'$
$+ (\alpha_{21}x_1 + \cdots)x_2' + (\alpha_{31}x_1 + \cdots)x_3' + (\alpha_{41}x_1 + \cdots)x_4' = 0$
oder nach den Veränderlichen geordnet

$$(\alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \cdots)x_1$$
$$+ (\alpha_{12}x_1' + \cdots)x_2 + (\alpha_{13}x_1' + \cdots)x_3 + (\alpha_{14}x_1' + \cdots)x_4 = 0,$$

d. h. man hat für den Uebergang von den Punkten des gestrichenen zu den Ebenen des ungestrichenen Raumes die Gleichungen

d) $$r\xi_k = \alpha_{1k}x_1' + \alpha_{2k}x_2' + \alpha_{3k}x_3' + \alpha_{4k}x_4'.$$

Ist Δ die Determinante der Substitution α_{ik} und sind $\mathbf{A}_{ik}$ ihre adjungierten Elemente, so erhält man durch Auflösung der c) nach den x_i und resp. der d) nach den x_k' die Gruppen

c') $$\frac{1}{m}\Delta x_i = \mathbf{A}_{1i}\xi_1' + \mathbf{A}_{2i}\xi_2' + \mathbf{A}_{3i}\xi_3' + \mathbf{A}_{4i}\xi_4',$$

d') $$\frac{1}{r}\Delta x_k' = \mathbf{A}_{k1}\xi_1 + \mathbf{A}_{k2}\xi_2 + \mathbf{A}_{k3}\xi_3 + \mathbf{A}_{k4}\xi_4.$$

Wir können sofort auch die geometrische Interpretation der sämmtlichen Coefficienten der linearen Substitution geben, durch welche die Projectivität zwischen Elementargebilden ausgedrückt wird; d. h. den Nachweis, wie von der analytischen Ausdrucksweise zur geometrischen Construction und von den geometrischen Bestimmungselementen derselben zu ihrer analytischen Ausdrucksweise überzugehen ist.

Wir denken in zwei collinearen Räumen fünf Punkte des einen, von denen keine vier einer Ebene angehören und fünf beliebige Punkte des andern Raumes als fundamental gewählt und demgemäss etwa durch

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ E; \qquad A_1^{*\prime},\ A_2^{*\prime},\ A_3^{*\prime},\ A_4^{*\prime},\ E^{*\prime}$$

bezeichnet, ihre entsprechenden im jedesmaligen andern Raum also durch

$$A_1',\ A_2',\ A_3',\ A_4',\ E'; \qquad A_1^*,\ A_2^*,\ A_3^*,\ A_4^*,\ E^*;$$

und wir wenden nun auf diese Gruppen die vorher ermittelten Ergebnisse an.

Wir erhalten mit h_i als den Verhältnissen der Höhen des F.-Tetraeders im ungestrichenen Raum zu den gleichnamigen Abständen e_i des E.-Punktes aus der Tafel der Coordinaten

	x_1	x_2	x_3	x_4
von A_1	h_1	0	0	0
A_2	0	h_2	0	0
A_3	0	0	h_3	0
A_4	0	0	0	h_4

,

im ungestrichenen Raum mittelst der Gleichungen

$$\mu x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots$$

die folgende Tafel der μfachen Coordinaten der entsprechenden Punkte im gestrichenen Raum — wobei wir den gemeinsamen Factor h_i der Coordinaten von A_i' an der rechten Aussenseite geschrieben haben —

	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	
von A_1'	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	h_1
A_2'	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}	h_2
A_3'	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{43}	h_3
A_4'	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	h_4,

d. h. die $\frac{\mu}{h_k}$fache i^{te} Coordinate von A_k' ist gleich a_{ik}; und für die μfache i^{te} Coordinate des Punktes E' folgt ebenso der Ausdruck

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4},$$

die Summe der Coefficienten der i^{ten} Zeile der bezüglichen linearen Substitution. Eine zweite geometrische Interpretation aller Coefficienten erhält man aus der Betrachtung der Substitution b) in den Ebenencoordinaten, $\varrho\xi_k = a_{1k}\xi_1' + \cdots$ Sind die F.-Ebenen des gestrichenen Raumes $\mathbf{A}_1^{*'}$, $\mathbf{A}_2^{*'}$, $\mathbf{A}_3^{*'}$, $\mathbf{A}_4^{*'}$, $\mathbf{E}^{*'}$, sowie ihre entsprechenden im ungestrichenen Raum $\mathbf{A}_1^{*}, \ldots \mathbf{E}^{*}$, so hat man mit der Abkürzung $\eta_i^{*'}$ für die Verhältnisse der Abstände der Tetraederhöhen zu den gleichnamigen Eckenabständen der E.-Ebene aus der Tafel der Coordinaten

	ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_4'
von $\mathbf{A}_1^{*'}$	$\eta_1^{*'}$	0	0	0
$\mathbf{A}_2^{*'}$	0	$\eta_2^{*'}$	0	0
$\mathbf{A}_3^{*'}$	0	0	$\eta_3^{*'}$	0
$\mathbf{A}_4^{*'}$	0	0	0	$\eta_4^{*'}$

im gestrichenen Raum die folgende Tafel der ϱfachen Coordinaten der entsprechenden Ebenen im ungestrichenen Raum — wieder mit Anschreibung der gemeinsamen Factoren rechts aussen —

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	
$\mathbf{A}_1^{*}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\eta_1^{*'}$
$\mathbf{A}_2^{*}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\eta_2^{*'}$
$\mathbf{A}_3^{*}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\eta_3^{*'}$
$\mathbf{A}_4^{*}$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$\eta_4^{*'}$,

d. h. die $\frac{\varrho}{\eta_i^*}$fache k^{te} Coordinate von $\mathbf{A}_i^*$ ist gleich a_{ik}, und für die ϱfache k^{te} Coordinate der Ebene $\mathbf{E}^*$ folgt ebenso der Ausdruck

$$a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k}.$$

Es ist klar, dass diess zugleich die Bestimmtheit der Collineation der Räume durch fünf entsprechende Paare von Punkten oder Ebenen ausspricht. Von dieser doppelten geometrischen Interpretation aus gelangt man auch zu den möglichen Vereinfachungen der Projectivitätsgleichungen zwischen Elementargebilden zweiter und dritter Stufe analog wie bei denen der ersten.

Durch Unterdrückung der Glieder mit den Veränderlichen x_4', x_4, ξ_4', ξ_4 erhält man aus den Gleichungsgruppen a), b), a'), b') die Gleichungen der Collineation zwischen Gebilden zweiter Stufe, also zwischen zwei ebenen Systemen oder zwischen zwei Bündeln oder zwischen Bündel und ebenem System. Die geometrischen Deutungen von vorher bleiben mit denselben Kürzungen gültig; die Bestimmtheit durch vier entsprechende Elementenpaare ist dadurch ausgedrückt. Ebenso im Fall der Reciprocität oder für die Gleichungsgruppen c), d), c'), d'). Die Determinante des adjungierten Systems der Substitution ist dann das Quadrat der Substitutionsdeterminante und ihre Unterdeterminanten sind den mit dieser multiplicierten Coefficienten der Substitution gleich. Die bleibenden Coordinaten x_i, x_i' etc. können dabei in verschiedenen Ebenen oder in derselben Ebene, in verschiedenen Bündeln, etc. gedacht werden. Unterdrückt man ausser denen mit der vierten auch die Glieder mit der dritten Veränderlichen, so kommt man auf die im Anfang erinnerten Gleichungen des § 39 in vervollständigter Form zurück; die Determinante des adjungierten Systems ist der Substitutionsdeterminante gleich, ihre Unterdeterminanten sind selbst die ursprünglichen Coefficienten.

1) Man wiederhole die geometrische Deutung der Coefficienten in den Coordinatengleichungen der Projectivität der Elementargebilde erster Stufe, analog der von § 39 für die der Parametergleichung — mit Unterscheidung der gleichartigen und ungleichartigen Gebilde.

2) Man entwickele in der Weise des Textes die beiden Gesetze für die Reciprocität der Räume: Der Coefficient a_{ik} ist die $\frac{m}{k_i}$fache

i^{te} Coordinate der Ebene $\mathbf{A}_k'$; die Summe $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} + \alpha_{i4}$ ist die $m$fache i^{te} Coordinate von $\mathbf{E}'$.

3) Man zeige, dass für das durchgängige Entsprechen der gleichnamigen F.-Punkte und also auch der gleichnamigen F.-Ebenen collinearer Räume die Gleichungen derselben die Form annehmen $\mu x_i' = a_{ii} x_i, \qquad m \xi_k = a_{kk} \xi_k'$.

4) Wenn im vorigen Fall $x_1, x_2, \ldots$ in $1, x, y, z$ übergehen, so entspricht die unendlich ferne Ebene sich selbst, man hat als Gleichungen der Affinität mit entsprechenden gleichnamigen Coordinatenaxen

$$\mu = a_{11}, \qquad \mu x' = a_{22} x, \qquad \mu y' = a_{33} y, \qquad \mu z' = a_{44} z;$$

Proportionalität nach bestimmten Verhältnissen.

5) Die Gleichungen der Collineation für das Entsprechen von A_1 mit $A_2^{*'}$, von A_2 mit $A_4^{*'}$, von A_3 mit $A_3^{*'}$ und von A_4 mit $A_1^{*'}$ sind

$$\mu x_1' = a_{14} x_4, \quad \mu x_2' = a_{21} x_1, \quad \mu x_3' = a_{33} x_3, \quad \mu x_4' = a_{12} x_2.$$

6) Die Gleichungen der Reciprocität für das Entsprechen von den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 mit resp. den Ebenen $\mathbf{A}_3^{*'}$, $\mathbf{A}_4^{*'}$, $\mathbf{A}_1^{*'}$, $\mathbf{A}_2^{*'}$ werden

$$m \xi_1' = a_{13} x_3, \quad m \xi_2' = a_{24} x_4, \quad m \xi_3' = a_{31} x_1, \quad m \xi_4' = a_{42} x_2;$$
$$r \xi_1 = a_{31} x_3', \quad r \xi_2 = a_{42} x_4', \quad r \xi_3 = a_{13} x_1', \quad r \xi_4 = a_{24} x_2'.$$

7) Wenn wir von den allgemeinen projectivischen Coordinaten zu Cartesisch-Plücker'schen übergehen, sodass x_1, x_2, x_3, x_4 resp. $1, x, y, z$ und $\xi_2 : \xi_1$, $\xi_3 : \xi_1$, $\xi_4 : \xi_1$ zu ξ, η, ζ werden, so erhalten wir als allgemeine Gleichungen der Collineation der Räume

$$x' = \frac{a_{21} + a_{22} x + a_{23} y + a_{24} z}{a_{11} + a_{12} x + a_{13} y + a_{14} z}, \qquad y' = \frac{a_{31} + a_{32} x + a_{33} y + a_{34} z}{a_{11} + a_{12} x + a_{13} y + a_{14} z},$$
$$z' = \frac{a_{41} + a_{42} x + a_{43} y + a_{44} z}{a_{11} + a_{12} x + a_{13} y + a_{14} z};$$

die Coordinaten der Punkte im gestrichenen Raum als gleichbenannte Brüche von linearen Functionen der Coordinaten der Punkte im ungestrichenen Raum.

Das Verschwinden des Nenners bezeichnet die Ebene des Originalsystems, die der unendlich fernen des Bildsystems entspricht; also $\mathbf{R}$, nach der Bezeichnung von I, § 39 und II, § 43.

8) Ebenso sind die Gleichungen der Reciprocität

$$\xi' = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22} x + \alpha_{23} y + \alpha_{24} z}{\alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} z}, \qquad \eta' = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32} x + \alpha_{33} y + \alpha_{34} z}{\alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} z},$$
$$\zeta' = \frac{\alpha_{41} + \alpha_{42} x + \alpha_{43} y + \alpha_{44} z}{\alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} z}.$$

Das Verschwinden der drei Zähler giebt den Mittelpunkt des gestrichenen Systems, d. h. den der unendlich fernen Ebene entsprechenden Punkt desselben.

9) Man bilde die Gleichungen für die ξ, η, ζ für die Collineation und für die ξ, η, ζ bei der Reciprocität und stelle die Tafeln der geometrischen Interpretation der Coefficienten nach denen des Textes auf.

10) Wenn man in den Gleichungen von zwei allgemeinen linearen Gebilden zweiter und dritter Stufe die Parameter als Coordinaten der Formen ansieht, so kann man die Projectivität derselben in ganz analoger Weise ausdrücken, wie für die Elementargebilde dieser Stufen. (§ 35.)

Mit

$$\pi_1 U_1 + \pi_2 U_2 + \pi_3 U_3 = 0,$$
$$\pi_1' U_1^{*'} + \pi_2' U_2^{*'} + \pi_3' U_3^{*'} = 0$$

und bei den Relationen zwischen den Parametern π_i' und π_i

$$\mu \pi_i' = a_{i1} \pi_1 + a_{i2} \pi_2 + a_{i3} \pi_3$$

hat man die Projectivität der Gebilde zweiter Stufe. Wenn die bestimmenden Formen des ersten Gebildes $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ respective denen des zweiten $U_1^{*'} = 0$, etc. entsprechen, so werden die entsprechenden Parameter einander proportional oder gleich.

63. Wenn wir zwei collineare Räume als congruent und ihre entsprechenden Elemente als sich deckend betrachten, so sind die entsprechenden zu zwei Gruppen von fünf F.-Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, E; $A_1^{*'}, A_2^{*'}, A_3^{*'}, A_4^{*'}, E^{*'}$ mit diesen selbst identisch, A_i' mit A_i, A_i^* mit $A_i^{*'}$, ebenso wie ein beliebiger Punkt X mit seinem entsprechenden Punkt X' zusammenfällt. Die Gleichungen der Collineation sind nun die Gleichungen der Coordinaten-Transformation, d. h. sie zeigen, wie man aus den Coordinaten eines Punktes im System $A_1 \ldots E$ seine Coordinaten im System $A_1^{*'} \ldots E^{*'}$ ableitet. Die Coefficienten der bezüglichen linearen Substitution haben dabei offenbar die in folgenden Sätzen ausgesprochene Bedeutung:

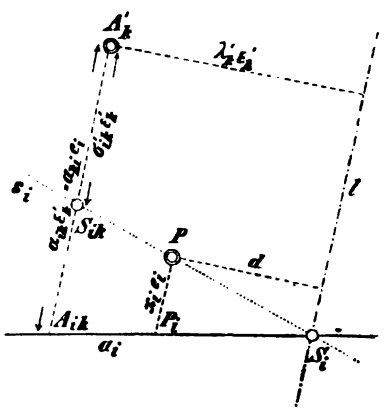
Die $\frac{\mu}{h_k}$fache i^{te} Coordinate von A_k in Bezug auf das gestrichene F.-System ist gleich a_{ik}, und für die μfache i^{te} Coordinate von E in Bezug auf dasselbe hat man den Werth $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4}$.

Die $\frac{\varrho}{\eta_i^{*'}}$fache k^{te} Coordinate von $\mathbf{A}_i^{*'}$ in Bezug auf das ungestrichene F.-System ist gleich a_{ik} und die ϱfache k^{te} Coordinate der Ebene $\mathbf{E}^{*'}$ ist $a_{1k} +$ etc.

Wir wollen aber diese Ergebnisse auch direct ableiten; zuerst für Gebilde zweiter Stufe, speciell das ebene System, dann erst für die der dritten.

Die fundamentalen Gruppen der Punkte A_1, A_2, A_3, E und Geraden a_1, a_2, a_3, e im alten, A_1', A_2', A_3', E' (a_1', a_2', a_3', e') im neuen System in demselben Gebilde zweiter Stufe — wir lassen hinfort die Unterscheidungszeichen * als überflüssig weg — seien so festgestellt, dass e, e' die Harmonikalen zu E, E' in Bezug auf die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ respective sind, und die Coordinaten von A_k' und a_k' im ungestrichenen System seien α_{k1}, α_{k2}, α_{k3} respective α_{k1}, α_{k2}, α_{k3}; die von A_i und a_i im gestrichenen System aber α_{i1}', α_{i2}', α_{i3}' respective α_{i1}', α_{i2}', α_{i3}'. Dazu habe ein Punkt P und eine gerade Linie p in jenem System die Coordinaten x_i, ξ_i und in diesem die Coordinaten x_i' und ξ_i' respective. Ist nun (Fig. 38) l eine beliebige P nicht enthaltende Gerade, welche a_1, a_2, a_3 in den Punkten S_1, S_2, S_3 schneidet, und verbindet man diese Punkte mit P durch Gerade s_1, s_2, s_3, so wollen wir die Längen

Fig. 38.



$$A_kA_{ik},\quad PP_i,\quad e_i,$$

deren Verhältnisse die Punktcoordinaten a_{ki}, x_i sind, in der Richtung von l, die Parallelabstände der Seiten a_1, a_2, a_3 des alten Dreiecks und der Strahlen s_1, s_2, s_3 von den Ecken des neuen Dreiecks in derselben Richtung und die der Geraden l von diesen Ecken in der beliebigen Richtung d messen, und mit S_{ik} den Schnittpunkt von s_i mit A_kA_{ik}, mit σ_{ik}' und λ_k' die neuen Coordinaten der Geraden s_i und l bezeichnen. Wir erhalten dann als neue Coordinaten eines jener Strahlen s_i für $k = 1, 2, 3$

$$\sigma_{ik}'\varepsilon_k' = \alpha_{ik}'\varepsilon_k' - A_{ik}S_{ik} = \alpha_{ik}'\varepsilon_k' - \frac{S_iS_{ik}}{S_iP}\cdot PP_i = \alpha_{ik}'\varepsilon_k' - \frac{\lambda_k'\varepsilon_k'}{d}x_ie_i;$$

also

$$\sigma_{i1}' = \alpha_{i1}' - \lambda_1' \frac{e_i}{d} x_i, \quad \sigma_{i2}' = \alpha_{i2}' - \lambda_2' \frac{e_i}{d} x_i, \quad \sigma_{i3}' = \alpha_{i3}' - \lambda_3' \frac{e_i}{d} x_i;$$

und somit die auf das neue Dreieck bezogene Gleichung desselben Strahls s_i

$$0 = h_1' \sigma_{i1}' x_1' + h_2' \sigma_{i2}' x_2' + h_3' \sigma_{i3}' x_3' = h_1' \alpha_{i1}' x_1' + h_2' \alpha_{i2}' x_2'$$
$$+ h_3' \alpha_{i3}' x_3' - (h_1' \lambda_1' x_1' + h_2' \lambda_2' x_2' + h_3' \lambda_3' x_3') \frac{e_i}{d} x_i;$$

oder mit der Abkürzung m für $\Sigma \lambda_k' x_k'$ und wegen $\alpha_{ik}' \varepsilon_k' = a_{ki} e$

$$m x_i = \frac{d}{e_i} (h_1' \alpha_{i1}' x_1' + h_2' \alpha_{i2}' x_2' + h_3' \alpha_{i3}' x_3')$$
$$= d \left(\frac{h_1'}{\varepsilon_1'} a_{1i} x_i' + \frac{h_2'}{\varepsilon_2'} a_{2i} x_2' + \frac{h_3'}{\varepsilon_3'} a_{3i} x_3' \right)$$

oder mit statthaften Vereinfachungen und für i gleich 1, 2, 3

$$x_1 = h_1' \alpha_{11}' x_1' + h_2' \alpha_{12}' x_2' + h_3' \alpha_{13}' x_3' = a_{11} x_1' + a_{21} x_2' + a_{31} x_3',$$
$$x_2 = h_1' \alpha_{21}' x_1' + h_2' \alpha_{22}' x_2' + h_3' \alpha_{23}' x_3' = a_{12} x_1' + a_{22} x_2' + a_{32} x_3',$$
$$x_3 = h_1' \alpha_{31}' x_1' + h_2' \alpha_{32}' x_2' + h_3' \alpha_{33}' x_3' = a_{13} x_1' + a_{23} x_2' + a_{33} x_3'.$$

Die Coordinaten x_i' des Punktes P genügen den Gleichungen aller drei Strahlen s_i, und m darf in die x_i, die $d : e_i$ dürfen in die α_{ik}', die $d h_i' : \varepsilon_i'$ in die a_{ik} einbezogen werden, weil ihre Verhältnisse dadurch nicht geändert werden.

Die Substitutionscoefficienten in Zeilen sind die mit h_1', h_2', h_3' respective multiplicierten neuen Coordinaten der Seiten des alten Dreiecks, dieselben nach Reihen die alten Coordinaten der Ecken des neuen.

Denken wir die ersten Seiten a_1 und a_1' in's Unendliche gerückt, so haben wir

$$x = \frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{\alpha_{23}'}{\alpha_{21}'} \frac{x_3'}{x_1'} + \frac{\alpha_{22}'}{\alpha_{21}'} \frac{x_2'}{x_1'} + 1 \right) \frac{\alpha_{21}'}{\alpha_{11}'} = \left(\frac{1}{\alpha} x' + \frac{1}{\beta} y' + 1 \right) a,$$

$$y = \frac{y_3}{y_1} = \left(\frac{\alpha_{33}'}{\alpha_{31}'} \frac{x_3'}{x_1'} + \frac{\alpha_{32}'}{\alpha_{31}'} \frac{x_2'}{x_1'} + 1 \right) \frac{\alpha_{31}'}{\alpha_{11}'} = \left(\frac{1}{\gamma} x' + \frac{1}{\delta} y' + 1 \right) b.$$

Und setzen wir überdiess

$$\angle (x, y) = \angle (x', y') = 90^0,$$

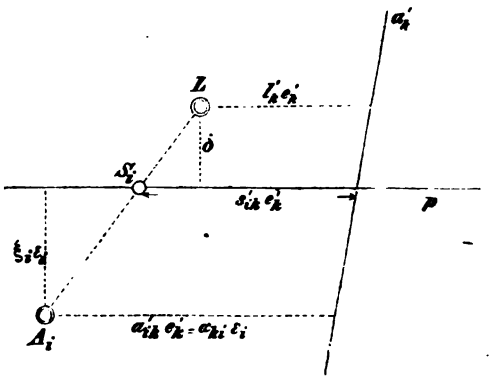
so ist daraus

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b.$$

Um sodann die Transformationen für die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_1', ξ_2', ξ_3' einer Geraden p zu bilden, nehmen wir

irgend einen nicht auf p liegenden Punkt L der Ebene zu Hilfe. (Fig. 39.) Die geraden Verbindungslinien desselben mit den Ecken A_1, A_2, A_3 des alten Dreiecks bestimmen auf der Geraden p drei Punkte S_1, S_2, S_3; wir ziehen die Einheiten e_1', e_2', e_3' parallel zu p und messen die Abstände $\xi_1\varepsilon_1$, $\xi_2\varepsilon_2$,

Fig. 39.



$\xi_3\varepsilon_3$ der Geraden p von den Ecken A_1, A_2, A_3 in einer beliebig gewählten Richtung δ und erhalten für die neuen Coordinaten s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} irgend eines der drei Punkte S_i mit l_1', l_2', l_3' als den neuen Coordinaten von l

$$(\delta + \xi_i\varepsilon_i)\, s_{ik}e_k' = \delta\, a_{ik}'e_k' + \xi_i\varepsilon_i l_k'e_k'$$

oder

$$(\delta + \xi_i\varepsilon_i)\, s_{ik}' = \delta\, a_{ik}' + \xi_i\varepsilon_i l_k'.$$

Bilden wir die Gleichung des Punktes S_i, so folgt nach Weglassung des Factors $\delta + \xi_i\varepsilon_i$

$$(h_1'l_1'\xi_1' + h_2'l_2'\xi_2' + h_3'l_3'\xi_3')\frac{\varepsilon_i}{\delta}\xi_i = h_1'a_{i1}'\xi_1' + h_2'a_{i2}'\xi_2' + h_3'a_{i3}'\xi_3'$$

oder mit der Abkürzung μ für $\Sigma h_k'l_k'\xi_k'$

$$\mu\xi_i = \frac{\delta}{\varepsilon_i}(h_1'a_{i1}'\xi_1' + h_2'a_{i2}'\xi_2' + h_3'a_{i3}'\xi_3')$$

$$= h_1'\frac{\delta}{e_1}a_{i1}\xi_1' + h_2'\frac{\delta}{e_2}a_{i2}\xi_2' + h_3'\frac{\delta}{e_3}a_{i3}\xi_3'.$$

Für $i = 1, 2, 3$ erhalten wir die Gleichungen der Punkte S_1, S_2, S_3, und da dieselben alle auf p liegen, so genügen die Coordinaten ξ' der letztern jenen drei Gleichungen gleich-

zeitig und dieselben sind unsere Transformationsformeln; wir lassen μ in die ξ_i, die $\delta : \varepsilon_i$ in die a_{i1}', a_{i2}', a_{i3}' und die $h_k' \frac{\delta}{e_k'}$ in die α_{1k}, α_{2k}, α_{3k} eingehen und erhalten für sie die Form

$$\xi_1 = h_1' a_{11}' \xi_1' + h_2' a_{12}' \xi_2' + h_3' a_{13}' \xi_3' = \alpha_{11} \xi_1' + \alpha_{21} \xi_2' + \alpha_{31} \xi_3',$$
$$\xi_2 = h_1' a_{21}' \xi_1' + h_2' a_{22}' \xi_2' + h_3' a_{23}' \xi_3' = \alpha_{12} \xi_1' + \alpha_{22} \xi_2' + \alpha_{32} \xi_3',$$
$$\xi_3 = h_1' a_{31}' \xi_1' + h_2' a_{32}' \xi_2' + h_3' a_{33}' \xi_3' = \alpha_{13} \xi_1' + \alpha_{23} \xi_2' + \alpha_{33} \xi_3';$$

worin die Coefficienten in Zeilen die mit h_1', h_2', h_3' multiplicierten neuen Coordinaten der Ecken des alten Dreiecks und dieselben in Reihen die alten Coordinaten der Ecken des neuen bedeuten.

In der Ebene wird also die Transformation der projectivischen Coordinaten vermittelt

a) für Punktcoordinaten durch eine beliebige Gerade l,
b) für Strahlencoordinaten durch einen beliebigen Punkt L.

Im Raume oder im Gebilde dritter Stufe analog. Um den Uebergang von den Coordinaten x_i eines Punktes P zu den neuen Coordinaten x_i' desselben zu machen, legen wir durch ihn und die Spuren s_i der beliebigen Ebene **L** in den Flächen des F.-Tetraeders die Ebenen $\mathbf{P}_i$ und stellen ihre Gleichungen auf — für $i = 1, 2, 3, 4$

$$(\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \lambda_3' x_3' + \lambda_4' x_4') \frac{e_i}{p} x_i$$
$$= \alpha_{i1}' x_1' + \alpha_{i2}' x_2' + \alpha_{i3}' x_3' + \alpha_{i4}' x_4',$$

wenn p den in einer bestimmten Richtung gemessenen Abstand des Punktes P von der Ebene **L** bezeichnet. Wir erhalten daraus die Transformationsformeln

$$x_i = \alpha_{i1}' x_1' + \alpha_{i2}' x_2' + \alpha_{i3}' x_3' + \alpha_{i4}' x_4'$$
$$= a_{1i} x_1' + a_{2i}' x_2' + a_{3i}' x_3' + a_{4i}' x_4';$$

deren Coefficienten in Zeilen die neuen Coordinaten der Seitenflächen des alten, in Reihen die alten Coordinaten der Seitenflächen des neuen Tetraeders bezeichnen.

Ebenso dient für die Transformation der ξ_i einer Ebene **P** ein beliebiger Punkt L, mittelst der vier Schnittpunkte von **P** mit den Geraden, die ihn mit den Ecken des alten Tetraeders verbinden. Die Gleichungen dieser vier Punkte — für $i = 1, 2, 3, 4$

$$(h_1' l_1' \xi_1' + h_2' l_2' \xi_2' + \cdot\cdot) \frac{\varepsilon_i}{\pi} \xi_i$$

$$h_1' a_{i1}' \xi_1' + h_2' a_{i2}' \xi_2' + h_3' a_{i3}' \xi_3' + h_4' a_{i4}' \xi_4'$$

liefern sofort die Transformationsformeln

$$\xi_i = h_1' \alpha_{i1}' \xi_1' + h_2' \alpha_{i2}' \xi_2' + \cdots = \alpha_{1i} \xi_1' + \alpha_{2i} \xi_2' + \alpha_{3i} \xi_3' + \alpha_{4i} \xi_4'.$$

Durch Zusammensetzung gemäss den Definitionen

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \quad \pi_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$$

ergeben sich aus den beiden Gruppen der vorigen Formeln die Transformationsgleichungen für die Strahlencoordinaten; mit der Bemerkung dass

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ir}', & \alpha_{is}' \\ \alpha_{kr}', & \alpha_{ks}' \end{vmatrix} = \alpha'^{ik}_{rs} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{ri}, & a_{si} \\ a_{rk}, & a_{sk} \end{vmatrix} = a^{rs}_{ik}$$

die Coordinaten der Kanten des alten und des neuen Tetraeders respective im neuen und alten System bezeichnen, findet man

$$p_{ik} = \alpha'^{ik}_{12} p_{12}' + \alpha'^{ik}_{23} p_{23}' + \cdot\cdot\cdot\cdot = a^{12}_{ik} p_{12}' + \cdot\cdot\cdot\cdot + a^{34}_{ik} p_{34}',$$

wo die Zeilen der Substitutionscoefficienten die neuen Coordinaten der Kanten des alten und ihre Reihen die alten Coordinaten der Kanten des neuen Tetraeders repräsentieren.

Die Ausführung der allgemeinen Transformation der Coordinaten x_i wird darnach wie folgt vorgehen. Es seien $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, $x_i^{(4)}$ die Coordinaten der vier neuen F.-Punkte im alten Coordinatensystem und ebenso $x_i^{(e)}$ die des neuen E.-Punktes und β_{ik} die zu bestimmenden Coefficienten der linearen Substitution, welche dieser Coordinatentransformation äquivalent ist. Für diese Bestimmung gelten dann die vier mit zwölf Gleichungen äquivalenten Relationen

$$\beta_{1i} : \beta_{2i} : \beta_{3i} : \beta_{4i} = x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)}$$

und die vier weiteren

$$\beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4} = \mu x_i^{(e)}.$$

Von diesen Gleichungen erlaubt die erste Gruppe die Coefficienten β_{ik} mit den ersten Indices 2, 3, 4 durch die Coefficienten mit dem ersten Index 1 und die Coordinaten der vier neuen F.-Punkte auszudrücken; sodann lassen sich aus der zweiten Gruppe die vier Coefficienten β_{1k} direct bestimmen. Zum kurzen Ausdruck der Sache sei die Determinante der

Coordinaten $x_i^{(1)}$, etc. der neuen F.-Punkte mit dem Werthe $\mathbf{X}$ und das System ihrer adjungierten Elemente $X_i^{(1)}$, etc. eingeführt; also

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)}, & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)}, & x_2^{(4)} \\ x_3^{(1)}, & x_3^{(2)}, & x_3^{(3)}, & x_3^{(4)} \\ x_4^{(1)}, & x_4^{(2)}, & x_4^{(3)}, & x_4^{(4)} \end{vmatrix} = \mathbf{X}, \quad \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, & X_1^{(3)}, & X_1^{(4)} \\ X_2^{(1)}, & X_2^{(2)}, & X_2^{(3)}, & X_2^{(4)} \\ X_3^{(1)}, & X_3^{(2)}, & X_3^{(3)}, & X_3^{(4)} \\ X_4^{(1)}, & X_4^{(2)}, & X_4^{(3)}, & X_4^{(4)} \end{vmatrix}.$$

Dann erhalten wir zur Berechnung der Coefficienten der Substitution den Ausdruck

$$\beta_{hi}\mathbf{X} = \mu x_h^{(i)}\{x_1^{(s)}X_1^{(i)} + x_2^{(s)}X_2^{(i)} + x_3^{(s)}X_3^{(i)} + x_4^{(s)}X_4^{(i)}\}.$$

Ganz nach dem gleichen Vorgang transformiert man die Coordinaten ξ_i.

Sind die alten Coordinaten Cartesische, so hat man zu setzen

$$x_1^{(i)} = 1, \quad x_2^{(i)} = x^{(i)}, \quad x_3^{(i)} = y^{(i)}, \quad x_4^{(i)} = z^{(i)};$$
$$x_1^{(s)} = 1, \quad x_2^{(s)} = x^{(s)}, \quad x_3^{(s)} = y^{(s)}, \quad x_4^{(s)} = z^{(s)}$$

und analog für die Plücker'schen Coordinaten. Alle speciellen Fälle folgen aus der allgemeinen Regel. Wenn die Ecken des neuen F.-Tetraeders mit den gleichnamigen Ecken des alten zusammenfallen, indess der E.-Punkt nach dem Punkt von den Coordinaten $x_i^{(s)}$ verlegt wird, so verschwinden in der Coordinatentafel und im adjungierten System derselben alle Elemente, ausgenommen die des Hauptgliedes $h_1 : e_1$, etc. und $h_2h_3h_4 : e_2e_3e_4$, etc., sodass $\mathbf{X} = \frac{h_1h_2h_3h_4}{e_1e_2e_3e_4}$ und $\beta_{ii} = \mu x_i^{(s)}$ wird, während alle β_{hi} verschwinden.

Diese Transformation wird daher durch die Substitution

$$x_i = x_i^{(s)}x_i'$$

ausgedrückt oder an Stelle der alten Coordinaten sind die mit den gleichnamigen Coordinaten des neuen E.-Punktes multiplicierten neuen zu setzen. Man kann daher z. B. die Bequemlichkeit der Entwickelung mit Volumen- und Vierpunkt-Coordinaten immer benutzen und leicht zu den allgemeinen Resultaten übergehen.

1) Man entwickele die allgemeinen Formeln der Transformation von einem System schiefwinkliger Cartesischer Coordinaten in der Ebene zu einem andern.

Seien A_1 und A_1' die Anfangspunkte und A_2, A_3 resp. A_2', A_3' die Axenrichtungen des alten und des neuen Systems, dazu a und b Abscisse und Ordinate des neuen Anfangspunktes im alten System, α und α' die Winkel der neuen Axe $A_1'A_2'$ gegen die alten Axen A_1A_2, A_1A_3 resp., sowie β, β' die Winkel der neuen Axe $A_1'A_3'$ gegen dieselben Axen, sämmtlich gemessen auf der Seite der E.-Punkte, also als Richtungsunterschiede z. B. der Strahlen $A_1'E_3'$ und A_1E_3, A_1E_2 und $A_1'E_2'$ etc. und so, dass für ω als den Winkel der Axen des alten Systems $\omega = \alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ ist. Man erhält dann für r als einen von A_1 ausgehenden beliebig langen Radius vector die Coordinatendeterminante der neuen F.-Punkte im alten System

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \\ a, & \frac{r\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, & \frac{r\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega} \\ b, & \frac{r\sin\alpha}{\sin\omega}, & \frac{r\sin\beta}{\sin\omega} \end{vmatrix} \equiv \mathfrak{X} \equiv \frac{r^2\sin(\beta-\alpha)}{\sin\omega};$$

und daher das adjungierte System dieser Determinante

$$\begin{array}{lll} \frac{r^2\sin(\beta-\alpha)}{\sin\omega}, & \frac{r}{\sin\omega}\{b\sin(\omega-\beta)-a\sin\beta\}, & \frac{r}{\sin\omega}\{a\sin\alpha-b\sin(\omega-\alpha)\} \\ 0, & \frac{r}{\sin\omega}\sin\beta, & \frac{-r}{\sin\omega}\sin\alpha \\ 0, & \frac{-r}{\sin\omega}\sin(\omega-\beta), & \frac{r}{\sin\omega}\sin(\omega-\alpha) \end{array}$$

Man erhält ferner die Coordinaten des E.-Punktes E' als der freien Ecke des Rhombus von der Seite Eins in den neuen Axen aus der leicht zu bildenden Figur mit

$$x_2^{(e)} = x^{(e)} = a + \frac{\sin(\omega-\alpha)+\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},$$

$$x_3^{(e)} = y^{(e)} = b + \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\omega}$$

und daher die Multiplicatoren der β_{i1}, β_{i2}, β_{i3} in der Klammer rechts gleichmässig mit dem Werthe

$$\frac{r\sin(\beta-\alpha)}{\sin\omega};$$

damit aber die Coefficienten der Substitution

$$\beta_{11} = \mu, \quad \beta_{21} = \mu a, \quad \beta_{31} = \mu b;$$
$$\beta_{12} = 0, \quad \beta_{22} = \mu \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}, \quad \beta_{32} = \mu \frac{\sin \alpha}{\sin \omega};$$
$$\beta_{13} = 0, \quad \beta_{23} = \mu \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \beta}, \quad \beta_{33} = \mu \frac{\sin \beta}{\sin \omega}$$

und endlich die Substitution selbst

$$x = a + x' \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \omega},$$
$$y = b + y' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}.$$

Sind beide Coordinatensysteme rechtwinklig oder ist

$$\omega = 90^0, \quad \beta = 90^0 + \alpha, \quad \alpha' = 90^0 - \alpha, \quad \beta' = -\alpha,$$

so werden sie einfach

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Man bemerkt, dass β_{12}, β_{13} verschwinden, weil die F.-Linien $A_2 A_3$ und $A_2' A_3'$ ineinander liegen.

Die analoge Entwickelung im Raum wollen wir nicht ausführen.

2) Das Hyperboloid aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln und aus orthogonalen Ebenenpaaren

$$\lambda(1 - m^2)(y - b) = mz - x, \quad y + b = \lambda(mz + x)$$

in II, § 36, 12 f. mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2(1 - m^2)} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{m^2 z^2}{b^2(1 - m^2)} = 1$$

bietet erstens ein Beispiel für die Transformation auf Keilcoordinaten (§ 23) und zweitens ein solches für die auf ein Tetraeder mit vier endlich entfernten Ecken bezogenen, wenn man seine Erzeugungen möglichst eng mit den F.-Elementen verbindet.

Für das erste seien unter Beibehaltung des E.-Punktes (Coordinaten 1, 1, 1, 1) die F.-Punkte A_1, A_2 die Fusspunkte der kürzesten Distanz der ursprünglichen Scheitelkanten (Erzeugende aus den Scheiteln der grossen Axe des elliptischen Hauptschnittes) in ihnen und A_3, A_4 die Richtungen derselben.

Die Determinante $\mathfrak{X}$ der Coordinaten der F.-Punkte ist dann

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & \infty, & \infty \\ b, & -b, & b, & -b \\ 0, & 0, & m\infty, & -m\infty \end{vmatrix} = -4 b m \infty^2,$$

und ihr adjungiertes System

$$\begin{vmatrix} -2bm\infty^2, & -2bm\infty^2, & 0, & 0 \\ 2bm\infty, & 2bm\infty, & -2bm\infty, & -2bm\infty \\ -2m\infty^2, & 2m\infty^2, & 0, & 0 \\ 2b\infty, & -2b\infty, & -2b\infty, & 2b\infty \end{vmatrix};$$

daraus ergeben sich die Coefficienten der Substitution

$$\begin{aligned} &\beta_{13}=0, \quad \beta_{14}=0, \quad \beta_{21}=0, \quad \beta_{22}=0, \\ &\beta_{41}=0, \quad \beta_{42}=0, \quad \beta_{34}=0, \quad \beta_{33}=0; \\ &2b\beta_{11}=\mu(1+b), \quad 2b\beta_{12}=-\mu(1-b), \\ &2m\beta_{24}=-\mu(1-m), \quad 2m\beta_{23}=\mu(1+m); \\ &2\beta_{44}=\mu(1-m), \quad 2\beta_{43}=\mu(1+m), \\ &2\beta_{31}=\mu(1+b), \quad 2\beta_{32}=\mu(1-b) \end{aligned}$$

und die Substitution selbst

$$x=b\frac{(1+m)x_3+(1-m)x_4}{(1+b)x_1-(1-b)x_2}, \quad y=b\frac{(1+b)x_1+(1-b)x_2}{(1+b)x_1-(1-b)x_2},$$

$$z=\frac{b}{m}\frac{(1+m)x_3-(1-m)x_4}{(1+b)x_1-(1-b)x_2}.$$

Sie liefert

$$\begin{aligned} &y-b=2b(1-b)x_2, \quad mz-x=-2b(1-m)x_4; \\ &y+b=2b(1+b)x_1, \quad mz+x=2b(1+m)x_3 \end{aligned}$$

und somit die Gleichung des erzeugten Hyperboloides

$$(1-b^2)x_1x_2+x_3x_4=0.$$

Die Kreisschnittdiametralebenen $z=\pm mx$ gehen über in

$$(1+m^2)x_4=(1+m)^2x_3, \quad (1-m)^2x_4=(1+m)^2x_3.$$

Wählt man aber zu den Scheitelkanten der rechtwinkligen Paare s_1, s_2 die Geraden $y=\pm b$, $mz=\pm x$ und zu den Scheitelkanten der gleichwinkligen Büschel g_1, g_2 die Erzeugenden der andern Schaar

$$x=\mp b\sqrt{1-m^2}, \quad y\sqrt{1-m^2}=\mp mz,$$

und nimmt man das von ihnen gebildete Vierseit als fundamental, so ist die Coordinatentafel der neuen F.-Punkte s_1g_1, s_2g_1, s_2g_2, s_1g_2

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ -b\sqrt{1-m^2}, & -b\sqrt{1-m^2}, & b\sqrt{1-m^2}, & b\sqrt{1-m^2} \\ b, & -b, & -b, & b \\ -\frac{b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{b}{m}\sqrt{1-m^2}, & -\frac{b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{b}{m}\sqrt{1-m^2} \end{vmatrix} = \frac{16b^3}{m}(1-m^2)$$

und ihr adjungiertes System

$$\begin{vmatrix} \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m} \\ -\frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & -\frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2} \\ \frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & -\frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & -\frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^2(1-m^2)}{m} \\ -\frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & -\frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2} \end{vmatrix}.$$

Es giebt solcher Vierseite oder Tetraeder offenbar nur zwei zu den Hauptebenen der Fläche orthogonal-symmetrische, sodass sie zusammen ein rechtwinkliges Parallelepiped bilden; und man sieht, dass seine zu x, y, z resp. parallelen Kanten die Hauptaxenlängen $2a$, $2b$, $2c$ der Fläche liefern.

Für (1, 0, 0, 0) als die Coordinaten des neuen E.-Punktes, als des Mittelpunktes der Fläche, folgen die Coefficienten der Substitution aus der Formel

$$\beta_{kl} \mathbf{X} = \mu x_k^{(l)} X_1^{(l)}$$

und die Substitution selbst

$$x = -b\sqrt{1-m^2}\,\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}, \quad y = b\,\frac{x_1+x_4-x_2-x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4},$$

$$z = -\frac{b\sqrt{1-m^2}}{m}\,\frac{x_1+x_3-x_2-x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}.$$

Sie verwandelt die Gleichung des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{b^2(1-m^2)}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{m^2z^2}{b^2(1-m^2)}=1$$

in ihre einfachste Form

$$x_1x_3+x_2x_4=0.$$

Die Polarebene des E.-Punktes (1, 1, 1, 1) in Bezug auf die Fläche ist

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$

die E.-Ebene, und da ihre linke Seite als gemeinsamer Nenner der Werthe von x, y, z auftritt, in der That die unendlich ferne Ebene, die Polarebene des Mittelpunktes.

Die durch die Scheitelkanten der benutzten gleichwinkligen Büschel gehenden Tangentialebenen des imaginären Kreises im Unendlichen sind

$$i\left(1+\frac{x}{b\sqrt{1-m^2}}\right)=\frac{y}{b}+\frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}},$$

$$1-\frac{x}{b\sqrt{1-m^2}}=i\left(\frac{y}{b}-\frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}}\right);$$

sie werden durch die Substitution resp. übergeführt in

$$i(x_3+x_4)+(x_3-x_4)=0,\quad i(x_1-x_2)-(x_1+x_2)=0$$

und das Product derselben ist

$$(x_1x_4-x_2x_3)+i(x_1x_3+x_2x_4)=0.$$

Nun ist $x_1x_4=x_2x_3$ das hyperbolische Paraboloid durch das Vierseit $A_1A_3A_4A_2$, das auch den E.-Punkt enthält; und $x_1x_3+x_2x_4=0$ ist das betrachtete Hyperboloid, welches das windschiefe Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ enthält. Beide haben die zwei reellen Erzeugenden A_1A_2, A_3A_4 und die beiden rein imaginären gemein, welche aus den angezogenen Ebenen entstehen und durch die alle anderen Hyperboloide aus gleichwinkligen Büscheln von denselben Scheitelkanten auch gehen müssen.

64. Wir wissen, dass die Kreispunkte der Ebene und der imaginäre Kreis in der unendlich fernen Ebene, oder das Absolute in Ebene und Raum mittelst rechtwinkliger Plücker'scher Coordinaten ausgedrückt sind durch

$$\xi^2+\eta^2=0 \quad \text{und} \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$$

respective. Sie repräsentieren das Absolute als Enveloppe von der zweiten Classe und wir wollen sie in projectivischen Coordinaten ausdrücken; für die Ebene sei die Entwickelung ausgeführt. Es seien dazu (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten der F.-Punkte A_1, A_2, A_3 und ξ_i oder die Verhältnisse $\pi_i : \varepsilon_i$ der Abstände von ihr und der E.-Linie die Coordinaten einer Geraden. Wenn die Cartesisch-Plücker'sche Gleichung derselben ist

$$\xi x+\eta y+1=0,$$

so hat man nach § 18, 2

$$\pi_i=\varepsilon_i\xi_i=\frac{\xi x_i+\eta y_i+1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

und somit die Gleichungen

$$\varepsilon_1\xi_1\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi x_1-\eta y_1=1,$$

$$\varepsilon_2\xi_2\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi x_2-\eta y_2=1,$$

$$\varepsilon_3\xi_3\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi x_3-\eta y_3=1;$$

man zieht aus ihnen

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} : \xi : \eta : 1$$

$$= \begin{vmatrix} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, 1, -y_1 \\ \varepsilon_2\xi_2, 1, -y_2 \\ \varepsilon_3\xi_3, 1, -y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, -x_1, 1 \\ \varepsilon_2\xi_2, -x_2, 1 \\ \varepsilon_3\xi_3, -x_3, 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, x_1, y_1 \\ \varepsilon_2\xi_2, x_2, y_2 \\ \varepsilon_3\xi_3, x_3, y_3 \end{vmatrix}$$

und bildet hieraus die Gleichung des Absoluten in ξ_i-Coordinaten $\xi^2+\eta^2=0$ als

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, 1, -y_1 \\ \varepsilon_2\xi_2, 1, -y_2 \\ \varepsilon_3\xi_3, 1, -y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, -x_1, 1 \\ \varepsilon_2\xi_2, -x_2, 1 \\ \varepsilon_3\xi_3, -x_3, 1 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

zugleich aber die identische Relation zwischen den projectivischen Coordinaten einer beliebigen Geraden (vergl. § 27) in der Form

$$\begin{vmatrix} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, 1, -y_1 \\ \quad\quad\quad\quad \\ \quad\quad\quad\quad \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varepsilon_1\xi_1, -x_1, 1 \\ \quad\quad\quad\quad \\ \quad\quad\quad\quad \end{vmatrix}^2,$$

welche die Verbindung derselben mit der Gleichung des Absoluten wieder in's Licht stellt. Ihre linke Seite ist das Quadrat $4F^2$ der doppelten Flächenzahl F des F.-Dreiecks; die rechte giebt durch Entwickelung

$$\varepsilon_1^2\xi_1^2\{(y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2\} + \cdots$$
$$+ \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1\xi_2\{2(y_2-y_3)(y_3-y_1)+2(x_2-x_3)(x_3-x_1)\} + \cdots$$

d. h. für s_i als die Längenzahlen der Seiten des F.-Dreiecks

$$\varepsilon_1^2\xi_1^2 s_1^2 + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1\xi_2(s_3^2 - s_1^2 - s_2^2) + \cdots$$

oder $$s_1^2(\varepsilon_1\xi_1 - \varepsilon_2\xi_2)(\varepsilon_1\xi_1 - \varepsilon_3\xi_3) + \cdots;$$

und mit α_i als dem Winkel des F.-Dreiecks an der Ecke A_i

$$(\varepsilon_1\xi_1)s_1^2 + \cdots - 2(\varepsilon_1\xi_1)(\varepsilon_2\xi_2)s_1 s_2 \cos\alpha_3 - \cdots$$

Für Dreipunktcoordinaten wird die identische Relation zwischen den ξ_i speciell

$$4F^2 = \xi_1^2 s_1^2 + \cdots - 2\xi_1\xi_2 s_1 s_2 \cos\alpha_3 - \cdots$$

und somit auch die Gleichung des Absoluten

$$0 = \xi_1^2 s_1^2 + \cdots - 2\xi_1\xi_2 s_1 s_2 \cos\alpha_3 - \cdots$$

oder $$0 = s_1^2(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3) + \cdots$$

Dass das Absolute ein Punktepaar ist, zeigt das Verschwinden der Discriminante dieser Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & -\cos\alpha_3, & -\cos\alpha_2 \\ -\cos\alpha_3, & 1, & -\cos\alpha_1 \\ -\cos\alpha_2, & -\cos\alpha_1, & 1 \end{vmatrix},$$

welches aussagt, dass die Winkel α_i die Winkel eines Dreiecks sind.

Die Durchführung der analogen Entwickelung im Raum von drei Dimensionen bietet keine Schwierigkeit.

Da die Tangenten eines Kreises aus seinem Mittelpunkt x_i nach den Punkten des Absoluten gehen, so hat man als Gleichungsform desselben

$$(\xi_1 x_1' + \cdot\cdot)^2 = \xi_1^2 s_1^2 + \cdot\cdot - 2\xi_1\xi_2 s_1 s_2 \cos\alpha_3 - \cdot\cdot,$$

woraus speciell die dem F.-Dreieck eingeschriebenen Kreise für $x_i' = \pm s_i$ hervorgehen; also z. B. für $x_i' = + s_i$

$$s_1 s_2 \xi_1 \xi_2 \cos^2\frac{\alpha_3}{2} + \cdot\cdot = 0$$

oder in Punktcoordinaten

$$s_2^2 s_3^2 x_1^2 \cos^4 \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cdot\cdot - 2 s_1 s_2 s_3^2 x_1 x_2 \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_1 \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_2 - \cdot\cdot = 0$$

d. h. auch

$$(s_2 s_3 x_1)^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \cdot\cdot = 0.$$

Die Bedingung der Orthogonalität von zwei Geraden ξ_i' und ξ_i'' ist die Relation der harmonischen Trennung ihrer Richtungen durch die Kreispunkte

$$s_1^2 \xi_1' \xi_1'' + \cdot\cdot = s_1 s_2 \cos\alpha_3 (\xi_1' \xi_2'' + \xi_1'' \xi_2') + \cdot\cdot;$$

man hat also z. B. für die zur F.-Linie $x_1 = 0$ normalen Geraden die Relation

$$s_1 \xi_1 = s_2 \xi_2 \cos\alpha_3 + s_3 \xi_3 \cos\alpha_2$$

und somit die Gleichung der zugehörigen Höhe des F.-Dreiecks

$$s_2 x_3 \cos\alpha_3 = s_2 x_2 \cos\alpha_2 \quad \text{oder} \quad x_3 \tan\alpha_2 = x_2 \tan\alpha_3;$$

und die für Perpendikel in der Mitte derselben Seite

$$x_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - \sin\alpha_1 (x_2 - x_3) = 0; \quad \text{etc.}$$

Man erhält die Normale der Geraden ξ_i' aus dem Punkt x_i' mittelst

$$s_1 \xi_1 (s_1 \xi_1' - s_2 \xi_2' \cos\alpha_3 - s_3 \xi_3' \cos\alpha_2) + \cdot\cdot = 0$$

und

$$\xi_1 x_1' + \cdot\cdot = 0.$$

Die Normalen von zwei Geraden aus einem F.-Punkt erhält man hiernach leicht und damit auch den Ausdruck für

den von ihnen und somit den von jenen Geraden gebildeten Winkel. (Vergl. § 18, 3.)

Wir wollen aber für Winkel und Distanzen das Mittel der Coordinatentransformation in Anwendung bringen.

Nach den obigen Festsetzungen ist die Coordinatentafel der neuen F.-Punkte und ihr adjungiertes System

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ X_1, & X_2, & X_3 \\ Y_1, & Y_2, & Y_3 \end{vmatrix} = 2F,$$

$$\begin{vmatrix} X_2Y_3 - X_3Y_2, & X_3Y_1 - X_1Y_3, & X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ Y_2 - Y_3, & Y_3 - Y_1, & Y_1 - Y_2 \\ X_3 - X_2, & X_1 - X_3, & X_2 - X_1 \end{vmatrix};$$

dazu sind die Coordinaten ihres Schwerpunktes als E.-Punkt

$$1, \quad \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Damit ergeben sich die Multiplicatoren von $\mu x_h^{(i)}$ auf der rechten Seite der allgemeinen Gleichung der Substitutionscoefficienten

$$\beta_{hi}\, X = \mu x_h^{(i)} \{x_1^{(0)} X_1^{(i)} + \cdots\}$$

gleichmässig als $\frac{1}{3}F$ und man erhält für diese Coefficienten

$$\begin{aligned} 3\beta_{11} &= \mu, & 3\beta_{21} &= \mu x_1, & 3\beta_{31} &= \mu y_1; \\ 3\beta_{12} &= \mu, & 3\beta_{22} &= \mu x_2, & 3\beta_{32} &= \mu y_2; \\ 3\beta_{13} &= \mu, & 3\beta_{23} &= \mu x_3, & 3\beta_{33} &= \mu y_3 \end{aligned}$$

und somit die Substitution

$$x = \frac{X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y = \frac{Y_1x_1 + Y_2x_2 + Y_3x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Dieselbe führt in der That die Cartesisch-Plücker'sche Gleichung der unendlich fernen Geraden

$$0X + 0Y + 1 = 0$$

in die der E.-Linie der Dreipunktcoordinaten $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ über.

Man erhält auch die Substitution für die Liniencoordinaten

$$\xi = \frac{(Y_2 - Y_3)\xi_1 + (Y_3 - Y_1)\xi_2 + (Y_1 - Y_2)\xi_3}{(X_2Y_3 - X_3Y_2)\xi_1 + (X_3Y_1 - X_1Y_3)\xi_2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\xi_3},$$

$$\eta = \frac{(X_3 - X_2)\xi_1 + (X_1 - X_3)\xi_2 + (X_2 - X_1)\xi_3}{(X_2Y_3 - X_3Y_2)\xi_1 + (X_3Y_1 - X_1Y_3)\xi_2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\xi_3},$$

wo die Coefficienten der ξ_i im Nenner die Flächencoordinaten des Anfangspunktes der Cartesischen Coordinaten sind, während die Zähler die linken Seiten in den Gleichungen der alten Axen im Endlichen vorher und die von denen der alten F.-Punkte im Unendlichen jetzt liefern.

Man erhält aus den letzten Gleichungen sofort für den Winkel θ von zwei Geraden ξ_i', ξ_i'' durch Einsetzen in

$$\tan\theta = \frac{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}{\xi'\eta'' + \xi''\eta'},$$

den Ausdruck

$$\frac{\{(Y_2-Y_3)\xi_1'+\cdots\}\{(X_3-X_2)\xi_1''+\cdots\}-\{(Y_2-Y_3)\xi_1''+\cdots\}\{(X_3-X_2)\xi_1'+\cdots\}}{\{(Y_2-Y_3)\xi_1'+\cdots\}\{(Y_2-Y_3)\xi_1''+\cdots\}+\{(X_3-X_2)\xi_1'+\cdots\}\{(X_3-X_2)\xi_1''+\cdots\}}$$

und erkennt in seinem Nenner unmittelbar durch Entwickelung die Function

$$s_1^2\xi_1'\xi_1'' + \cdots - s_1 s_2 \cos\alpha_3(\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2') - \cdots$$

wieder, deren Verschwinden die Bedingung der Rechtwinkligkeit der betrachteten Geraden bildet.

Der Zähler ergiebt sich als das Product der Determinantenausdrücke

$$(\xi_1'\xi_2'' - \xi_1''\xi_2') + \cdots \quad \text{und} \quad (Y_2X_1 - Y_1X_2) + \cdots,$$

von denen der erste durch sein Verschwinden den Parallelismus der Geraden ξ_i', ξ_i'', d. h. die Lage ihres Schnittpunktes in der unendlich fernen E.-Geraden bedingt, indess der zweite den doppelten Inhalt des F.-Dreiecks ausdrückt.

Sodann die Distanz des Punktes x_i' von der Geraden ξ_i. Der Cartesisch-Plücker'sche Ausdruck dafür

$$\frac{\xi x' + \eta y' + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

geht durch die angegebene Substitution über in

$$\frac{[(Y_2-Y_3)\xi_1+\cdots][X_1x_1'+\cdots]+[(X_3-X_2)\xi_1+\cdots][Y_1x_1'+\cdots]+[(X_2Y_3-X_3Y_2)\xi_1+\cdots](x_1'+\cdots}{\sqrt{[(Y_2-Y_3)\xi_1+\cdots]^2+[(X_3-X_2)\xi_1+\cdots]^2}}.$$

Hier verwandelt sich aber der Nenner durch Entwickelung und Ordnung nach den $\xi_i\xi_k$ sofort in die Wurzel aus der homogenen Function zweiten Grades in der Gleichung des Absoluten

$$\sqrt{s_1^2\xi_1^2 + \cdots - 2s_1s_2\xi_1\xi_2\cos\alpha_3 - \cdots};$$

und derselbe drückt daher durch sein Verschwinden aus, dass die Gerade ξ_i durch einen der Kreispunkte geht und somit zu sich selbst conjugiert bezüglich des Absoluten d. h. zu sich selbst orthogonal ist; sie ist in Folge dessen auch zu ihrer Normale aus x_i' parallel und die Distanz des Punktes x_i' von ihr ist unendlich gross. Der Zähler des Ausdruckes erweist sich dagegen als das Product von $\{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + ..\}$ oder $2F$ in $(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')$ und sein Verschwinden zeigt also an, dass der Punkt x_i' der Geraden ξ_i angehört.

Für die Distanz d von zwei Punkten x_i', x_i'' folgt aus den Ausdrücken

$$x = \frac{\beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{23} x_3}{\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3}, \quad y = \frac{\beta_{31} x_1 + \beta_{32} x_2 + \beta_{33} x_3}{\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3}$$

durch Substitution in

$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

zuerst der Werth

$$\left\{\frac{\beta_{21} x_1' + \beta_{22} x_2' + \beta_{23} x_3'}{\beta_{11} x_1' + \beta_{12} x_2' + \beta_{13} x_3'} - \frac{\beta_{21} x_1'' + \cdots}{\beta_{11} x_1'' + \cdots}\right\}^2 + \left\{\frac{\beta_{31} x_1' + \cdots}{\beta_{11} x_1' + \cdots} - \frac{\beta_{31} x_1'' + \cdots}{\beta_{11} x_1'' + \cdots}\right\}^2.$$

Man bemerkt nun, dass die hier auftretenden Nenner einerlei Werth haben, weil $\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3$ bei Unterdrückung des allen β_{ik} gemeinsamen Factors $\frac{\mu}{\mathfrak{X}}$ oder $\frac{\mu}{2F}$, der aus dem Ausdruck verschwindet, nichts anderes ist als

$$2\{x_1 . \triangle E A_2 A_3 + x_2 . \triangle E A_3 A_1 + x_3 . \triangle E A_1 A_2\}$$

d. h.

$$\left\{\frac{p_1}{e_1} e_1 s_1 + \cdots\right\} \quad \text{oder} \quad 2F.$$

Und dies führt zugleich zur Entwickelung der Zähler, da $\beta_{2i} = \beta_{1i} X_i$, $\beta_{3i} = \beta_{1i} Y_i$ ist.

In analoger Weise gehen die metrischen Grundformeln der ersten Dimension im Raum von drei Dimensionen hervor: Winkel von zwei Ebenen, von zwei Geraden oder von Gerade und Ebene, Distanz eines Punktes von einer Ebene, Distanz von zwei Punkten, etc.; ausgehend von der identischen Relation zwischen den vier Coordinaten der Ebene und der Gleichung des Absoluten im Raum.

Zugleich ist für die Umwandlung der bezüglichen Ausdrücke für die verschiedenen Coordinatenbestimmungen gesorgt.

Man sieht, dass die ersten Hauptsätze der Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades für die vollständige Interpretation der metrischen Grundgleichungen unentbehrlich sind.

65. Wenn nun geometrische Formen durch homogene Gleichungen zwischen den Coordinaten ausgedrückt werden, und wenn ihre projectivischen Eigenschaften wie ihre projectivischen Beziehungen zu einander, nicht minder ihre individuellen Eigenschaften, durch Gleichungen zwischen den Coefficienten ihrer Gleichungen oder durch abgeleitete Gleichungen in den Veränderlichen x_i oder ξ_i ausgedrückt werden — wie zu zeigen ja die Aufgabe der analytischen Geometrie ist —, so werden die den projectivischen Beziehungen entsprechenden Relationen invariabel sein müssen gegenüber solchen allgemeinen linearen Substitutionen, welche den Uebergang von dem betrachteten System zu einem ihm collinearen oder reciproken ausdrücken, die individuellen gegenüber solchen linearen Substitutionen, wie sie den Coordinatentransformationen entsprechen. Die Algebra der linearen Substitutionen enthält daher die analytische Geometrie der Curven und Flächen als einen Theil. Die Aufsuchung solcher Functionen der Coefficienten, welche in Folge einer linearen Substitution nur durch Hinzutritt eines constanten Factors geändert werden, d. h. von Invarianten, und die Aufsuchung von solchen Functionen der Coefficienten und Veränderlichen x_i oder ξ_i oder x_i und ξ_i, deren Beziehungen zur Originalfunction sich bei der entsprechenden Umformung nicht ändern (oder die selbst bis auf einen Factor ungeändert bleiben), d. h. von Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen, sind die wesentlichen Stücke dieser Untersuchung.

Die Incidenzbedingung $\xi_1 x_1 + \cdots = 0$ ist ihrer Natur nach invariant und die einfachste der Zwischenformen; denn $\xi_1 x_1 + \cdots$ ist gleich $\xi_1' x_1' + \cdots$, wenn man die x_i und die ξ_i' gleichzeitig durch ihre linearen Substitutionen ersetzt, in deren einer die Zeilen der Coefficienten den Reihen derselben in der andern entsprechen.

Für Flächen zweiter Ordnung resp. Kegelschnitte sind wir schon in §§ 49, 57 bei den ersten Anwendungen auf Theile dieser

allgemeinen Lehre gestossen, die hier etwas näher ausgeführt werden soll. Wir bildeten die Gleichung in ξ_i mittelst des adjungierten Systems zu der Gruppe der Coefficienten. Die Determinante dieser Gruppe oder die Discriminante Δ der Gleichung ist die Invariante der Flächen zweiter Ordnung gegenüber der allgemeinen linearen Substitution, wie geometrisch evident, weil ihr Verschwinden die Bedingung dafür ist, dass die Fläche zweiter Ordnung einen Doppelpunkt hat.

Und analog ist die Discriminante Δ der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen x_i ihre Invariante. Für die homogene Gleichung mit zwei Veränderlichen ist sie $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ und drückt durch ihr Verschwinden das Zusammenfallen ihrer Elemente aus.

In der That werden die Discriminanten in Folge einer linearen Substitution nur durch das Hinzukommen einer Potenz der Determinante ihrer Coefficienten als Factor geändert.

Wir erläutern die Wirksamkeit dieses Gesetzes zuerst an dem einfachsten Fall und für Cartesische Coordinaten, jedoch für Flächen zweiten Grades. Ist die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lx + 2my + 2nz = 0,$$

sodass die Polarebenen der Richtungen der Axen x, y, z resp. durch

$$ax + hy + gz + l = 0,$$
$$hx + by + fz + m = 0, \qquad gx + fy + cz + n = 0$$

ausgedrückt sind; so ergiebt sich als der Schnittpunkt derselben oder als Pol der unendlich fernen Ebene und Mittelpunkt der Fläche nach § 33 so lange ein bestimmter Punkt im endlichen Raum, als nicht die Determinante dieser linearen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix}$$

verschwindet; und er wird nur dann unbestimmt, wenn ausser dieser Determinante auch die drei andern verschwinden, welche als Zähler der Mittelpunktscoordinaten durch Einführung von $-l, -m, -n$ an Stelle der Elemente der ersten, zweiten oder dritten Reihe aus ihr entstehen. Da jene Determinante

die Discriminante des Querschnittes der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist, nämlich mit der Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

so berührt im ersten Fall die Fläche die unendlich ferne Ebene oder sie ist ein Paraboloid; ihr Mittelpunkt fällt dann mit dem zugehörigen Berührungspunkt zusammen.

Wenn wir diess ausschliessen, so können wir durch Parallelverschiebung der Coordinatenebenen den Anfangspunkt mit dem Schnittpunkt der Fläche vereinigen, sodass nun l, m, n verschwinden, während die Coefficienten der sämmtlichen Glieder vom zweiten Grade in den Coordinaten unverändert bleiben, weil sie den unendlich fernen Querschnitt der Fläche in Bezug auf dieselben F.-Punkte ausdrücken wie vorher. Die Gleichung der Fläche ist somit nach dieser Verschiebung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d' + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

mit d' als dem Resultat der Substitution der Coordinaten des Mittelpunktes in die ursprüngliche Gleichung der Fläche. Wir zeigen nun, dass es ein System rechtwinkliger Axen durch den Mittelpunkt giebt, für welches die Gleichung der Fläche die einfachste Form

$$a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 + d' = 0$$

annimmt. Natürlich wird der Uebergang zu denselben durch eine lineare Substitution ausgedrückt, aber wir bedürfen derselben nicht bei folgender Ueberlegung.

Das Quadrat des Radius vectors des Punktes (x, y, z) in den ursprünglichen schiefwinkligen Coordinaten ist ausgedrückt durch

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

wenn λ, μ, ν die von den Axen desselben gebildeten Winkel sind; nach der Transformation wird dasselbe Radius vector-Quadrat durch $X^2 + Y^2 + Z^2$ dargestellt sein, weil die Axen rechtwinklig geworden sind. Oder

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu = \varrho^2$$

geht in $$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varrho^2$$

über für alle Werthe von ϱ und somit auch

$$x^2 + \cdots + 2yz\cos\lambda + \cdots = 0 \quad \text{in} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

welche beide Gleichungen den unendlich fernen imaginären

Kreis aller Kugeln in den ursprünglichen und den neuen Coordinaten ausdrücken.

Daher ist $k(x^2 + \cdots + 2yz\cos\lambda + \cdots)$

$$- (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy) = 0$$

und $k(X^2 + Y^2 + Z^2) - (a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2) = 0$

gleichmässig der Ausdruck des durch den unendlich fernen Querschnitt der Fläche und den imaginären Kugelkreis bestimmten Büschels von Kegelschnitten in der unendlich fernen Ebene und für dieselben Werthe von k, für welche die erste in lineare Factoren zerfällt, thut diess auch die zweite.

Die Discriminante der ersten Gleichung ist aber

$$\begin{vmatrix} k-a, & k\cos\nu - h, & k\cos\mu - g \\ k\cos\nu - h, & k-b, & k\cos\lambda - f \\ k\cos\mu - g, & k\cos\lambda - f, & k-c \end{vmatrix}$$

oder ihr Verschwinden liefert zur Bestimmung von k die cubische Gleichung

$$k^3 \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & \cos\mu \\ \cos\nu, & 1, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix} - k^2 \left\{ \begin{vmatrix} 1, & \cos\nu, & g \\ \cos\nu, & 1, & f \\ \cos\mu, & \cos\lambda, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & \cos\nu, & \cos\mu \\ h, & 1, & \cos\lambda \\ g, & \cos\lambda, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & h, & \cos\mu \\ \cos\nu, & b, & \cos\lambda \\ \cos\mu, & f, & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ k \left\{ \begin{vmatrix} 1, & h, & g \\ \cos\nu, & b, & f \\ \cos\mu, & f, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & \cos\nu, & g \\ h, & 1, & f \\ g, & \cos\lambda, & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & h, & \cos\mu \\ h, & b, & \cos\lambda \\ g, & f, & 1 \end{vmatrix} \right\} - \begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix} = 0;$$

die Verhältnisse der drei letzten Coefficienten derselben zum ersten sind nothwendig Invarianten der Transformation.

Wenn insbesondere auch die alten Axen rechtwinklig sind, so wird der erste Coefficient, das Sinusquadrat der Coordinatenecke (§ 24, 12), gleich Eins; der von $-k^2$ ist gleich $(c+a+b)$, derjenige von $+k$ gleich $(bc - f^2 + ca - g^2 + ab - h^2)$

und sie müssen, wie die das absolute Glied bildende Determinante, den mit den Coefficienten a', b', c', f', g', h' der transformierten Gleichung gleichgebildeten Ausdrücken gleich sein. Sollen nun in der transformierten Gleichung die Coefficienten der Producte der Veränderlichen verschwinden, so sind die neuen a', b', c' nach jenen Werthen nothwendig die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$w^3 - (a+b+c)\,w^2 + (bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)\,w - (abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2) = 0.$$

Diese Wurzeln bestimmen die Doppelpunkte der drei in Linienpaare zerfallenden Kegelschnitte jenes Büschels oder das gemeinsame Tripel derselben und damit die Richtungen von drei zu einander conjugierten Durchmessern, von denen jeder rechtwinklig ist auf der Ebene der beiden andern; man erhält daher dieselbe Gleichung aus der Bedingung der Rechtwinkligkeit für einen Durchmesser und seine conjugierte Diametralebene. Dass dieselbe stets drei reelle Wurzeln hat, wissen wir geometrisch (vergl. II, § 42), und man beweist es natürlich auch leicht algebraisch. Nach den Vorzeichen dieser Wurzeln werden die Flächen zweiten Grades classificiert (vergl. II, § 40, 6), was hier keiner Wiederholung bedarf.

Wir wollen aber eine Anwendung beifügen, bei welcher die Schiefwinkligkeit der ursprünglichen Coordinaten festgehalten werden muss. In § 29, 6 fanden wir die Gleichung des einfachen Hyperboloids aus drei windschiefen Geraden in Bezug auf die zu ihnen parallelen Durchmesser als Coordinatenaxen in der Form

$$\frac{yz}{b_1c_1} + \frac{zx}{c_1a_1} + \frac{xy}{a_1b_1} + 1 = 0.$$

Mit unserer vorigen ursprünglichen Gleichung verglichen ist also

$$a=b=c=0, \quad f=\frac{1}{2b_1c_1}, \quad g=\frac{1}{2c_1a_1}, \quad h=\frac{1}{2a_1b_1}; \quad d'=1.$$

Damit werden die Coefficienten der cubischen Gleichung in k für $-k^2$, k^1 und $-k^0$ resp.

$$\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{b_1c_1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{4a_1^2b_1^2c_1^2}\{2(b_1c_1\cos\lambda+\cdots)-(a_1^2+\cdots)\}, \qquad \frac{1}{4a_1^2b_1^2c_1^2},$$

während der Coefficient von k^3 das Quadrat vom Sinus der Coordinatenecke ist, $\sin^2(xyz)$ oder $\sin^2(g_1, g_2, g_3)$.

Die Transformation zu den Axen der Fläche verwandelt ihre Gleichung in

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

sodass $a' = -\frac{1}{a^2}$, $b' = -\frac{1}{b^2}$, $c' = -\frac{1}{c^2}$, $f' = g' = h' = 0$ sind.

Man erhält also aus der Invariantennatur der Coefficienten der Gleichung in k die Relationen zwischen den a_1, b_1, c_1 und den a, b, c wie folgt:

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$
$$= \{a_1(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + b_1(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + \cdot\},$$
$$(a^2 + b^2 + c^2) = \{2(b_1c_1\cos\lambda + \cdot\cdot) - (a_1^2 + \cdot\cdot)\} = 0,$$
$$4a_1^2b_1^2c_1^2\sin^2(xyz) = a^2b^2c^2,$$

welche mehrfache Anwendungen gestatten. Schreiben wir die letzte derselben in der Form

$$2a_1b_1c_1\sin(xyz) = abc,$$

so sagt sie uns, dass das Volumen aller der Parallelepipede dasselbe ist, welche aus drei Paaren paralleler Erzeugenden gebildet werden können. Diess fanden wir in II, § 35, 9 bereits auf dem Wege der Construction. Die Volumenzahl ist $4abc$.

Wenn man von der auf drei beliebige conjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung zu der auf die Axen bezogenen übergeht, also von

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad \text{zu} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so sind die f, g, h in beiden Formen Null, indess die Coefficienten der Quadrate der Veränderlichen $b'^2c'^2$, $c'^2a'^2$, $a'^2b'^2$ und b^2c^2,.. sind und man erhält nach der vorigen Entwickelung die Relationen

$$a'^2b'^2c'^2\sin^2(a'b'c') = a^2b^2c^2,$$

wonach das Volumen des von drei conjugierten Durchmessern gebildeten Parallelepipeds constant ist;

$$b'^2c'^2\sin^2\lambda + \cdot\cdot = b^2c^2 + \cdot\cdot,$$

welche aussagt, dass die Summe der Quadrate der Flächen solcher Parallelepipede constant ist; und

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

wonach die Quadratsumme von drei conjugierten Durchmessern selbst constant ist.

Der Uebergang von irgend welchen rechtwinkligen Axen durch den Mittelpunkt zu den rechtwinkligen Axen der Fläche liefert ebenfalls einfache Relationen, worunter wir hervorheben, dass die Summe der Reciproken von drei rechtwinkligen Halbdurchmessern constant ist; für $a_0, b_0, \ldots h_0$ als die Coefficienten der ersten Gleichung mit dem constanten Glied $+1$ der Relation

$$a_0 + b_0 + c_0 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

entsprechend. Die übrigen lauten

$$b_0 c_0 - f_0^2 + \cdots = \frac{1}{b^2 c^2} + \cdots,$$

$$a_0 b_0 c_0 + 2 f_0 g_0 h_0 - a_0 f_0^2 - b_0 g_0^2 - c_0 h_0^2 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

66. Betrachtet man nun allgemein zwei Formen zweiten Grades im nämlichen Gebilde zweiter Stufe, beispielsweise Curven zweiter Ordnung $S = 0$, $S' = 0$ von den Coefficienten a_{ik} und a_{ik}', so bestimmen dieselben ein Gebilde erster Stufe oder Büschel von solchen Curven $S' + \lambda S = 0$ mit dem Parameter λ und den Coefficienten $a_{ik}' + \lambda a_{ik}$, welches drei Linienpaare enthält, Parameterwerthen entsprechend, die die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a_{11}', & \lambda a_{12} + a_{12}', & \lambda a_{13} + a_{13}' \\ \lambda a_{12} + a_{12}', & \lambda a_{22} + a_{22}', & \lambda a_{23} + a_{23}' \\ \lambda a_{13} + a_{13}', & \lambda a_{23} + a_{23}', & \lambda a_{33} + a_{33}' \end{vmatrix} = 0$$

erfüllen, oder in entwickelter Form

$$\Delta \lambda^3 + \Theta \lambda^2 + \Theta' \lambda + \Delta' = 0,$$

eine Gleichung, in welcher ausser den Discriminanten auch Θ, Θ' Invarianten sein müssen, weil die Parameter der Kegelschnitte, insbesondere auch der degenerierenden als Doppelverhältnisse in Elementargebilden erster Stufe nach § 39 bei einer linearen Substitution unverändert bleiben. Man hat

$$\Theta \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}' \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}' \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}', & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}', & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}', & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}', & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}', & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}', & a_{33} \end{vmatrix}$$

und $\Theta' \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}', a_{13}' \\ a_{12}, a_{22}', a_{23}' \\ a_{13}, a_{23}', a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}', a_{12}, a_{13}' \\ a_{12}', a_{22}, a_{23}' \\ a_{13}', a_{23}, a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}', a_{12}', a_{13} \\ a_{12}', a_{22}', a_{23} \\ a_{13}', a_{23}', a_{33} \end{vmatrix}$

und kann zeigen, dass die gegenüber einer linearen Substitution invarianten Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten sich mittelst der Discriminanten Δ, Δ' und der Simultan-Invarianten Θ, Θ' ausdrücken lassen.

Wenn der Kegelschnitt $S' = 0$ in zwei Gerade degeneriert ist, so ist $\Delta' = 0$; $\Theta' = 0$ giebt die Bedingung, unter welcher der Durchschnittspunkt der Geraden dem Kegelschnitt $S = 0$ angehört; und $\Theta = 0$ die Bedingung, unter welcher sie in Bezug auf $S = 0$ ein Paar von harmonischen Polaren sind. Diese letzte wird also für $S = 0$ als das Absolute zur Bedingung der Orthogonalität aus § 64. Man darf sagen, dass die Metrik eines Gebildes einfach seine invarianten Beziehungen zum Absoluten ausdrücke. (Vergl. unten B. 12.)

Die Gleichung eines Kegelschnittes im Büschel in den ξ_t wird aus der entsprechenden Gleichung $\Sigma' = 0$ des Kegelschnittes S durch Ersetzung der a_{ik} durch die $(a_{ik}' + \lambda a_{ik})$ gebildet und ist daher

$$\begin{vmatrix} a_{11}' + \lambda a_{11}, & a_{12}' + \lambda a_{12}, & a_{13}' + \lambda a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}' + \lambda a_{12}, & a_{22}' + \lambda a_{22}, & a_{23}' + \lambda a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}' + \lambda a_{13}, & a_{23}' + \lambda a_{23}, & a_{33}' + \lambda a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder in entwickelter Form die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade ξ_t berührt

$$\Sigma' + \lambda \Phi + \lambda^2 \Sigma = 0$$

mit

$$\Phi \equiv \begin{vmatrix} a_{11}', a_{12}, a_{13}, \xi_1 \\ a_{12}', a_{22}, a_{23}, \xi_2 \\ a_{13}', a_{23}, a_{33}, \xi_3 \\ 0, \xi_2, \xi_3, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}', a_{13}, \xi_1 \\ a_{12}, a_{22}', a_{23}, \xi_2 \\ a_{13}, a_{23}', a_{33}, \xi_3 \\ \xi_1, 0, \xi_3, 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}', \xi_1 \\ a_{12}, a_{22}, a_{23}', \xi_2 \\ a_{13}, a_{23}, a_{33}', \xi_3 \\ \xi_1, \xi_2, 0, 0 \end{vmatrix}.$$

Man sieht, dass das Büschel zwei Kegelschnitte enthält, welche eine gegebene Gerade berühren, natürlich in den Doppelpunkten der auf ihr durch die Kegelschnitte

gebildeten und durch S und S' bestimmten Involution (I, § 25, 2; oben § 34) und erkennt, dass dieselben nur dann zusammenfallen, wenn man hat $\Phi^2 = 4\Sigma\Sigma'$;

diess ist also die Bedingung, unter welcher die Gerade ξ_i durch einen der vier (denn sie ist biquadratisch in den ξ_i) gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte hindurchgeht. Diese Gleichung bezeichnet zugleich ihrer Form nach eine Enveloppe, welche die Tangenten berührt, die die Kegelschnitte $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ mit dem Kegelschnitt $\Phi = 0$ gemein haben; d. h. die acht Tangenten von zwei Kegelschnitten in ihren Durchschnittspunkten sind sämmtlich Tangenten eines Kegelschnittes $\Phi = 0$. Sind die Kegelschnitte Kreise, so sind ihre Mittelpunkte die Brennpunkte von Φ.

Wenn man von der Gleichung $\Sigma' + \lambda\Sigma = 0$ zur Gleichung in den x_i übergeht, d. h. wenn man

$$\begin{vmatrix} A_{11}' + \lambda A_{11}, & A_{12}' + \lambda A_{12}, & A_{13}' + \lambda A_{13}, & x_1 \\ A_{12}' + \lambda A_{12}, & A_{22}' + \lambda A_{22}, & A_{23}' + \lambda A_{23}, & x_2 \\ A_{13}' + \lambda A_{13}, & A_{23}' + \lambda A_{23}, & A_{33}' + \lambda A_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bildet, so findet man durch Zerlegung

$$\Delta' S' + \lambda F + \lambda^2 \Delta S = 0$$

und durch das dem vorigen dualistisch entsprechende Raisonnement

$$F^2 = 4\Delta\Delta' SS'$$

als Gleichung der vier gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte, nebst dem Satz, dass die acht Berührungspunkte derselben mit den gegebenen Kegelschnitten auf einem und demselben Kegelschnitt $F = 0$ liegen.

Die Kegelschnitte $\Phi = 0$ und $F = 0$ sind, der erste die fundamentale Contravariante, der zweite die fundamentale Covariante der beiden Kegelschnitte, und durch sie lassen sich die projectivischen Beziehungen des Systems ausdrücken. Die geometrisch construierende Methode führt auch auf sie, wenn man von der concentrischen Lage der Kegelschnitte ausgeht und das gemeinsame Paar ihrer conjugierten Durchmesser als reell betrachtet. Die Richtungen M_1 und M_2 derselben und

das gemeinsame Centrum M_3 sind dann ein gemeinsames Tripel harmonischer Pole für beide Kegelschnitte; in Folge dessen bilden ihre gemeinsamen Punkte $EFGH$ ein Parallelogramm vom Mittelpunkt M_3 und den Seitenrichtungen M_1, M_2, die gemeinsamen Tangenten $abcd$ ein Parallelogramm vom Mittelpunkt M_3 und mit M_1M_3, M_2M_3 als Diagonalen im Sinn der Elementargeometrie. Die Tangenten beider Kegelschnitte in den gemeinsamen Punkten bilden ferner zwei Parallelogramme $e_1f_1g_1h_1$, $e_2f_2g_2h_2$, für welche M_1M_3, M_2M_3 ebenfalls Diagonalen sind, und sie berühren daher in acht auf zwei gleichgelegenen Parallelogrammen vertheilten Punkten einen Kegelschnitt Φ, für den M_1M_3, M_2M_3 gleichfalls conjugierte Durchmesser sind. Die Berührungspunkte A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 der gemeinsamen Tangenten liegen, weil wieder in zwei solche Parallelogramme vertheilt, auf einem andern Kegelschnitt F von der gleichen Eigenschaft. In einer beliebigen Collinearfigur dieses Systems haben die entsprechenden der beiden ursprünglichen Kegelschnitte ein gemeinsames Tripel, die gemeinsamen Punkte liegen in Paaren auf Geraden aus den Ecken desselben, die gemeinsamen Tangenten schneiden sich in Paaren in Punkten auf den Seiten desselben, von denen jene durch die anstossenden Tripelseiten, diese durch die benachbarten Tripelecken harmonisch getrennt sind; die acht Tangenten in den gemeinsamen Punkten und die acht Berührungspunkte in den gemeinsamen Tangenten gehören resp. zwei Kegelschnitten Φ und F an, welche mit den ersten dasselbe gemeinsame Tripel harmonischer Pole haben.

Man sieht, wie bequem auch hier wieder die constructive Methode zu Resultaten führt, aber auch, wie es nicht überflüssig sein wird, dieselben eingehender zu begründen, wie diess hinsichtlich der Kegelschnitte Φ und F im Vorigen analytisch geschah und noch weiterhin betreffs des gemeinsamen Tripels M_i und der Geraden EF, GH; EG, FH; EH, FG oder s_i sowie der Punkte ab, cd; bc, ad; ca, bd oder T_i geschehen soll.

1) Für die durch die Punktepaare

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \qquad a_{11}'x_1^2 + \cdots = 0$$

bestimmte Involution $(\lambda a_{11}' + a_{11})x_1^2 + \cdots = 0$ findet Zusammenfallen eines Paares in ein Element statt, wenn man hat

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11}' + a_{11}, & \lambda a_{12}' + a_{12} \\ \lambda a_{12}' + a_{12}, & \lambda a_{22}' + a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\Delta + \lambda \Theta + \lambda^2 \Delta' = 0$$

mit

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad \Delta' = a_{11}' a_{22}' - a_{12}'^2;$$
$$\Theta = a_{11} a_{22}' + a_{11}' a_{22} - 2 a_{12} a_{12}'.$$

Es giebt also zwei Doppelelemente. Im Falle $\Theta = 0$ bilden die beiden Paare eine harmonische Gruppe (§ 41, 1).

2) Die Bedingung der Existenz eines Doppelpunktes in einer Curve (§ 60) ist stets eine Invariante ihrer Gleichung, wie aus ihrer geometrischen Bedeutung hervorgeht. (Discriminante.)

3) Zwei homogene Gleichungen zweiten Grades können im Allgemeinen immer durch eine Transformation der Coordinaten auf die Summen der Quadrate der Veränderlichen reduciert werden; d. h. man kann zwei Elementenpaare eines Gebildes erster Stufe auf ihre gemeinsame harmonische Gruppe, zwei Kegelschnitte auf das gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polaren, zwei Flächen zweiten Grades auf das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen beziehen. Die Entwickelung für drei Veränderliche, welche wir geben, ist allgemein. Es seien

$$S' \equiv a_{11} x_1^2 + \cdots + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots = 0,$$
$$S \equiv a_{11}' x_1^2 + \cdots + 2 a_{12}' x_1 x_2 + \cdots = 0$$

die Kegelschnitte, so sollen die linearen Substitutionen

$$x_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 + \beta_{13} y_3, \quad \eta_1 = \beta_{11} \xi_1 + \beta_{21} \xi_2 + \beta_{31} \xi_3,$$
$$x_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 + \beta_{23} y_3, \quad \eta_2 = \beta_{12} \xi_1 + \beta_{22} \xi_2 + \beta_{32} \xi_3,$$
$$x_3 = \beta_{31} y_1 + \beta_{32} y_2 + \beta_{33} y_3, \quad \eta_3 = \beta_{13} \xi_1 + \beta_{23} \xi_2 + \beta_{33} \xi_3$$

bestimmt werden, durch welche sie gleichzeitig in die Formen

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

übergeführt werden.

Wir betrachten das Büschel $S - \lambda S' = 0$ mit der Discriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda a_{11}', & a_{12} - \lambda a_{12}', & a_{13} - \lambda a_{13}' \\ a_{12} - \lambda a_{12}', & a_{22} - \lambda a_{22}', & a_{23} - \lambda a_{23}' \\ a_{13} - \lambda a_{13}', & a_{23} - \lambda a_{23}', & a_{33} - \lambda a_{33}' \end{vmatrix} \equiv \Delta - \lambda \Theta + \lambda^2 \Theta' - \lambda^3 \Delta',$$

setzen wir gleich $f(\lambda)$, und mit der Gleichung in den ξ_i

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda a_{11}', & a_{12}-\lambda a_{12}', & a_{13}-\lambda a_{13}', & \xi_1 \\ a_{12}-\lambda a_{12}', & a_{22}-\lambda a_{22}', & a_{23}-\lambda a_{23}', & \xi_2 \\ a_{13}-\lambda a_{13}', & a_{23}-\lambda a_{23}', & a_{33}-\lambda a_{33}', & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

setzen wir $\varphi(\lambda) = 0$. Jene und diese gehen durch die Substitution, deren Determinante durch $\mathbf{B}$ bezeichnet sei, über in

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{B}^2 f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

und

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & 0, & 0, & \eta_1 \\ 0, & \lambda_2-\lambda, & 0, & \eta_2 \\ 0, & 0, & \lambda_3-\lambda, & \eta_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{B}^2\varphi(\lambda)$$

$$= -(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\left\{\frac{\eta_1^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\eta_2^2}{\lambda_2-\lambda}+\frac{\eta_3^2}{\lambda_3-\lambda}\right\}.$$

Das erste sagt, dass λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung in λ sind, welche durch Vergleichung der Discriminante mit Null entsteht; zugleich ersieht man daraus die Relation $\mathbf{B}^2\Delta' = 1$, die die Substitutionsdeterminante bestimmt.

Setzt man dann nacheinander für λ in die zweite Gleichung λ_1, λ_2, λ_3, so erhält man

$$\mathbf{B}^2\varphi(\lambda_1) = -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\eta_1^2,$$
$$\mathbf{B}^2\varphi(\lambda_2) = -(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\eta_2^2,$$
$$\mathbf{B}^2\varphi(\lambda_3) = -(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\eta_3^2$$

zur Bestimmung der η_i und durch Einführung der Substitutionen für η_i und Ersetzung von $\mathbf{B}^2$

$$\varphi(\lambda_1) = -\Delta'(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\{\beta_{11}\xi_1+\beta_{21}\xi_2+\beta_{31}\xi_3\}^2,$$
$$\varphi(\lambda_2) = -\Delta'(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\{\beta_{12}\xi_1+\beta_{22}\xi_2+\beta_{32}\xi_3\}^2,$$
$$\varphi(\lambda_3) = -\Delta'(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\{\beta_{13}\xi_1+\beta_{23}\xi_2+\beta_{33}\xi_3\}^2;$$

aus denen durch Vergleichung der Coefficienten entsprechender Potenzen der ξ_i die β_{ik} sich bestimmen.

Mit Rücksicht auf

$$\mathbf{B}^2 f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$

und sein Differential nach λ mit Substitution der λ_i vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$-\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} = (\beta_{11}\xi_1+\beta_{21}\xi_2+\beta_{31}\xi_3)^2, \quad \text{etc.}$$

4) Man specialisiere die vorige Entwickelung für zwei concentrische Kegelschnitte

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 1,$$

wo sie das gemeinsame Paar der Durchmesserinvolutionen derselben und die unendlich ferne Gerade als das gemeinsame Tripel liefern muss. Mit $a' = c' = 1$, $b' = 0$ ist der zweite Kegelschnitt ein Kreis und das gemeinsame Paar wird gebildet von den Axen des Kegelschnittes. Man erhält

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$$
$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$$

und in $f(\lambda) = 0$ eine quadratische Gleichung mit stets reellen Wurzeln

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

offenbar den reciproken Werthen der Quadrate der Halbaxen des Kegelschnittes. Darum sind $(a+c), -(ac - b^2)$ Invarianten der Beziehung auf rechtwinklige Systeme um den Mittelpunkt.

Man hat dann ferner

$$f'(\lambda) = 2\lambda - (a+c);$$

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a-\lambda, & b, & \xi \\ b, & c-\lambda, & \eta \\ \xi, & \eta, & 0 \end{vmatrix} = (c-\lambda)\xi^2 + (a-\lambda)\eta^2 - 2b\xi\eta,$$

also

$$\beta_{1i}\xi' + \beta_{2i}\eta' = \sqrt{\frac{(c-\lambda_i)\xi^2 + (a-\lambda_i)\eta^2 - 2b\xi\eta}{2\lambda_i - a - b}},$$

wo der Nenner durch $\lambda_1 - \lambda_2$ oder $\lambda_2 - \lambda_1$ ersetzt werden kann.

Die analoge Entwickelung für die Fläche zweiten Grades mit Centrum, also die Bestimmung des ihr mit einer concentrischen Kugel gemeinsamen Tripels conjugierter Durchmesser führt zu der Determinante des Beisp. 4 in § 57 zurück. (Vergl. II, § 42.)

5) Für die auf das gemeinsame Tripel harmonischer Pole bezogenen Gleichungen werden neben den Invarianten

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad \Delta' = 1,$$
$$\Theta = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \quad \Theta' = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

die Contravariante

$$\Phi \equiv (\lambda_2 + \lambda_3)\xi_1^2 + (\lambda_3 + \lambda_1)\xi_2^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\xi_3^2 = 0$$

und die Covariante

$$F \equiv \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)x_1^2 + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1)x_2^2 + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)x_3^2 = 0.$$

Man zeige, dass $F = 0$ der Ort der Punkte mit harmonisch sich trennenden Tangentenpaaren an beide Kegelschnitte ist; und $\Phi = 0$ die Enveloppe der Geraden, welche von beiden Kegelschnitten in harmonischen Gruppen geschnitten werden.

6) Die Invariante Θ hat den Werth Null, wenn der Kegelschnitt $S' = 0$ ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $S = 0$ enthält; Θ', wenn S ein Tripel in Bezug auf S enthält. Denn die Determinantensumme Θ (S. 438) wird für ein Tripel harmonischer Pole von $S' = 0$ als fundamental, d. h. für $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$

$$a_{11} a_{22} a_{33}' + a_{22} a_{33} a_{11}' + a_{33} a_{11} a_{22}'$$

und verschwindet somit für die gleichzeitig geltende Festsetzung $a_{11}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$, welche das F.-Dreieck als $S' = 0$ eingeschrieben bedingt. Ist dagegen das F.-Dreieck ein Tripel in Bezug auf $S' = 0$ oder also $a_{12}' = a_{23}' = a_{31}' = 0$, so wird Θ zu

$$a_{11}'(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + a_{22}'(a_{33} a_{11} - a_{31}^2) + a_{33}'(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$$

und verschwindet mit den eingeklammerten Binomen, was besagt, dass die F.-Linien den Kegelschnitt $S = 0$ berühren.

Hierin und in den entsprechenden Bedeutungen des Verschwinden von Θ' liegen die Sätze: Zwei Tripel harmonischer Pole und Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt sind sechs Punkte eines Kegelschnittes und sechs Tangenten eines solchen (vergl. II, § 37,20). Sie werden mittelst der auf das gemeinsame Tripel bezogenen Werthe am einfachsten bewiesen.

7) Aber für $\Theta = 0$ liegt auch das Perspectivcentrum eines dem Kegelschnitt $S' = 0$ eingeschriebenen Dreiecks mit seinem Polardreiseit in Bezug auf $S = 0$ im Kegelschnitt $S' = 0$; und die Perspectivaxe eines dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschriebenen Dreiseits mit seinem Polardreiseit in Bezug auf $S' = 0$ berührt $S = 0$.

Denn für jenes Dreieck als fundamental sind die Polaren seiner Ecken in Bezug auf $S = 0$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0, \quad a_{12} x_1 + a_{22} x_1 + a_{23} x_3 = 0,$$
$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 = 0$$

und die Verbindungsgeraden seiner Ecken mit den entsprechenden Ecken des ersten werden durch Elimination der x_1, x_2, x_3 resp. zwischen diesen Gleichungen in Paaren gebildet

$$(a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}) x_1 = (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) x_2 = (a_{23} a_{13} - a_{33} a_{12}) x_3,$$

oder die Coordinaten des Perspectivcentrums beider Dreiecke sind

$$\frac{1}{a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}, \quad \frac{1}{a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}}, \quad \frac{1}{a_{23} a_{13} - a_{33} a_{12}}.$$

Ihre Substitution in $S' = 0$, in welchem nach der Voraussetzung $a_{11}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$ sind, giebt

$$2a_{23}'(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}) + 2a_{13}'(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + 2a_{12}'(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12}) = 0,$$

oder den unter dieser Voraussetzung geltenden Werth von Θ als verschwindend. Ebenso für den zweiten Theil des Satzes.

Nennt man Polviereck(seit) eines Kegelschnittes jedes vollständige Viereck(seit), von welchem zwei Paare von Gegenseiten (ecken) und also auch das dritte durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt sind, so bildet die Perspectivaxe eines Dreiseits mit seinem Polardreieck in Bezug auf einen Kegelschnitt mit jenem ein Polvierseit und das entsprechende Perspectivcentrum des Dreiecks mit ihm ein Polviereck in Bezug auf den Kegelschnitt.

Man zeichne die Figur für ein Dreieck ABC (abc) und sein polares $a_1b_1c_1$ $(A_1B_1C_1)$ und bemerke, dass für das Perspectivcentrum S und die Perspectivaxe s im Polviereck $ABCS$ die Polare a_1 einer Ecke A z. B. mit dem Viereck nach I, § 20, 2. 5 drei Paare von Schnittpunkten mit den Gegenseiten AB, CS; BC, AS; CA, BS bestimmt, die auch conjugierte Paare sind.

Offenbar bestimmt ein Tripel mit jedem Punkt ein Polviereck und mit jeder Geraden ein Polvierseit.

Geht der Kegelschnitt $S' = 0$ durch ein Polviereck von $S = 0$ oder berührt der Kegelschnitt $S = 0$ ein Polvierseit von $S' = 0$, so sind die Coefficienten beider durch die Relation $\Theta = 0$ verbunden oder durch

$$a_{11}'(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + \cdots + 2a_{23}'(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + \cdots = 0.$$

Nach § 49 sind die binomischen Factoren von $a_{11}', \ldots, 2a_{23}', \ldots$ die gleichnamigen Elemente $A_{11}, \ldots, A_{23}, \ldots$ des adjungierten Systems der Determinante der a_{ik} oder die Coefficienten der Gleichung des Kegelschnittes $S = 0$ in Liniencoordinaten; und die besprochene geometrische Verbindung beider Kegelschnitte hat zu ihrem algebraischen Ausdruck das Verschwinden der Function

$$a_{11}'A_{11} + \cdots + 2a_{23}'A_{23} + \cdots,$$

welche man erhält, wenn man in die Gleichung des einen Kegelschnittes in Punktcoordinaten an die Stelle der x_i^2 und x_jx_k die Coefficienten A_{ii}, A_{jk} der ξ_i^2 und $\xi_j\xi_k$ aus der Gleichung des andern Kegelschnittes in Linienccordinaten einsetzt.

Weil $\Theta = 0$ im Fall von nur zwei Veränderlichen oder im Elementargebilde erster Stufe die harmonische Lage der Elementenpaare aus zwei quadratischen Gleichungen bedingt, so sagt man von Kegelschnitten, und analog von Kegeln zweiten Grades in demselben Elementargebilde zweiter Stufe, dass sie zu einander harmonisch liegen, wenn ihre Gleichungen der Bedingung $\Theta = 0$ genügen.

8) Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt zu einer gegebenen Curve zweiter Ordnung harmonisch liege, wird algebraisch durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coefficienten seiner Gleichung in Linienkoordinaten ausgedrückt; d. h. die sämmtlichen Kegelschnitte, welche zu einer gegebenen Curve zweiter Ordnung harmonisch liegen, bilden ein lineares Gebilde vierter Stufe in Linienkoordinaten. Und offenbar, die Kegelschnitte, welche zu zwei, drei und vier festen Curven harmonisch liegen, bilden resp. ein lineares Gebilde dritter, zweiter, erster Stufe in Linienkoordinaten. Und fünf feste Curven zweiter Ordnung bestimmen einen Kegelschnitt, der zu ihnen gleichzeitig harmonisch liegt. Für $a_{ik}^{(1)}$ bis $a_{ik}^{(5)}$ als die Coefficienten in den Gleichungen der gegebenen Curven zweiter Ordnung erhält man seine Gleichung durch Elimination der A_{ik} zwischen $A_{11}\xi_1^2 + \cdots + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + \cdots = 0$ und den fünf Bedingungsgleichungen $A_{11}a_{11}^{(i)} + \cdots + 2A_{23}a_{23}^{(i)} + \cdots = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Die so verbundenen linearen Gebilde aus Kegelschnitten von den Stufen 0 und 4, 1 und 3, 2 und 2, 3 und 1, 4 und 0 nennt man contravariante lineare Gebilde aus Kegelschnitten. Die Bestimmungen durch Tangenten und durch die harmonische Lage zu gegebenen Curven zweiter Ordnung lassen sich mit einander combinieren; ebenso die dual entsprechenden durch Punkte und durch die harmonische Lage zu gegebenen Curven zweiter Classe.

9) Wenn ein Kegelschnitt dem F.-Dreieck eingeschrieben und ein zweiter ihm umgeschrieben ist, so können nach § 28 ihre Gleichungen in den Formen geschrieben werden

$$x_1^2 + \cdots - 2x_2x_3 - \cdots = 0, \quad 2a_1x_2x_3 + \cdots = 0$$

und ihre Discriminanten und Simultaninvarianten sind resp.

$$\Delta = -4, \qquad \Delta' = 2a_1a_2a_3,$$
$$\Theta = 4(a_1 + a_2 + a_3), \quad \Theta' = -(a_1 + a_2 + a_3)^2.$$

Man sieht, dass unter dieser Voraussetzung das Quadrat von Θ dem vierfachen Product von Δ und Θ' gleich ist; und da die Relation

$$\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$$

nach dem Texte durch lineare Substitution also auch insbesondere durch Coordinatentransformation nicht gestört wird, so drückt sie die Lagenbeziehung zweier Kegelschnitte aus, in welcher der eine durch die Ecken eines Dreiecks geht, welches dem andern umgeschrieben ist. Und es ergiebt sich zugleich, dass dann die Ecken von unzählig vielen dem ersten umgeschriebenen Dreiecken im zweiten liegen. Offenbar bilden die Tripel dieser Ecken eine cubische Involution im zweiten und die Tripel dieser Seiten eine cubische Involution um den ersten Kegelschnitt (§ 42) und beide Involutionen liegen zu einander perspectivisch.

Man vergleiche die Ergebnisse dieser Anschauung für die vier Gruppen mit Doppelpunkten in der cubischen Involution mit den Entwickelungen a. a. O.

10) Wir wissen, dass zwei Kegelschnitte in derselben Ebene sowohl ein Büschel als eine Schaar bestimmen und dass diese linearen Gebilde erster Stufe projectivisch so einander zugeordnet werden können, dass die Grundkegelschnitte einander und die Punktepaare der Schaar den Linienpaaren des Büschels entsprechen. (II, § 25, 5 f.)

Für die Gleichungen der Kegelschnitte in Punktcoordinaten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

ist der Kegelschnitt λ des Büschels

$$(a_1 + \lambda) x_1^2 + \cdot\cdot = 0;$$

die Gleichungen in Coordinaten ξ_i

$$\xi_1^2 + \cdot\cdot = 0, \quad a_2 a_3 \xi_1^2 + a_3 a_1 \xi_2^2 + a_1 a_2 \xi_3^2 = 0$$

geben

$$(a_2 a_3 + \lambda') \xi_1^2 + \cdot\cdot = 0$$

als Kegelschnitt λ' der Schaar, während die ξ_i-Gleichung des Kegelschnittes im Büschel

$$(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda) \xi_1^2 + (a_3 + \lambda)(a_1 + \lambda) \xi_2^2 + (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda) \xi_3^2 = 0$$

ist und die x_i-Gleichung des Kegelschnittes λ' der Schaar ebenso

$$(a_3 a_1 + \lambda')(a_1 a_2 + \lambda') x_1^2 + \cdot\cdot = 0.$$

Und da dem Kegelschnitt im Büschel $\lambda = 0$ der Kegelschnitt der Schaar $\lambda' = \infty$ und dem $\lambda = \infty$ dort $\lambda' = 0$ hier entsprechen soll, so ist die Parametergleichung der Projectivität von der Form

$$\lambda \lambda' = \text{const.}$$

und die Constante bestimmt sich aus der Bemerkung, dass dem Kegelschnitt $\lambda = -a_1$ im Büschel oder mit Doppelpunkt im F.-Punkt A_1 der Kegelschnitt $\lambda' = -a_2 a_3$ in der Schaar mit Doppeltangente in der F.-Linie a_1 entsprechen muss, gleich $a_1 a_2 a_3$. Nun hat man aus der Gleichung des Büschels

$$\lambda = -\frac{a_1 x_1^2 + \cdot\cdot}{x_1^2 + \cdot\cdot}, \quad \text{also} \quad \lambda' = -\frac{a_1 a_2 a_3 (x_1^2 + \cdot\cdot)}{a_1 x_1^2 + \cdot\cdot}$$

und erhält also die Gleichung des Erzeugnisses als Ort oder in Coordinaten x_i in der Form

$$a_2 a_3 a_1^2 \{(a_1 - a_2) x_1^2 + (a_3 - a_2) x_3^2\} \{(a_1 - a_3) x_1^2 + (a_2 - a_3) x_2^2\} x_1^2 + \cdot\cdot = 0$$

und als Enveloppe in den Coordinaten ξ_i

$$a_2 a_3 \{a_3(a_2 - a_1)\xi_1^2 + a_1(a_2 - a_3)\xi_3^2\} \times$$
$$\times \{a_1(a_3 - a_2)\xi_2^2 + a_2(a_3 - 1)\xi_1^2\}\xi_1^2 + \cdots = 0.$$

Mittelst des Ueberganges nach den Relationen $x_i^2 = y_i$ resp. $\xi_i^2 = \eta_i$ kommen sie auf singuläre Curven dritter Ordnung resp. Classe zurück; jener entspricht der im Folgenden enthaltenen einfachen Construction

$$\frac{y_2}{y_1} = (A_2 A_1 E_3 Y_3) = \frac{x_2^2}{x_1^2} = (A_2 A_1 E_3 X_3)^2$$

d. h. $$(A_1 A_2 Y_3 X_3) = (A_2 A_1 E_3 X_3).$$

Wie drückt sich das Erzeugniss aus in Function der Invarianten des Büschels resp. der Schaar?

11) Für die rechtwinkligen Streifencoordinaten des § 16 (vgl. § 17,3) werden Kreise mit den F.-Punkten als gemeinsamem Tripel harmonischer Pole ausgedrückt in der Form

$$x_1^2 + a x_2^2 + (1 - a) x_3^2 = 0; \text{ etc.}$$

Der Kreis über der Strecke der Grenz- und F.-Punkte $A_2 A_3$ als Durchmesser ist z. B.

$$x_1^2 = x_2 x_3.$$

Das Büschel der Kreise mit reellen Grenz- oder Grundpunkten ist in Cartesischen rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = \mp a^2$$

und man kann die specielle Untersuchung der vorigen Fragen für ihren besonderen Fall (vergl. II, § 25,7) an diese Formen anschliessen.

12) Wenn der zweite der betrachteten Kegelschnitte als das Paar der imaginären unendlich fernen Kreispunkte gewählt wird, so ist das Verschwinden von Θ die Bedingung dafür, dass der erste eine Parabel und das von Θ' die, dass er eine gleichzeitige Hyperbel ist.

In demselben Fall giebt die Covariante $F = 0$ den Ort des Schnittpunktes der Paare rechtwinkliger Tangenten für den betrachteten Kegelschnitt, im Fall der Parabel ihre Directrix. Die Gleichung der Kegelschnittschaar in demselben Fall führt durch Bildung ihrer Discriminante auf die Bestimmung der Brennpunkte des Kegelschnittes; es ist die Schaar der confocalen Kegelschnitte zu dem gegebenen (I, § 36; weiterhin construierend zu betrachten).

13) Die Gleichung des Kegelschnittes $\Phi = 0$ in Punktcoordinaten x_i erhält man in der Form

$$(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2) x_1^2 + \cdots = 0$$

d. i. auch

$$(\lambda_2\lambda_3 + \cdot\cdot)(x_1^2 + \cdot\cdot) + (\lambda_1 + \cdot\cdot)(\lambda_1 x_1^2 + \cdot\cdot) = F$$

oder $$\Theta S' + \Theta' S - F = 0.$$

Die Polarkegelschnitte von $S = 0$ in Bezug auf $S' = 0$ und umgekehrt von $S' = 0$ in Bezug auf $S = 0$ erhält man in der Form

$$\Theta S' - F = 0 \quad \text{resp.} \quad \Theta' S - F = 0,$$

sodass der Kegelschnitt $F = 0$ durch die Schnittpunkte jedes der Kegelschnitte mit dem Polarkegelschnitt des andern in Bezug auf ihn hindurchgeht. Auch liegen die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte mit denen der Polaren in einem Kegelschnitt

$$\Theta S' = \Theta' S.$$

Für $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ fallen beide Polarkegelschnitte in $F = 0$, und die Bestimmung der Verhältnisse der λ_i aus diesen Bedingungen zeigt, dass jeder der drei Kegelschnitte S, S', F die Covariante F der beiden andern ist.

67. Wir haben im vorigen Paragraphen, Beisp. 3) gesehen, dass die Gleichungen von zwei Flächen zweiten Grades durch Coordinatentransformation im Allgemeinen auf die Form

$$a_1 x_1^2 + \cdots = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

gebracht werden können; das neue F.-System ist das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen der Flächen. Wenn im Allgemeinen ihre Gleichungen sind

$$S = 0, \quad S' = 0$$

und die einer beliebigen Fläche ihres Büschels also

$$\lambda S + S' = 0,$$

so erhält man durch das Verschwinden der Discriminante der letzteren eine biquadratische Gleichung in λ zur Bestimmung der Parameter der Kegel im Büschel (§ 57), die wir nun schreiben

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0$$

und deren Coefficienten die Invarianten des Büschels sind; nämlich Δ, Δ' die der bestimmenden Flächen und Θ, Φ, Θ' die Simultaninvarianten. Für die obigen reducierten Formen haben sie die Werthe

$$\Delta \equiv a_1 a_2 a_3 a_4, \quad \Delta' = 1,$$

$$\Theta \equiv a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 a_1 + a_4 a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3, \quad \Theta' = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$\Phi \equiv a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 + a_1 a_3 + a_2 a_4.$$

Ihr Verschwinden bedingt projectivische Beziehungen der Flä-

chen S, S' zu einander; Θ wird Null, wenn die Fläche S' durch ein Quadrupel harmonischer Pole von S geht; und Θ', wenn S' durch ein Quadrupel harmonischer Polarebenen von S berührt wird (§ 66, 6). *) Die Invariante Φ verschwindet, wenn die Kanten eines Quadrupels in Bezug auf die eine Fläche sämmtlich die andere berühren.

Denkt man als die eine der Flächen den unendlich fernen imaginären Kreis aller Kugeln oder das Absolute in Cartesischen Coordinaten $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, so wird $\Theta = 0$ die Bedingung, unter welcher durch den Anfangspunkt der Coordinaten drei zu einander rechtwinklige Tangentialebenen an die Fläche gehen, und $\Phi = 0$ die Bedingung, unter welcher durch denselben drei zu einander rechtwinklige Tangenten an die Fläche gehen.

Für die Schnittpunkte der Grundcurve des Büschels mit den Ebenen des gemeinsamen Quadrupels oder nach II, § 25f. die Scheitel derselben erhält man aus der Combination der reducierten Gleichungen mit $x_i = 0$ resp. die vierpunktigen Gruppen

$$x_1 = 0, \quad x_2^2 : x_3^2 : x_4^2 = (a_3 - a_4) : (a_4 - a_2) : (a_2 - a_3),$$
$$x_2 = 0, \quad x_3^2 : x_4^2 : x_1^2 = (a_4 - a_1) : (a_1 - a_3) : (a_3 - a_4),$$
$$x_3 = 0, \quad x_4^2 : x_1^2 : x_2^2 = (a_1 - a_2) : (a_2 - a_4) : (a_4 - a_1),$$
$$x_4 = 0, \quad x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 = (a_2 - a_3) : (a_3 - a_1) : (a_1 - a_2).$$

In jeder Fläche des Quadrupels bilden die Scheitel eine Gruppe von Punkten mit numerisch gleichen Coordinaten (§ 21).

Man beweist, dass eine Ebene, welche drei der Scheitel enthält, immer noch durch einen vierten geht. (II, § 25, 19.)

*) Weil das polare zu einem Tetraeder in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades zu demselben im Allgemeinen nicht perspectivisch liegt, so giebt es kein directes Analogon zu 7) in § 66 für Polfünfeck und Polfünfflach. Man hat aber auch hier

$$\Theta = a_{11}' A_{11} + \cdots + 2a_{12}' A_{12} + \cdots + 2a_{13}' A_{13} + \cdots$$

und die a. a. O. daran geknüpften Folgerungen bestehen fort. Dehnt man also die Bezeichnung „harmonisch gelegen" auf Flächen zweiten Grades aus, zwischen deren entsprechenden Coefficienten ihrer Gleichungen in x_i und respective ξ_i die Relation $\Theta = 0$ besteht, so bestimmen neun feste Flächen zweiter Ordnung eine Fläche zweiter Classe; acht von jenen oder ein lineares Gebilde siebenter Stufe eine Schaar von diesen, etc. Man erhält contravariante lineare Gebilde aus Flächen zweiten Grades.

Durch die Bedingung, dass die Verbindungsgerade zweier Scheitel, die nicht derselben Ebene angehören, ganz in einer Fläche eines Büschels liegen soll, ist diese völlig bestimmt und es liegen dann von den 96 derartigen Verbindungsgeraden der 16 Punkte noch 15 andere ganz in ihr; die Fläche ist eine der 6 nach § 55 durch die Grundcurve sich selbst zugeordneten Flächen des Büschels. Man erhält daraus leicht die Parameter derselben; denn die Substitution der Summe der Coordinaten von zwei Scheiteln aus verschiedenen Gruppen bestimmt sie durch das nothwendige Verschwinden der mit der Quadratwurzel behafteten Glieder; z. B. für die Punkte

$$(0,\ \sqrt{a_3-a_4},\ \sqrt{a_4-a_2},\ \sqrt{a_2-a_3}),$$
$$(\sqrt{a_3-a_4},\ 0,\ \sqrt{a_4-a_1},\ \sqrt{a_1-a_3})$$

der Glieder aus der dritten und vierten Coordinate

$$\sqrt{a_4-a_2}+\sqrt{a_4-a_1},\quad \sqrt{a_2-a_3}+\sqrt{a_1-a_3}$$

nämlich

$$(a_3+k)\sqrt{a_4-a_2.a_4-1}+(a_4+k)\sqrt{a_2-a_3.a_1-a_3}$$

mit

$$k^{(1)}=-\frac{a_3\sqrt{a_4-a_2.a_4-a_1}+a_4\sqrt{a_2-a_3.a_1-a_3}}{\sqrt{a_4-a_2.a_4-a_1}+\sqrt{a_2-a_3.a_1-a_3}}=$$

$$-\frac{a_3(a_4-a_2)(a_4-a_1)-a_4(a_2-a_3)(a_1-a_3)-(a_3-a_4)\sqrt{a_1-a_3.a_3-a_2.a_2-a_4.a_4-a_1}}{(a_4-a_2)(a_4-a_1)-(a_2-a_3)(a_1-a_3)}$$

$$=-\frac{a_1a_2-a_3a_4-\sqrt{a_1-a_3.a_3-a_2.a_2-a_4.a_4-a_1}}{a_1+a_2-a_3-a_4}.$$

Man sieht sofort, dass nur das Zeichen der Wurzel im Zähler sich ändert, wenn man das Vorzeichen der dritten Coordinate des zweiten der betrachteten Scheitel wechselt, und man erkennt leicht die Aenderungen, für welche k seinen Werth behält. Die Parameter der sechs Flächen sind also durch

$$k^{(2)}=-\frac{a_2a_3-a_4a_1\pm\sqrt{1342}}{a_2+a_3-a_4-a_1}$$

und

$$k^{(3)}=-\frac{a_3a_1-a_2a_4\pm\sqrt{1234}}{a_3+a_1-a_2-a_4}$$

zu vervollständigen nach einer offenbaren Bezeichnung, bei welcher die Quadratwurzel in den Zählern der $k^{(1)}$ durch

$\sqrt{1324}$ zu bezeichnen wäre. Natürlich bildet das Product der Gleichungen dieser Flächen eine Covariante des Flächenbüschels.

Man sieht, dass zahlreiche und wichtige Fragen durch die Verbindung mit dem Früheren sich hier anknüpfen. Wir wollen für ihre Behandlung nur die Relationen für die Strahlencoordinaten p_{ik} der Erzeugenden der auf ein Polquadrupel bezogenen Fläche zweiten Grades angeben. Wenn die Gerade p_{ik} der Fläche

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots = 0$$

ganz angehört, so liegen ihre Durchstosspunkte in den F.-Ebenen in den gleichnamigen Spuren der Fläche, d. h. man hat die vier Relationen

$$\begin{aligned}
a_2 p_{34}^2 + a_3 p_{24}^2 + a_4 p_{23}^2 &= 0,\\
a_1 p_{34}^2 \qquad\quad + a_3 p_{14}^2 + a_4 p_{31}^2 &= 0,\\
a_1 p_{21}^2 \qquad\quad + a_2 p_{14}^2 \qquad\quad + a_4 p_{12}^2 &= 0,\\
a_1 p_{23}^2 \qquad\quad + a_2 p_{31}^2 + a_3 p_{12}^2 &= 0;
\end{aligned}$$

man kann aus den drei ersten von ihnen entnehmen

$$p_{14}^2 = p_{23}^2 \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3}, \quad p_{24}^2 = p_{31}^2 \frac{a_2 a_4}{a_3 a_1}, \quad p_{34}^2 = p_{12}^2 \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2}$$

unter Fortbestand der vierten und erhält damit für die Erzeugenden der Fläche

$$(a_1 + k) x_1^2 + \cdots = 0$$

die Gleichungen

$$p_{14}^2 = p_{23}^2 \frac{a_1 + k \,.\, a_4 + k}{a_2 + k \,.\, a_3 + k}, \quad p_{24}^2 = p_{31}^2 \frac{a_2 + k \,.\, a_4 + k}{a_3 + k \,.\, a_1 + k},$$

$$p_{34}^2 = p_{12}^2 \frac{a_3 + k \,.\, a_4 + k}{a_1 + k \,.\, a_2 + k}$$

zusammen mit

$$(a_1 + k) p_{23}^2 + (a_2 + k) p_{31}^2 + (a_3 + k) p_{12}^2 = 0.$$

Für die Projectivität des Flächenbüschels und der Flächenschaar aus denselben Flächen zweiten Grades (vergl. § 66, 10 und II, §§ 25, 4 f. und 47, 33)

$$a_1 x_1^2 + \cdots = 0, \quad x_1^2 + \cdots = 0$$

oder

$$a_2 a_3 a_4 \xi_1 + \cdots = 0, \quad \xi_1^2 + \cdots = 0,$$

also von

$$(a_1 + \lambda) x_1^2 + \cdots = 0 \quad \text{zu} \quad (a_2 a_3 a_4 + \lambda') \xi_1^2 + \cdots = 0,$$

oder zu

$$(a_3 a_4 a_1 + \lambda')(a_4 a_1 a_2 + \lambda')(a_1 a_2 a_3 + \lambda') x_1^2 + \cdots = 0,$$

bei welcher jede Fläche der andern und die Grenzflächen im Büschel (mit singulärem Punkt) den Grenzflächen in der Schaar oder mit singulärer Ebene entsprechen, erhält man die Bedingung

$$\lambda \lambda' = a_1 a_2 a_3 a_4,$$

und dadurch aus

$$\lambda = -\frac{a_1 x_1^2 + \cdots}{x_1^2 + \cdots}, \quad \lambda' = -\frac{a_1 a_2 a_3 a_4 (x_1^2 + \cdots)}{a_1 x_1^2 + \cdots};$$

damit aber durch Einsetzen in die x_i-Gleichung der Schaar das Erzeugniss als Ort der Durchdringungscurven entsprechender Flächen beider linearen Gebilde. Es ist eine Fläche von der Ordnung acht, die durch $x_i^2 = y_i$ in eine specielle Fläche vierter Ordnung übergeht; etc.

Wenn man in der Liniencoordinatengleichung der Fläche zweiten Grades (§ 57) — wir wollen annehmen in der auf ein Polquadrupel bezogenen Form — die Coefficienten a_i durch $a_i + \lambda$ ersetzt, so erhält man die p_{ik}-Gleichung der Fläche λ im Büschel

$$(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)\pi_{34}^2 + \cdots + (a_3 + \lambda)(a_4 + \lambda)\pi_{12}^2 = 0$$

oder

$$a_1 a_2 \pi_{34}^2 + \cdots + \lambda\{(a_1 + a_2)\pi_{34}^2 + \cdots\} + \lambda^2\{\pi_{34}^2 + \cdots\} = 0;$$

in ihr ist der erste Theil der linken Seite die π_{ik}-Gleichung der ersten Fläche, der Factor von λ^2 im dritten Theil die der zweiten Fläche, und man sieht sofort, dass der Factor von λ durch sein Verschwinden einen Complex zweiten Grades darstellt, dessen Gerade die gegebenen Flächen in zwei Punktepaaren schneiden, die mit einander eine harmonische Gruppe bilden.

Da die entwickelte Gleichung in λ quadratisch ist, so bestimmt sie die Parameter von zwei Flächen des Büschels, welche eine gegebene Gerade p_{ik} berühren.

Wenn diese Gerade die Grundcurve des Büschels trifft, so fallen diese beiden berührenden Flächen zusammen oder

die quadratische Gleichung in λ hat zwei gleiche Wurzeln; die algebraische Bedingung dafür ist offenbar

$$4(\pi_{34}^2+\cdots\cdots)(a_1a_2\pi_{34}^2+\cdots\cdots)=\{(a_1+a_2)\pi_{34}^2+\cdots\cdots\}^2.$$

Jede Gerade, deren Coordinaten dieselbe erfüllen, ist eine Sekante der Grundcurve des Büschels und die Gleichung ist also der Ausdruck für den Complex aller der Strahlen, die je einen Punkt der Curve enthalten. Ersetzt man in ihr die π_{ik} durch die p_{im} (§ 25), und diese durch ihre Werthe $(x_iy_m-x_my_i)$, so hat man für y_i als einen festen Punkt die Gleichung für den projicierenden Kegel derselben aus diesem Punkte; etc.

Denken wir insbesondere eine Tangente der Curve, so hat jeder Punkt derselben die Eigenschaft, dass seine Polarebenen in Bezug auf die Flächen des Büschels durch ihren Berührungspunkt gehen oder dass ihre Schnittlinie eine Sekante der Curve ist. Aus der vorher betrachteten Gleichung des Complexes der Sekanten sondert sich also die Gleichung des Ortes aller Tangenten oder der developpabeln Fläche der Grundcurve aus, wenn wir die ξ_i, η_k durch die entsprechenden partiellen Differentiale S_i, S_k' der Gleichungen der bestimmenden Flächen ersetzen; in unserem Fall der reducierten Gleichungen also ξ_i durch a_ix_i und η_k durch x_k, sodass wir erhalten

$$4\{(a_3-a_4)^2x_3^2x_4^2+\cdots\cdots\}\{a_1a_2(a_3-a_4)^2x_3^2x_4^2+\cdots\cdots\}$$
$$-\{a_1a_2(a_1+a_2)(a_3-a_4)^2x_3^2x_4^2+\cdots\cdots\}^2=0,$$

einen Ort von der Ordnung acht, sodass eine beliebige Gerade acht Tangenten der Curve trifft, wie wir wissen.

Durch Einsetzung von $x_i=0$ erhält man die Quadrate der Gleichungen der Doppelcurven in den Ebenen des Quadrupels. Wenn man die Flächen zweiten Grades T und T' von den Gleichungen

$$a_1(a_2+a_3+a_4)x_1^2+\cdots=0,$$
$$a_1(a_2a_3+a_3a_4+a_4a_2)x_1^2+\cdots=0$$

einführt, welche, als Orte der Punkte mit Tangentenkegeln an $S=0$ und $S'=0$ in leicht ersichtlicher projectivischer Beziehung zu einander, Covarianten des Flächenbüschels sind, so kann die obige Gleichung mittelst der Invarianten und

Covarianten des Büschels, d. h. für jedes Coordinatensystem gültig, ausgedrückt werden wie folgt:
$4(\Theta SS'-T'S-\Delta S'^2)(\Theta' SS'-TS'-\Delta' S^2)=(\Phi SS'-TS-T'S')^2$.
Dieser Ort schneidet die Fläche $S=0$ in einer Linie von der Ordnung acht von der Gleichung

$$4\Delta S'T = T'^2;$$

dieselbe wird von den acht Erzeugenden gebildet, welche eine Fläche des Büschels mit der Tangentenfläche der Grundcurve gemein hat oder von den acht Tangenten derselben in ihren Regelschaaren (vergl. § 54).

Auf die dualistisch entsprechende Entwickelung von der gemeinsamen Developpabeln zweier Flächen zweiten Grades wollen wir nicht eingehen, obschon der wichtige Specialfall der confocalen Flächen zweiten Grades dazu gehört. Wir kommen auf diesen geometrisch construierend zurück.

1) Die Gleichung für den Ort der Pole der Tangentialebenen der Fläche $S = 0$ in Bezug auf $S' = 0$ wird ausgedrückt durch

$$\Theta S' - T' = 0; \quad \text{ebenso ist} \quad \Theta' S - T = 0$$

die Gleichung der Polarfläche von $S' = 0$ in Bezug auf $S = 0$. Jene geht durch die gemeinsame Curve von $S' = 0$ und $T' = 0$, diese durch die von $S = 0$, $T = 0$.

2) Der allgemeine Werth der Simultaninvariante Φ, die Summe der sechs Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}', & a_{12}', & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}', & a_{22}', & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}', & a_{23}', & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}', & a_{24}', & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix},$$

die man aus der Determinante der a_{ik} oder der Discriminante erhält, indem man in zweien ihrer Reihen die Elemente a_{ik} durch die entsprechenden Elemente a_{ik}' ersetzt, kann in der Form einer Summe der Producte aus binären Determinanten der ungestrichenen und der gestrichenen Elemente geschrieben werden wie folgt:

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{33}'a_{44}'-a_{34}'^2)+(a_{11}'a_{22}'-a_{12}'^2)(a_{33}a_{44}-a_{34}^2)+\cdots\\ +2(a_{12}a_{34}-a_{23}a_{14})(a_{12}'a_{34}'-a_{23}'a_{14}')+\cdots\\ +2(a_{24}a_{12}-a_{14}a_{22})(a_{14}'a_{33}'-a_{34}'a_{13}')+\cdots\cdots\\ +2(a_{23}a_{44}-a_{24}a_{34})(a_{13}'a_{12}'-a_{11}'a_{23}')+\cdots\cdots;\end{aligned}$$

21 Glieder, wo die gleichgebildeten durch Punkte angedeutet sind.

Die vorkommenden binären Determinanten sind die Coefficienten der Quadrate und Producte der Strahlencoordinaten p_{ik} in den Bedingungen (§ 57), unter welchen die Gerade (ξ, η) die eine resp. die andere Fläche zweiten Grades berührt. Bezeichnen wir dieselben durch g_{ik} für die eine Fläche und durch g_{ik}' für die andere, indem wir die Coordinaten $p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$ der Reihe nach als die erste, zweite, .. bis sechste der Strahlencoordinaten bezeichnen und die Coefficienten ihrer respectiven Quadrate wie $p_{12}^2, p_{14}^2, \ldots$ durch $g_{11}, g_{44}, \ldots$ in der einen, sowie durch $g_{11}', g_{44}', \ldots$ in der andern, die ihrer Doppelproducte wie $2p_{12}p_{23}, 2p_{31}p_{34}, \ldots$ durch $g_{12}, g_{36}, \ldots$ und resp. $g_{12}', g_{36}', \ldots$ angenommen denken, so ist die Invariante Φ allgemein die Summe

$$g_{11}g_{44}' + g_{11}'g_{44} + g_{22}g_{55}' + \cdots + g_{33}g_{66}' + \cdots + 2g_{14}g_{14}' + 2g_{25}g_{25}' + 2g_{36}g_{36}' + \cdots.$$

68. Für vier Flächen zweiten Grades $S=0$, $S'=0$, $S''=0$, $S'''=0$ und für alle Flächen des durch sie bestimmten linearen Gebildes dritter Stufe $\varkappa S + \varkappa' S' + \varkappa'' S'' + \varkappa''' S''' = 0$ ist der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf sie sich in einem Punkt schneiden, eine Fläche vierter Ordnung, die man die Jacobi'sche Fläche des Systems nennt; analog ist in der Ebene für das lineare Gebilde zweiter Stufe aus Kegelschnitten eine Curve dritter Ordnung der Ort der Punkte, deren Polaren ein Büschel bilden. (Vergl. § 61.)

Denn die Polaren des Punktes y_i in Bezug auf $S=0$, etc. sind ausgedrückt durch

$y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3 + y_4S_4 = 0$, etc. und analog mit S', S'', S''', wenn S_i das nach x_i gebildete partielle Differential des Polynoms S bezeichnet, und sie bilden ein Bündel, wenn die Determinante der S_i verschwindet oder für

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3, & S_4 \\ S_1', & S_2', & S_3', & S_4' \\ S_1'', & S_2'', & S_3'', & S_4'' \\ S_1''', & S_2''', & S_3''', & S_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ihre Punkte entsprechen einander paarweis, die Verbindungsgeraden derselben liefern eine Congruenz; sie enthält auch die Scheitel aller Kegel, welche in dem linearen Gebilde dritter Stufe vorkommen, sowie die Schnittgeraden der etwa darin vorkommenden Ebenenpaare.

Wenn eine der Flächen $S=0$ eine doppeltzählende Ebene, also S das Quadrat einer linearen Function ist, so ist diese ein gemeinsamer Factor der S_i und die Jacobi'sche Fläche zerfällt in diese Ebene und eine Fläche dritter Ordnung.

Die Jacobi'sche Fläche oder Curve eines Systems von Flächen resp. Curven ist eine Covariante der gegebenen; ihr Begriff enthält den der Hesse'schen Covariante des § 61 als speciellen Fall; diese ist die Jacobi'sche des Systems der ersten Polaren einer gegebenen Curve oder Fläche.

Die Algebra zeigt aber von der Jacobi'schen Determinante eines Systems von Functionen, dass sie für jede gemeinsame Werthegruppe derselben verschwindet, und dass insbesondere bei gleichem Grade der Functionen jede solche Werthegruppe auch die Derivierten der Jacobi'schen Determinante zu Null macht. Haben daher die Flächen $S=0$ vier Punkte in einer Ebene gemein, so ist diese Ebene auch ein Theil ihrer Jacobischen Fläche; und wenn sie einen ebenen Querschnitt gemein haben, so ist die Ebene desselben doppelt in der Jacobi'schen Fläche enthalten — wie im Fall von vier Kugeln, wo die Jacobi'sche Fläche aus der gemeinsamen Orthogonalkugel derselben und der doppeltzählenden unendlich fernen Ebene besteht.

Wenn eine der Flächen der linearen Gebilde zweiter Stufe aus dreien der gegebenen Flächen die vierte berührt, so ist der Berührungspunkt ein Punkt der Jacobi'schen Fläche und also ein Punkt ihrer Schnittcurve mit jener vierten Fläche zweiten Grades. Ebenso gehören zu ihr die Berührungspunkte von Flächen des Büschels aus zweien der Flächen $S=0$ mit der Durchdringungscurve der beiden andern; woraus sofort erhellt, dass in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung sechszehn Flächen vorkommen, die eine gegebene Curve vierter Ordnung erster Art berühren.

Wir erwähnen endlich, dass die Jacobi'sche Fläche in vier Ebenen zerfällt, wenn die Flächen $S=0, \ldots$ ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole besitzen, nämlich in die Ebenen dieses Quadrupels. Das gemeinsame Quadrupel für $S=0$, $S'=0$ bildet daher die Jacobi'sche Fläche derselben mit den zugehörigen Flächen $T=0$, $T'=0$ des vorigen Paragraphen.

Ein sehr specieller Fall von Interesse ist der der Jacobischen Curve des Systems

$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - x_3^2 = 0, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$

Sie ist der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die beiden ersten sich in der dritten schneiden, also ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} x_1, & -x_2, & 0 \\ x_1, & 0, & -x_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} = 0;$$

zugleich der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels durch ein Quadrupel mit numerisch gleichen Coordinaten (§ 33,3)

$$(x_1^2 - x_2^2) + \lambda (x_1^2 - x_3^2) = 0$$

mit der Geraden a_i zusammenfallen.

Jener dem F.-Dreieck umgeschriebene Kegelschnitt enthält also die sechs vierten harmonischen Punkte zu den Punkten von a_i in den Seiten des Quadrupels und die Doppelpunkte der Involution, die das Kegelschnittbüschel in a_i bestimmt.

Wenn die Gerade unendlich fern ist und die Gegenseiten des Quadrupels rechtwinklig zu einander sind, so sind die Doppelpunkte der Involution in der Geraden die Kreispunkte der Ebene, die harmonischen Punkte werden die Seitenmitten und man erhält das System des Feuerbach'schen Kreises.

Man sieht leicht, dass für die Flächen zweiten Grades

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - x_3^2 = 0, \quad x_1^2 - x_4^2 = 0$$

und das aus ihnen zusammengesetzte lineare Gebilde zweiter Stufe d. h. die Flächen durch ein Octupel mit numerisch gleichen Coordinaten in Verbindung mit der Ebene $a_1 x_1 + \cdots = 0$ die analogen Betrachtungen gelten und dass sie zu der Fläche dritter Ordnung (§ 29,7)

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4} = 0$$

führen.

Drei Flächen zweiten Grades $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ haben eine Jacobi'sche Curve, nämlich den Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf sie und alle Flächen ihres linearen Gebildes zweiter Stufe je ein Büschel bilden; ihre Punkte sind also den Geraden einer Regelfläche der Scheitelkanten dieser Büschel eindeutig zugeordnet und erzeugen durch Verbindung mit denselben eine developpable Fläche.

Für einen solchen Punkt müssen die aus den partiellen Differentialen

$$\begin{matrix} S_1, & S_2, & S_3, & S_4 \\ S_1', & S_2', & S_3', & S_4' \\ S_1'', & S_2'', & S_3'', & S_4'' \end{matrix}$$

durch Unterdrückung je einer Verticalreihe zu bildenden vier Determinanten sämmtlich verschwinden, d. h. diese Punkte müssen den dadurch ausgedrückten Flächen dritter Ordnung gemeinsam sein. Denkt man aber die Flächen dritter Ordnung aus den durch Unterdrückung der vierten und resp. dritten Reihe entstandenen Determinanten, so haben dieselben diejenige Curve dritter Ordnung gemein, die nach § 43 gemeinsam ist den drei Flächen zweiten Grades aus den Differentialen in den Reihen 1 und 2 oder aus

$$\begin{matrix} S_1, & S_1', & S_1'' \\ S_2, & S_2', & S_2'' \end{matrix};$$

die allen drei Flächen dritter Ordnung unserer Frage gemeinsame Curve ist also von der Ordnung sechs. Man kann nach ihren möglichen Reductionen fragen.

Auch für die linearen Gebilde zweiter und dritter Stufe können aus ihrer Discriminante wie in § 66 für die der ersten Stufe Invarianten dieser Gebilde abgeleitet werden; auf die Discussion derselben ist hier nicht einzutreten, ihr Verschwinden bedingt natürlich projectivische Relationen der das Gebilde bestimmenden Flächen, z. B. für das Gebilde zweiter Stufe, dass sie Polarflächen für eine und dieselbe Fläche dritter Ordnung sind, oder dass die gemeinsamen Grundpunkte zweimal zu vier in einer Ebene liegen, oder dass zwei derselben einander unendlich nahe sind, etc.

Wir bemerken also, dass die Invariantenbetrachtung der Gebilde zweiten Grades durch ihre Polaren etc. zu solchen höherer Grade führt; aber nicht nur die Polaren der Gebilde zweiten Grades, sondern die Polaren aller Grade für Gebilde beliebiger Grade sind Covarianten derselben, weil ihre durch den Pol vermittelten Beziehungen zu denselben projectivisch sind. Weil es eine projectivische d. h. durch projectivische Umformung unzerstörbare Beziehung ist, dass eine Curve einen Doppelpunkt hat, so ist die Bedingung seiner Existenz das

Verschwinden einer Invariante (Discriminante) und sind die beiden Kerncurven und Kernflächen des § 61 wichtige Covarianten der gegebenen Curven und Flächen, die Enveloppe respective die Strahlencongruenz der Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punktepaare sind wichtige Contravarianten u. s. w. Die Betrachtung der Doppelpunkte in den übrigen Polaren führt zu ausgedehnten weiteren Ergebnissen.

Ebenso ist die Bedingung der Berührung zwischen zwei Curven oder Flächen eine Invariante derselben; z. B. für zwei Curven oder Flächen zweiten Grades diejenige Relation der Invarianten Δ, Δ', Θ eventuell Θ', Φ ihres Büschels, welche bedingt, dass die cubische resp. biquadratische Gleichung in λ aus dem Verschwinden der Discriminante des Büschels zwei gleiche Werthe hat.

Wenn wir so die Lehre von den Polaren auch hier im Mittelpunkt der Curven- und Flächen-Theorie finden, so ist es gerechtfertigt, noch kurz von einer Erweiterung derselben zu reden, welche an Stelle der Elemente Punkt, Gerade etc. als Pole Curven etc. zu setzen erlaubt.

Wir haben gesehen, dass die Relation zweier Kegelschnitte

$$a_{11}x_1^2 + \cdot\cdot + 2a_{23}x_2x_3 + \cdot\cdot = 0,$$
$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \cdot\cdot + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \cdot\cdot = 0$$

oder

$$(a_{11}, \ldots\ldots \between x_1, x_2, x_3)^2 = 0, \quad (\alpha_{11}, \ldots\ldots \between \xi_1, \xi_2, \xi_3)^2 = 0$$

und noch kürzer

$$a_x^2 = 0, \quad \alpha_\xi^2 = 0$$

besondere Beachtung verdient, die wir schrieben

$$\alpha_{11}a_{11} + \cdot\cdot + 2\alpha_{23}a_{23} + \cdot\cdot$$

oder nach ihrer Entstehung

$$\left(\alpha_{11}, \ldots\ldots \between \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}\right)^2 \cdot (a_{11}, \ldots\ldots \between x_1, x_2, x_2)^2,$$

d. h. die linke Seite der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten wird durch Ersetzung der Veränderlichen ξ_i durch das Differentiationssymbol $\frac{d}{dx_i}$ in ein Operationssymbol verwandelt und die durch dasselbe angezeigten Operationen werden an dem Polynom des Kegelschnittes in Punktcoordinaten

vollzogen; das Resultat derselben ist jene Invariante der harmonischen Relation der Kegelschnitte, die nun als linear in den Coefficienten der Gleichungen beider, der Punktgleichung und der Tangentengleichung kurz beschrieben werden kann, a_a^2 symbolisch geschrieben.

Für Punkt und Gerade ist sie a_α und ihr Verschwinden die fundamentale Bedingung der Incidenz. Man hat sie unter Erweiterung auf beliebige Grade m, n als Harmonizante der beiden Gleichungen bezeichnet und die durch ihr Verschwinden bedingte Beziehung der ausgedrückten Curven, etc. als die harmonische Lage derselben wie bei den Kegelschnitten. Sind aber

$$(a, \ldots \text{X} x_1, x_2, x_3)^n = 0, \quad (\alpha, \ldots \text{X} \xi_1, \xi_2, \xi_3)^m = 0$$

zwei Gleichungen von verschiedenen Graden und vollzieht man die durch Einführung von Differentiationssymbolen von Veränderlichen der einen Reihe an Stelle der Veränderlichen der andern Reihe vorgeschriebenen Operationen an der Function dieser letzteren, bildet also

$$\left(a, \ldots \text{X} \frac{d}{d\xi_1}, \frac{d}{d\xi_2}, \frac{d}{d\xi_3}\right)^n \cdot (\alpha, \ldots \text{X} \xi_1, \xi_2, \xi_3)^m$$

oder

$$\left(\alpha, \ldots \text{X} \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}\right)^m \cdot (a, \ldots \text{X} x_1, x_2, x_3)^n,$$

so erhält man für $m = n$ jene Invariante, die Harmonizante, wieder; dagegen aus der letzten Operation für $m < n$ eine Covariante und aus der ersten für $m > n$ eine Contravariante der beiden Curven, etc. Für einen $m$fach gezählten Punkt als Classencurve, also für $(x_1\xi_1 + \cdots)^m = 0$ als ihre Gleichung folgt aus der letzten

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + \cdots\right)^m \cdot (a, \ldots \text{X} x_1, x_2, x_3)^n$$

die linke Seite der Polare des $m$fach zählenden Punktes in Bezug auf die Curve n^{ter} Ordnung; und für $m = 1$ finden wir die erste Polare des Punktes wieder. Allgemein ist die durch Nullsetzen jener Covariante ausgedrückte Curve von der Ordnung $(n - m)$ etc. die Polare der Curve m^{ter} Classe bezüglich einer Curve n^{ter} Ordnung, symbolisch $\mathbf{P}_{n-m} = 0$.

Ist dieselbe identisch Null, so wird die erste Curve auch

als apolar zur zweiten bezeichnet. Diese Relation ist also äquivalent mit

$$\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3)+1$$

linearen Bedingungen und die zu einer Curve n^{ter} Ordnung apolaren Curven m^{ter} Classe bilden somit ein lineares System von

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3)-1 \text{ fach}$$

unendlicher Mächtigkeit. Wir wissen, dass das Unbestimmtwerden der Polare von der Ordnung $n-m$ für einen Punkt der Curve n^{ter} Ordnung seine Vielfachheit nach dem Grade $(n-m+1)$ bedingt.

Und für das Verschwinden der Harmonizante von zwei Curven n^{ter} Ordnung und n^{ter} Classe ist ersichtlich, dass eine Curve n^{ter} Classe, die zu p Curven n^{ter} Ordnung harmonisch ist, diess auch sein muss für alle Curven des $p$fach unendlichen linearen Systems, welches diese bestimmen; oder dass ein $p$fach unendliches lineares System von Curven n^{ter} Ordnung ein $\frac{1}{2}n(n+3)-p-1$fach unendliches lineares System von Curven n^{ter} Classe (und umgekehrt) bestimmt, sodass jede Curve des einen Systems harmonisch ist zu jeder Curve des andern. Es ist der allgemeine Fall zu dem der Kegelschnitte in § 66.

Für die Entwickelung und Anwendung dieser Erklärungen, die uns zu weit führen würde, ist auf die Literatur zu verweisen.

Nur die folgenden naheliegenden, für unsere Betrachtungen über die Formen höherer Grade einen gewissen Abschluss liefernden Sätze wollen wir anführen: Damit die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung als eine lineare Function der Gleichungen von p Curven derselben Ordnung ausdrückbar sei, ist nöthig und hinreichend, dass alle bezüglich dieser Curven harmonischen Curven diess auch für sie seien. Und damit die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung sich als Summe der n^{ten} Potenzen der Gleichungen von p Geraden ausdrücken lasse, müssen alle diese Geraden berührenden Curven n^{ter} Classe zu jener Curve harmonisch sein.

69. Nach dieser eingehenderen Erörterung eines Princips, welches wir bei den folgenden Untersuchungen nur kurz wieder betonen werden, wenden wir uns zur genaueren Betrachtung

der projectivischen Elementargebilde zweiter und dritter Stufe und ihrer Erzeugnisse, deren grundlegende Bedeutung für die entsprechenden Beziehungen der höheren Gebilde wir nun kennen. Die Construction der projectivischen Elementargebilde ist aus § 3 bekannt. Hinsichtlich ihrer Verbindung erhalten wir zunächst folgende Uebersicht. Wenn wir die vier Elementargebilde zweiter Stufe, nämlich die Punktebene, die Strahlenebene, das Strahlenbündel und das Ebenenbündel durch die Symbole **PE**, **SE**, **SB**, **EB** bezeichnen, so entstehen die zehn Verbindungen

PE, PE; PE, SE; PE, SB; PE, EB; SE, SE; SE, SB;

SE, EB; SB, SB; SB, EB; EB, EB;

vier Collineationen und sechs Reciprocitäten. Unter ihnen erzeugen die dritte und die siebente nur eine endliche Zahl oder Gruppe von Punkten in ihren Strahlen und Strahlen in ihren Ebenen, im Wesentlichen auf die vereinigte Lage collinearer Ebenen oder die concentrische collinearer Bündel zurückkommend. Ebenso kommen die Verbindungen an vierter und sechster Stelle auf das Ineinanderliegen reciproker Ebenen oder Bündel zurück. Wir werden diese Fälle zuerst untersuchen, weil sich dieselben an die Construction der Gebilde direct anschliessen.

In allen übrigen Fällen entstehen Erzeugnisse von unendlich vielen Elementen und zwar in dem fünften und achten Falle zweifach unendlich viele Gerade, also Strahlencongruenzen, und einfach unendlich viele Ebenen, respective Punkte in stetiger Folge, also eine Developpable respective eine Curve; in dem Falle Zwei eine zweifach unendliche Folge von Ebenen, eine krumme Fläche als Enveloppe, im Falle Neun eine zweifach unendliche Folge von Punkten, eine krumme Fläche als Ort; in den Fällen Eins und Zehn Strahlencongruenzen. Wir werden diese Erzeugnisse in der Reihenfolge untersuchen, in welcher ihre gegenseitige Verbindung am besten hervortritt. Es ist ersichtlich, dass die Erzeugnisse aus einfach unendlich vielen Elementen unter sich und mit Elementargebilden erster Stufe sowie mit den Erzeugnissen derselben projectivisch gemacht und zu neuen Erzeugnissen ver-

bunden werden können; ebenso die Erzeugnisse aus zweifach unendlich vielen Elementen mit den Elementargebilden zweiter Stufe und unter sich. Aber wir haben nicht Raum, alle diese Verbindungen systematisch zu untersuchen.

Die Elementargebilde dritter Stufe Punktraum **PR** und Ebenenraum **ER** geben uns die Collineationen **PR, PR** und **ER, ER**, welche je ein dreifach unendliches Strahlensystem oder einen Complex und eine Gruppe sich selbst entsprechender Punkte, Ebenen und Geraden liefern; und dazu eine Reciprocität **PR, ER** mit ihren zweifach unendlich vielen vereinigtliegenden Elementen.

Wir beginnen mit der Collineation. Weil fünf entsprechende Elementenpaare (Punkte resp. Ebenen) von allgemeiner Lage die collinearen Räume bestimmen, so können höchstens vier entsprechende Paare zusammenfallen, ohne dass die Collineation in Identität übergeht. Und weil vier Paare entsprechender Elemente A_1, A_1'; A_2, A_2'; A_3, A_3'; E, E' — wir wollen z. B. annehmen Punkte —, von denen keine drei in einem Gebilde erster Stufe liegen, die collinearen Gebilde zweiter Stufe bestimmen, so kann die Zahl der sich selbst entsprechenden Punkte und ebenso Geraden nicht drei übersteigen, weil sonst die Gebilde nicht bloss in einer Ebene oder am nämlichen Scheitel liegen, sondern identisch sein würden. Wenn wir annehmen, dass m Punkte und n Strahlen der ineinanderliegenden Ebenen sich selbst entsprechen, so folgt aus der Natur der Collineation, dass die letzteren die geraden Verbindungslinien der ersteren und die ersteren die Durchschnittspunkte der letzteren sein müssen; man muss also ebensowohl haben

$$2m = n(n-1) \quad \text{als auch} \quad 2n = m(m-1);$$

somit

$$m : n = (n-1) : 2 = 2 : (m-1), \quad \text{und} \quad m = n = 3.$$

Und wenn in den collinearen Räumen m Punkte, n Ebenen und p Gerade sich selbst entsprechen, so müssen die p Geraden die Verbindungsgeraden der m Punkte und die Schnittgeraden der n Ebenen, sowie die m Punkte die Schnittpunkte der n Ebenen und diese die Verbindungsebenen der m Punkte

sein; wobei zu erinnern, dass nach dem Vorigen keine vier der Punkte in einer Ebene liegen und keine vier der Ebenen durch einen Punkt gehen können. Man hat also nothwendig

$$2.3.m = n(n-1)(n-2), \quad 2.3.n = m(m-1)(m-2),$$
$$2p = m(m-1) = n(n-1),$$

und erhält einzig

$$m = n = 4, \qquad p = 6,$$

die Ecken, Flächen und Kanten eines sich selbst entsprechenden Tetraeders.

Aber wir construieren vorerst die fraglichen Elemente und beschränken uns zunächst auf die Elementargebilde zweiter Stufe. Man hat in der Ebene als die Erzeugnisse der projectivischen Strahlbüschel

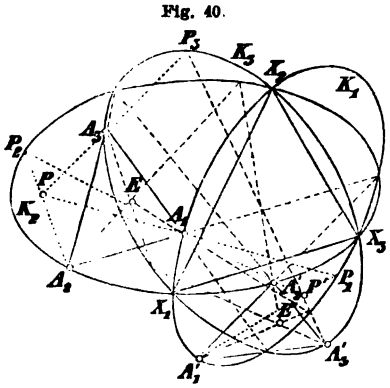
$$(A_1.A_2A_3E\ldots) \barwedge (A_1'.A_2'A_3'E'\ldots),$$
$$(A_2.A_3A_1E\ldots) \barwedge (A_2'.A_3'A_1'E'\ldots),$$
$$(A_3.A_1A_2E\ldots) \barwedge (A_3'.A_1'A_2'E'\ldots),$$

drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, welche respective durch die fünf Punkte bestimmt sind

A_1; A_1'; A_1A_2, $A_1'A_2'$; A_1A_3, $A_1'A_3'$; A_1E, $A_1'E'$
A_2; A_2'; A_2A_3, $A_2'A_3'$; A_2A_1, $A_2'A_1'$; A_2E, $A_2'E'$
A_3; A_3'; A_3A_1, $A_3'A_1'$; A_3A_2, $A_3'A_2'$; A_3E, $A_3'E'$.

Irgend zwei von ihnen bestimmen die Construction entsprechender Elemente und damit den dritten. Wir finden mit Hülfe der beiden ersten zum Punkt P den entsprechenden P' wie folgt: Wir ziehen die Gerade A_1P bis sie K_1 in P_1 zum zweitenmale schneidet und verbinden P_1 mit A_1'; wir ziehen A_2P bis zum zweiten Schnitt P_2 mit K_2 und $A_2'P_2$; $A_1'P_1$ und $A_2'P_2$ schneiden sich in P'. Daraus ersehen wir, dass P nur dann mit P' zusammenfallen kann, wenn es einer der gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte K_1, K_2, jedoch nicht

Fig. 40.



A_1A_2, $A_1'A_2'$ ist; denn durch den letzteren kann der Kegelschnitt K_3 nicht gehen. Und da jede zwei der drei Kegelschnitte einen solchen Punkt gemein haben, der dem dritten nicht angehört, so können nur drei Punkte ihnen gemeinschaftlich sein und diese sind die sich selbst entsprechenden Punkte X_1, X_2, X_3, ihre geraden Verbindungslinien x_1, x_2, x_3 die sich selbst entsprechenden Strahlen der ineinander liegenden collinearen Ebenen. Wir sehen auch, dass von ihnen einer z. B. x_1 und die Verbindungslinie der beiden andern X_1 reell sein muss (man erhält sie als die zweite Schnittsehne eines Paares dieser Kegelschnitte nach § 42, 12); dem Strahlbüschel um X_1 in der ersten Ebene entspricht dann ein ihm projectivisches concentrisches Strahlbüschel in der zweiten und die Doppelstrahlen beider sind die Strahlen x_2, x_3 und schneiden x_1 in X_3, X_2 respective; sie können reell und verschieden, vereinigt oder nicht reell, und endlich unbestimmt sein. Im ersten Fall heisst das von ihnen gebildete Dreieck das Hauptdreieck der Collineation. Im Fall ihrer Vereinigung berühren einander die Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 im Punkte X_2X_3 nach der Geraden x_1; thun sie es in der zweiten Ordnung (Osculation), so fallen die selbst entsprechenden Punkte in den Osculationspunkt und die Geraden in die zugehörige Tangente zusammen; im Fall der Unbestimmtheit findet zwischen den collinearen Ebenen centrische Lage statt, weil die Strahlen X_1A_i und X_1A_i' sich deckten und somit alle Strahlen aus X_1 und alle Punkte in x_1 sich selbst entsprechen. Die letzten drei sind specielle Fälle, welche im Allgemeinen nicht eintreten.

Ist einer der sich selbst entsprechenden Punkte X_i oder eine der Geraden x_i bekannt, so ergiebt sich dagegen die Verbindungsgerade und resp. der Schnittpunkt der beiden andern im Allgemeinen eindeutig und reell auch ohne Benutzung der Kegelschnitte K_i. Denn zieht man durch X_i zwei Gerade a, b und construiert ihre entsprechenden a' und b', die also auch durch X_i gehen, so sind die Reihen entsprechender Punkte in a und a' nothwendig perspectivisch für ein Centrum C_a, die in b, b' für ein anderes Centrum C_b und jeder Strahl durch C_a verbindet zwei entsprechende Punkte in a, a', jeder durch C_b gehende zwei solche in b, b'; also dass der Verbindungsstrahl

von $C_a C_b$ zwei Paare entsprechender Punkte enthält und somit die sich selbst entsprechende Gerade x_i ist. Und dual entsprechend für den Uebergang von x_i zu X_i. Natürlich sind im ersten Falle auch die Doppelpunkte der entsprechenden in x_i vereinigten Reihen die beiden andern sich selbst entsprechenden Punkte.

Man construiert also, wenn ein sich selbst entsprechendes Element bekannt ist, das gegenüberliegende mit dem Lineal und daher stets reell, die beiden andern mit dem Zirkel als Doppelelemente einer Projectivität, also auch einer Involution (§ 8,4), sodass sie auch bestimmt und verwendbar sind, wenn sie nicht reell werden.

Zur Construction des ersten der sich selbst entsprechenden Elemente hat man dagegen entweder einen der drei Schnittpunkte zweier der Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 zu ermitteln, die je durch projectivische Büschel also fünf Punkte bestimmt sind, von denen jedem ihrer Paare einer gemeinsam ist; oder man hat dual entsprechend eine der drei weiteren gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte K^1, K^2, K^3 aus projectivischen Reihen zu finden, von denen man eine gemeinsame Tangente kennt. Es ist dazu praktisch erforderlich, dass man die zu dem gesuchten gemeinsamen Element nahe benachbarten Elemente beider Kegelschnitte construiert, um aus ihrer Lage die Kegelschnitte und dieses Element mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen.

Es kann dabei bemerkt werden, dass zu den drei hervorgehobenen noch ein vierter Kegelschnitt K_E aus den entsprechenden Büscheln an den Punkten E, E' resp. K^e aus den entsprechenden Reihen auf e, e' hinzutritt, der dieselben Punkte X_i enthält resp. dieselben Geraden x_i berührt. Und endlich, dass irgend zwei entsprechende Punkte P, P' oder Gerade p, p' einen Kegelschnitt K_P resp. K^p desselben Systems hervorbringen; eines linearen Gebildes zweiter Stufe aus Kegelschnitten (§ 35) in dem einen wie im andern Fall.

Wenn die sich selbst entsprechenden Elemente reell sind, so bieten sie sich vorzugsweise bequem zur Construction dar; sei ausser ihnen noch ein Punktepaar A, A' oder ein Linienpaar a, a' gegeben, so hat man, um P' zu P zu finden, zu $X_1 A$, $X_1 A'$ als dem neben den Doppelstrahlen $X_1 X_2$, $X_1 X_3$

gegebenen dritten Paar den dem Strahl $X_1 P$ entsprechenden Strahl $X_1 P'$ zu ermitteln (§ 6,3) und dies dann bei X_2 für $X_2 X_1$, $X_2 X_3$ als Doppelstrahlen mit $X_2 P$ zu $X_2 P'$ zu wiederholen; man benutzt dazu bequem auch den dem Dreieck $X_1 X_2 X_3$ umgeschriebenen Kreis. Analog dient zum Uebergang von p zu p' der dem Doppelpunktdreieck eingeschriebene Kreis.

Es ist aus dem Früheren (I, § 22) bekannt, dass die Herstellung der centrischen Lage collinearer Ebenen immer mittelst der der unendlich fernen Geraden entsprechenden Reihen r, q' sehr einfach und in doppelter Weise möglich ist, sodass man von zwei ebenen collinearen Figuren jede als ein centrales Bild der andern ansehen kann; und es ist nicht schwer einzusehen (I, § 31, 11), dass die dazu dienende Methode identisch ist mit der folgenden, nämlich nichts anderes als ihre Durchführung mit reellen Elementen: Da bei einer Bewegung der Ebene ein Kreis ein Kreis bleibt, so bleiben bei einer Bewegung der Ebene in sich selbst die Kreispunkte $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ im Unendlichen ungeändert; rechnet man dieselben zum ersten oder Originalsystem und bezeichnen $\mathfrak{J}_1'$, $\mathfrak{J}_2'$ ihre Bilder, so muss der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_1'$, $\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_2'$ das Centrum der Collineation $\mathfrak{C}$ sein; wir bestimmen den ihm entsprechenden Punkt $\mathfrak{C}'$ des Bildes und bringen ihn mit $\mathfrak{C}$ zur Deckung durch die Verschiebung des zweiten Systems um $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$. Drehen wir endlich die zweite Ebene um $\mathfrak{C}$ so lange, bis ein Strahl $\mathfrak{C}P$ mit dem nach P' gehenden entsprechenden $\mathfrak{C}P'$ zur Deckung kommt, so ist die centrische Lage hergestellt, weil auch $\mathfrak{C}M$ auf $\mathfrak{C}M'$ fallen muss wegen

$$(\mathfrak{C}.\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 M P) \barwedge (\mathfrak{C}.\mathfrak{J}_1'\mathfrak{J}_2' M' P')$$

und der Deckung der Paare $\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1'$; $\mathfrak{C}\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{C}\mathfrak{J}_2'$; $\mathfrak{C}P$, $\mathfrak{C}P'$.

Dass hiermit auch die centrische oder wenn man will axiale Lage vereinigter collinearer Bündel bestimmt wird, bedarf keiner Ausführung. (§ 71.) Die möglichen speciellen Fälle beleuchten wir im folgenden Paragraphen.

1) Man leite aus der Bestimmung der Collineation durch vier Paare a_1, a_1'; a_2, a_2'; a_3, a_3'; e, e' von entsprechenden Geraden die drei Kegelschnitte K^1, K^2, K^3 ab, deren gemeinschaftliche Tangenten die sich selbst entsprechenden Geraden x_1, x_2, x_3 sind.

2) Denken wir das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ als F.-Dreieck projectivischer Coordinaten, sodass die Seiten desselben die Gleichungen

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ resp. haben und seien durch lineare homogene Gleichungen in den x_i $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ die entsprechenden Geraden $A_2'A_3'$, $A_3'A_1'$, $A_1'A_2'$ dargestellt, so sind die projectivischen Strahlbüschel des Textes von den Gleichungen

$$x_2 + \lambda x_3 = 0,\ X_2 + \lambda X_3 = 0;\quad x_3 + \lambda x_1 = 0,\ X_3 + \lambda X_1 = 0;$$
$$x_1 + \lambda x_2 = 0,\ X_1 + \lambda X_2 = 0$$

und erzeugen die Kegelschnitte

$$x_2 : x_3 = X_2 : X_3,\quad x_3 : x_1 = X_3 : X_1,\quad x_1 : x_2 = X_1 : X_2,$$

von denen jeder durch die beiden andern bestimmt ist; etc. wie im Text.

3) Setzt man für die X_i ihre Werthe nach der allgemeinen linearen Substitution, welche die Collineation der ebenen Systeme bezogen auf eine beliebige fundamentale Gruppe ausdrückt, so erhält man direct für die sich selbst entsprechenden Elemente, die ja nun einerlei oder verhältnissgleiche Coordinaten haben müssen, die drei Gleichungen

$$\mu x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ \mu x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$\mu x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

und daher die Verträglichkeitsbedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \mu, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \mu \end{vmatrix} = 0;$$

d. h. mit den Bezeichnungen des § 49

$$\mu^3 - \mu^2 \Sigma a_{ii} + \mu \Sigma A_{ii} - \mathbf{D} = 0.$$

Dieselbe liefert drei Werthe für μ, von denen einer nothwendig reell ist, und durch diese aus den nun verträglichen drei Gleichungen die Verhältnisse der x_i für die sich selbst entsprechenden Punkte.

Die Substitution der ξ

$$r\,\xi_k = a_{1k}\xi_1' + a_{2k}\xi_2' + a_{3k}\xi_3'$$

liefert mit r für μ dieselbe Verträglichkeitsbedingung für $\xi_i' = \xi_i$. Für das Hauptdreieck als fundamental hat man als Substitutionen

$$\mu x_i' = a_i x_i,\qquad r\,\xi_k = a_k \xi_k'$$

mit den a_i als den Wurzeln der vorigen cubischen Gleichung.

4) Man führe die Construction entsprechender Geraden p, p' mittelst der Gruppe der Hauptdreiecksseiten x_i aus.

5) Wie gestaltet sich die Construction entsprechender Elemente in dem besondern Fall, wo X_1 und x_1 und in der letztern X_2, X_3 vereinigt liegend gegeben sind?

6) Zwei collineare Ebenen sind durch zwei Paare entsprechender Geraden a, a'; b, b' und die correspondierenden der unendlich fernen Geraden r, q' (Gegenaxen) bestimmt. Man construiere zu einer Geraden die entsprechende mittelst ihrer Schnitte auf a, b; a', b', indem man die gleichen parallelen Büschel aus Scheiteln auf der Geraden $(ab, a'b')$ nach I, § 17, 2 benutzt.

7) Für centrische Collineation werden nach Einsetzung einer Wurzel zu der cubischen Verträglichkeitsbedingung die Gleichungssysteme zur Bestimmung der Coordinaten der Doppelelemente nothwendig je einer Gleichung äquivalent; die Coefficienten der drei Gleichungen $-mx_i + \Sigma a_{ik} x_k = 0$ sind einander proportional, d. h. man hat zwischen den Substitutionscoefficienten die drei Relationen

$$a_{12} a_{23} a_{31} = a_{21} a_{32} a_{13},$$

$$a_{11} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{32} a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{13} a_{32}}{a_{12}} = m.$$

Mit sechs Grössen α_i, β_i werden dann die Elemente der cubischen Determinante resp. gleich

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\beta_1, & \alpha_2\beta_1, & \alpha_3\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2, & \alpha_2\beta_2, & \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\beta_3, & \alpha_2\beta_3, & \alpha_3\beta_3 \end{array}$$

und m wird zur Doppelwurzel der cubischen Gleichung, zu der die unendlich vielen sich selbst entsprechenden Elemente gehören, die die Reihe in der Axe und das Büschel aus dem Centrum der Collineation bilden. Die einfache Wurzel $m_0 = m + \Sigma \alpha_i \beta_i$ liefert dieselben aus den Gleichungssystemen

$$m_0 x_i = \beta_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3),$$
$$m_0 \xi_i = \alpha_i(\beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3);$$

also das Centrum mit den Coordinaten x_i proportional zu den β_i und die Axe mit den Coordinaten ξ_i proportional den α_i.

8) Zur Verfolgung der Construction zur Herstellung der centrisch collinearen Lage gehen wir zu rechtwinkligen Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten über, wie in § 62. Darnach haben wir

$$\mu x' = a_{21} + a_{22} x + a_{23} y,$$
$$\mu y' = a_{31} + a_{32} x + a_{33} y,$$
$$\mu = a_{11} + a_{12} x + a_{13} y$$

und erhielten daraus

$$x = \frac{A_{12} + A_{22} x' + A_{32} y'}{A_{11} + A_{21} x' + A_{31} y'}, \quad y = \frac{A_{13} + A_{23} x' + A_{33} y'}{A_{11} + A_{21} x' + A_{31} y'},$$

sodass der unendlich fernen Geraden als dem gestrichenen resp.

dem ungestrichenen System angehörig die Gegenaxen r und q' entsprechen mit den Gleichungen

$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y = 0, \quad A_{11} + A_{21}x' + A_{31}y' = 0.$$

Für den von ihnen eingeschlossenen Winkel φ ist

$$\tan\varphi = \frac{a_{13}A_{21} - a_{12}A_{31}}{a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}}.$$

Eine Verschiebung und Drehung des gestrichenen Systems, von den drei verfügbaren Constanten abhängig, wird die centrische Lage herbeiführen; sie fordert die Ersetzung von x' und y' durch (§ 63, 1)

$$a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

in der Weise, dass für $\mu = m$ die in 7) erörterte Reduction eintritt. Sind α, α' die Coordinaten der Axe und β, β' die des Centrums, wie dort, so muss man haben

$$\begin{aligned}
&a_{21} - ma = \varrho\beta, \quad a_{22} - m\cos\varphi = \varrho\alpha\beta, \quad a_{23} + m\sin\varphi = \varrho\alpha'\beta,\\
&a_{31} - mb = \varrho\beta', \quad a_{32} - m\sin\varphi = \varrho\alpha\beta', \quad a_{33} - m\cos\varphi = \varrho\alpha'\beta',\\
&a_{11} - m = \varrho, \quad a_{12} = \varrho\alpha, \quad a_{13} = \varrho\alpha'.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen der beiden letzten Reihen entspringen durch Einsetzen der Werthe von $\varrho\alpha$, $\varrho\alpha'$ aus den untersten in die oberen doppelte Ausdrücke für β und resp. β', durch deren Vergleichung man erhält

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} &= -A_{31} = m(a_{13}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi),\\
a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} &= A_{21} = m(a_{13}\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi),
\end{aligned}$$

welche durch Quadrieren und Addieren m bis auf das Zeichen bestimmen

$$m^2 = \frac{A_{31}^2 + A_{21}^2}{a_{13}^2 + a_{12}^2}.$$

Den beiden Werthen $\pm m$ entsprechen zwei um π verschiedene Winkel φ, weil dieselben Gleichungen $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$ liefern, womit sich dann ϱ, β, β', α, α', a und b auch bestimmen.

70. Wir kennen die besonderen Fälle der centrischen Collineation durch eingehende Discussion und Benutzung in construierender Form (I, §§ 14, 19 f.) und dürfen ihre algebraische Ausdrucksform nach dem Vorigen dem Leser überlassen. Für die centrische Lage haben wir ebenso die elementaren Specialfälle der Collineation: Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz genügend kennen gelernt (I, § 22) und es erübrigt nur, dieselben hier in ihrer allgemeinen Lage aus dem Vorhergehenden zu discutieren. Wir können uns dabei auf die geometrische

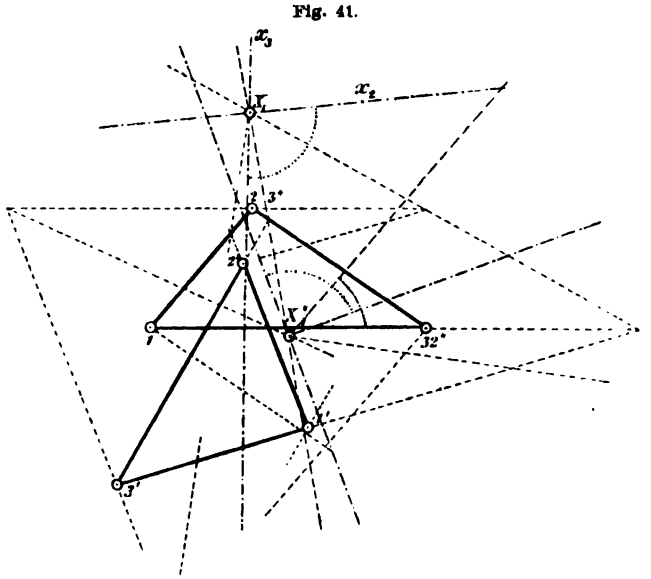
Entwickelung beschränken, weil für die algebraische wohl die Bemerkung genügt, dass — den Gebrauch Cartesisch-Plückerscher Coordinaten vorausgesetzt — die diesen besonderen Collineationen gemeinsame unendlich ferne Lage der beiden Gegenaxen q' und r das Verschwinden der Substitutionscoefficienten a_{12}, a_{13} fordert, woraus von selbst das von A_{21}, A_{31} folgt; wie denn geometrisch die unendlich ferne Lage der einen Gegenaxe die der andern mit sich bringt. Die nämliche Bemerkung führt sofort zur geometrischen Erledigung. Die unendlich ferne Gerade der Ebene ist in allen diesen Fällen die eine reelle Seite x_1 des Hauptdreiecks und man gelangt daher durch lineare Construction zur reellen Gegenecke X_1 desselben; die beiden andern Gegenecken und Seiten ergeben sich dann durch Zirkelconstruction. Betrachten wir die einzelnen Fälle nacheinander, zuerst die Affinität als den allgemeinsten. Zwei beliebige Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1'A_2'A_3'$ (in der Fig. 41 nur 123 und 1′2′3′) als entsprechend bestimmen die Affinität, weil die unendlich ferne Gerade das vierte nothwendige Paar der entsprechenden Elemente repräsentiert. Die Parallelenbüschel entsprechender Richtungen sind perspectivisch, weil sie die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein haben und ihre Perspectivaxen gehen nothwendig durch den Punkt X_1. Man erhält diesen Punkt also auf drei Geraden, die wir mit der Bezeichnung a_i für die Gerade A_jA_k etc., a_i^* für die Parallele zu a_i durch A_i etc. zu benennen haben als a_1a_1', $a_1^*a_1^{*'}$; a_2a_2', $a_2^*a_2^{*'}$; a_3a_3', $a_3^*a_3^{*'}$. Die Doppelstrahlen der Büschel $(X_1 . A_1A_2A_3 .) \barwedge (X_1 . A_1'A_2'A_3' .)$ sind dann die beiden andern sich selbst entsprechenden Geraden x_2, x_3 und ihre Richtungen die andern sich selbst entsprechenden Punkte X_2, X_3; man benutzt oft mit Vortheil die von X_1 zu den entsprechenden Seitenpaaren der Dreiecke gezogenen Parallelstrahlen als Bestimmende der Büschel. Den Strahlen von einer jener Doppelrichtungen im ungestrichenen System entsprechen Strahlen derselben Richtungen im gestrichenen. Bei entgegengesetztem Drehungssinn der bezeichneten Büschel sind diese Richtungen nothwendig reell, bei gleichem Drehungssinn können sie auch conjugiert imaginär sein. In Fig. 41 haben wir 1′2′3′ und 12*3* mit X_1^* als von gleichem Sinn; die Doppelstrahlen sind imaginär und durch das Rechtwinkelpaar und das symmetrische

Paar ihrer Involution dargestellt; dagegen zeigt sie mit $1'2'3'$ und 123 ungleichen Sinn, und X_1 mit den reellen Strahlen x_2, x_3 ist die Ecke des Hauptdreiecks.

Im Fall der Aehnlichkeit sind die entsprechenden Winkel der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ einander gleich und dieselben unterscheiden sich ausser durch das Längenverhältniss entsprechender Seiten wesentlich nur noch durch den gleichen oder entgegengesetzten Sinn ihrer Umlaufung. Zwei Paare entsprechender Punkte A_1, A_1' und A_2, A_2' genügen daher zur Bestimmung der Aehnlichkeit ebener Systeme, wenn man noch hinzufügt, ob jener Umlaufungssinn derselbe sein soll oder nicht, oder wie man sagt, ob gleichsinnige oder ungleichsinnige Aehnlichkeit stattfindet. Bildet man über A_1A_2 ein willkürliches Dreieck mit der Ecke A_3, so kann das entsprechende über $A_1'A_2'$ in zwei zu dieser Geraden orthogonal-symmetrischen Lagen $A_1'A_2'A_3'$ und $A_1'A_2'A_3^{*\prime}$ gebildet werden, weil man die Winkel bei A_1 und A_2 in A_1' und A_2' auf beiden Seiten antragen kann. In Fig. 42 sind die Dreiecke als rechtwinklig gleichschenklig bei 1, $1'$ gewählt und das Dreieck mit $2'$ giebt die gleichsinnige, das mit $2^{*\prime}$ die ungleichsinnige Aehnlichkeit. Die vorher beschriebene Construction liefert X_1 als die im Endlichen liegende Ecke des Hauptdreiecks bei der gleichsinnigen und X_1^* bei der ungleichsinnigen Aehnlichkeit; ihre Verbindungsgerade wird aus 12, $1'2'$ und den zu ihnen Parallelen durch 3, $3'$ resp. erhalten. Die Büschel $(X_1.123)$ und $(X_1.1'2'3')$ sind gleich und von gleichem Sinn, ihre Doppelstrahlen haben die absoluten Richtungen, diese oder die Kreispunkte im Unendlichen sind die beiden andern Doppelpunkte. Dreht man das Dreieck 123 um X_1 um den Betrag und im Sinn des Winkels $1X_11'$, so gelangt es in die direct oder invers ähnliche Lage (nur die erste ist gezeichnet) (1)(2)(3) zu $1'2'3'$. Für die Dreiecke 123 und $1'2^{*\prime}3'$ wird der Doppelpunkt X_1^* gefunden, die Büschel $(X_1^*.123)$ und $(X_1^*.1'2^{*\prime}3')$ sind gleichwinklig, aber von entgegengesetztem Sinn, ihre zu einander rechtwinkligen Doppelstrahlen sind die Halbierungslinien der Winkel $1X_1^*1'$, $2X_1^*2^{*\prime}$, $3X_1^*3'$; die in Bezug zu diesen Doppelstrahlen orthogonalsymmetrischen des Dreiecks 123 sind die zu $1'2^{*\prime}3'$ direct und invers ähnlichen Lagen des Dreiecks $(1)(2^*)(3)$; wieder ist nur das erste gezeichnet.

Wenn endlich Congruenz, d. h. Gleichheit der in gleicher Ordnung genommenen bestimmenden Maasse zwischen den betrachteten Systemen stattfindet, so kann hier die Construction aus zwei gleichlangen Strecken A_1A_2 und $A_1'A_2'$ (in Fig. 43 12 und 1′2′) erfolgen, wenn noch bestimmt ist, ob Gleichheit oder Ungleichheit des Sinnes stattfinden soll. Im ersten Fall entspricht dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck 123 das gleichartige 1′2′3′, im andern Fall das 1′2′3*′; die Seiten 23, 2′3′ und die zu ihnen parallelen Geraden durch 1, 1′ resp. liefern die Verbindungslinie der X_1 und X_1^*, deren

Fig. 41.



letzter unendlich fern liegt. Der Punkt X_1 ist nothwendig zugleich der Scheitel von zwei gleichwinkligen gleichschenkligen Dreiecken mit den Grundlinien 11′ und 22′ und kann daher auch als der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten dieser Strecken gefunden werden; durch Drehung um ihn kommen die gleichsinnig congruenten Figuren zur Deckung, 123 als (1)(2)(3) auf 1′2′3′. Die Doppelstrahlen der entsprechenden Büschel um X_1 haben die absoluten Richtungen.

Die Doppelstrahlen an dem unendlich fernen X_1^* sind rechtwinklig zu einander, weil die entsprechenden Büschel an

diesem Punkt gleich und von entgegengesetztem Sinn sind; Fig. 43 zeigt als endlichen Doppelstrahl x_2^* und das in Bezug auf ihn als Axe orthogonalsymmetrische (1)(2)(3) des Dreiecks 123, die zu 1′2′3*′ für die Richtung X_1^* perspectivisch congruente also parallele Lage. Dass X_1^* unendlich fern ist, folgt aus der Gleichheit und Gleichsinnigkeit der im Doppelstrahl x_2^* gelegenen Reihen; nach I, § 21 sind die Doppelpunkte solcher Reihen in ihrer Richtung vereinigt, weil sie zwischen den dort zusammenfallenden Gegenpunkten liegen müssen.

Der Punkt X_1 ist als Situationspunkt bezeichnet worden; er ist das Centrum der einzigen Drehung, durch welche die gleichsinnig congruenten Systeme 123 und 1′2′3′ in einander übergeführt werden können. Wenn die Systeme einander unendlich nahe liegen, wie zwei aufeinander folgende Lagen eines starren, in seiner Ebene bewegten Systems, so ist X_1 das Momentcentrum des Systems genannt worden; es ist der Schnittpunkt der Normalen zu den Bewegungsrichtungen seiner Punkte. Die Gerade x_2^* der ungleichsinnig congruenten Systeme hat man auch Situationsaxe derselben genannt.

Die Kegelschnitte aus entsprechenden projectivischen Reihen in der fundamentalen Construction des § 69 werden in allen diesen Fällen, als die unendlich ferne Gerade berührend, Parabeln; die im Endlichen liegenden Doppelstrahlen sind ihre zwei übrigen gemeinsamen Tangenten, der im Endlichen liegende Doppelpunkt ist ihr, auch wenn sie selbst imaginär sind, reeller Schnittpunkt; im Fall der gleichsinnigen Aehnlichkeit und Congruenz, wo diese Doppelstrahlen die absoluten Richtungen haben, ist er also zugleich ihr Brennpunkt.

Die Kegelschnitte aus entsprechenden projectivischen Büscheln sind im Fall der Affinität einander ähnlich und ähnlich gelegen, Hyperbeln bei ungleichsinniger Affinität, Ellipsen bei gleichsinniger. Im Fall der Aehnlichkeit und also auch der Congruenz, wo die erzeugenden Büschel gleiche Büschel von gleichem oder von entgegengesetztem Sinn sein müssen, werden sie zu Kreisen resp. gleichseitigen Hyperbeln von ähnlicher Lage. Bei der gleichsinnigen Aehnlichkeit in Fig. 42 ist X_1 der zweite Schnittpunkt der Kreise, die durch 1, 1′ resp. 2, 2′ und 12, 1′2′ oder 1, 1′ resp. 3, 3′ und 13, 1′3′ gelegt werden können, etc.; da das Erste genügt,

so sieht man die früher erwähnte volle Bestimmtheit der gleichsinnigen Aehnlichkeit durch die entsprechenden Strecken 12,

Fig. 42.

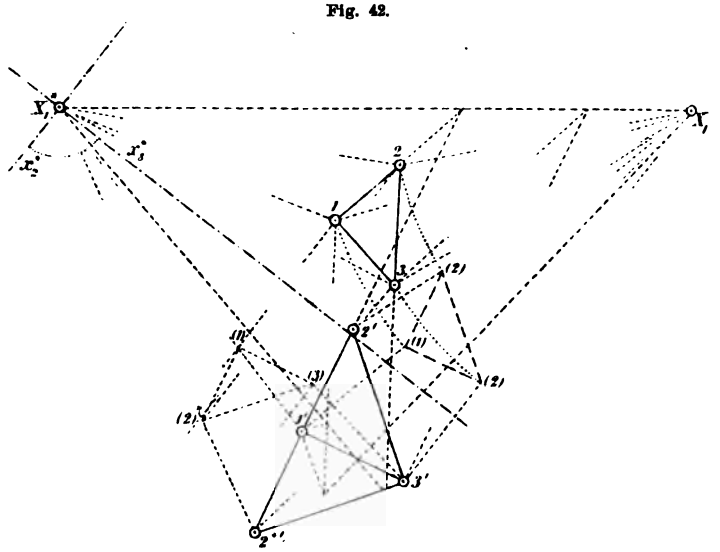
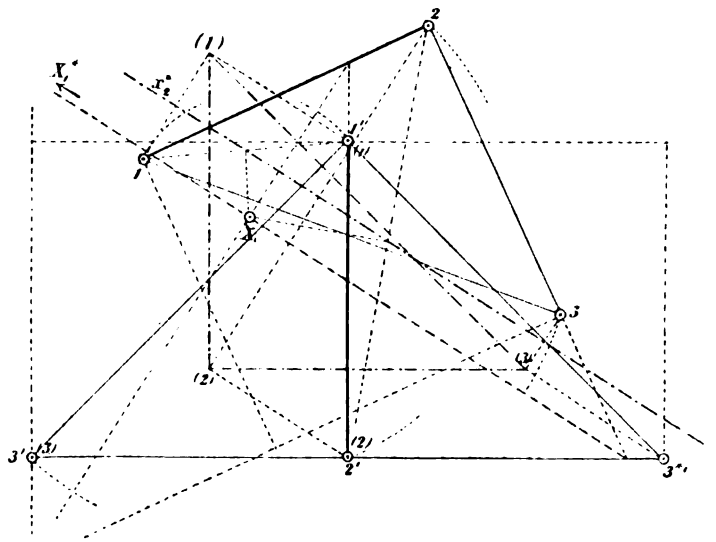


Fig. 3.



1′2′. Im andern Fall ist X_1^* der gemeinsame Punkt gleichseitiger Hyperbeln von den Asymptotenrichtungen von x_2^* und

x_3^* durch die Punkte 1; 1′; 12, 1′2′ oder 2; 2′; 12, 1′2′; etc. Ebenso in den Fällen der Congruenz in Fig. 43, S. 477. Die Gerade x_2^* ist gemeinsame Asymptote aller dieser gleichseitigen Hyperbeln im Fall der ungleichsinnigen Congruenz. Auch ist x_2^* die Scheiteltangente der aus den gleichen Reihen 12∞, $1'2'\infty'$ entstehenden Parabel und zugleich X_1 der Brennpunkt derselben. Auf die besonderen Fälle dieser Kategorie, also mit vereinigten Elementen des Hauptdreiecks, führen uns andere Betrachtungen zurück.

Nach dem Vorigen ist die perspectivische Lage der ähnlichen und congruenten Systeme auf unendlich viele Arten möglich. Wir erwähnen aber noch die perspectivische Lage affiner Ebenen, für welche die Construction des § 69 eben durch die unendlich ferne Lage der Gegenaxen versagt. Nach § 3 knüpft sich die perspectivische Lage an die Existenz einer Punkt für Punkt sich selbst entsprechenden Geraden. Zu solchen gelangt man aber durch Untersuchung entsprechend gleicher Reihen etwa auf Ecktransversalen $11^* = 1'1^{*'}$ der gegebenen Dreiecke; also nach der Proportion $21^* : 23 = 2'1^{*'} : 2'3'$. Bringt man zwei solche Reihen Punkt für Punkt zur Deckung, so sind die affinen Ebenen in perspectivischer Lage, natürlich für ein unendlich fernes Centrum; und sie bleiben diess, auch wenn man das eine der Systeme um jene Gerade dreht, fortwährend. (I, § 54.) Reihen von diesen Richtungen sind ihren entsprechenden gleich und gestatten die Herstellung der perspectivischen Lage; sie bilden zwei Paare von Parallelenbüscheln. Sind sie nicht reell, so ist die perspectivische Lage nicht direct herstellbar. Offenbar aber kann man immer und so auch dann durch ähnliche Verjüngung des einen Systems jene Gleichheit für beliebige Reihen herbeiführen.

1) Wenn wir einen Punkt der Ebene als dem ersten System angehörig O und als dem zweiten System angehörig P' nennen, und die ihm im zweiten resp. ersten System entsprechenden Punkte O' und P ermittelt denken, so entspricht der Geraden OP des ersten Systems die Gerade $O'P'$ des zweiten und man sieht, dass durch jeden Punkt der Ebene vereinigter collinearer Systeme zwei einander entsprechende Gerade gehen. Bei einem Hauptpunkt entspricht jeder durch ihn gehenden Geraden eine andere, die ihn enthält. Dieselben Gründe zeigen auch, dass auf jeder Geraden op' der Ebene zwei entsprechende Punkte liegen, nämlich ihre Schnittpunkte mit den Geraden o', p, die ihr entsprechen. Nur

bei einer Hauptlinie gehört zu jedem Punkt ein entsprechender in ihr. Offenbar entspricht hiernach jedem Punkt OP' auch eine Gerade $O'P$ — wir wollen sagen als doppelt conjugiert — und einer Geraden op' ein Punkt $o'p$ der Ebene.

Für ein reelles Hauptdreieck als fundamental entsprechen dem Punkt y_i die Punkte $a_i y_i$ und $a_i^{-1} y_i$ und die Verbindungsgerade beider mit der Gleichung

$$a_1 y_2 y_3 (a_2^2 - a_3^2) x_1 + a_2 y_3 y_1 (a_3^2 - a_1^2) x_2 + a_3 y_1 y_2 (a_1^2 - a_2^2) x_3 = 0;$$

und dual für die entsprechenden Geraden zu y_i und ihren Schnittpunkt.

2) Lässt man die Gerade op' um den in ihr liegenden festen Punkt OP' sich drehen, so erzeugen die zu dem erzeugten Büschel entsprechenden projectivischen Büschel um O' und P mit demselben zwei Kegelschnitte als Orte der Punkte oo' und resp. pp', die von jeder durch ihren gemeinsamen Punkt OP' gehenden Geraden in dem Paar ihrer entsprechenden Punkte geschnitten werden. Für eine Hauptlinie liegt OP' mit O' und P in einer Geraden und die Kegelschnitte zerfallen in sie und je eine der beiden andern Hauptlinien; und dual.

3) Durchläuft der Punkt y_i am Schluss von 1) eine Gerade, so umhüllt die ihm doppelt conjugierte Gerade einen Kegelschnitt und dual. Denn die Substitution von $y_i + \lambda z_i$ für y_i, die die Bewegung des Punktes vom Parameter λ in der Geraden YZ ausdrückt, macht die Coordinaten der Geraden $a_i (a_j^2 - a_k^2) y_j y_k$ zu quadratischen Functionen dieses Parameters. Man bildet die Gleichung des Kegelschnittes in den ξ_i für η_i als die Coordinaten der Geraden aber ganz direct als

$$\eta_1 a_1 (a_2^2 - a_3^2) \xi_2 \xi_3 + \eta_2 a_2 (a_3^2 - a_1^2) \xi_3 \xi_1 + \eta_3 a_3 (a_1^2 - a_2^2) \xi_1 \xi_2 = 0.$$

Jeder dieser Kegelschnitte berührt die Hauptlinien; im dualen Fall geht er durch die Hauptpunkte, seine Gleichung ist

$$y_1 a_1 (a_2^2 - a_3^2) x_2 x_3 + \cdots = 0$$

und seine ihn bestimmenden Tangenten in den F.-Punkten (ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten liegen in einer Geraden) haben die Gleichungen

$$y_3 a_3 (a_1^2 - a_2^2) x_2 + y_2 a_2 (a_3^2 - a_1^2) x_3 = 0, \text{ etc.}$$

Man findet die Schnittpunkte dieser Tangenten in Paaren leicht als die doppeltconjugierten Punkte B_i^* der Geraden b_i, welche die Schnittpunkte der aus den beiden andern F.-Punkten nach dem gegebenen Punkt gehenden Geraden mit den gegenüberliegenden F.-Geraden verbinden.

Wenn der Scheitel des Strahlbüschels eine Gerade durchläuft, so bilden die den Büscheln entsprechenden Kegelschnitte, weil jene einen Strahl gemein haben, ein Büschel von Kegelschnitten. Die Geraden b_i drehen sich dann um feste Punkte, die Punkte B_i^* beschreiben Kegelschnitte. Man erfährt daraus z. B., dass die Scheitel der Büschel, welchen gleichseitige Hyperbeln entsprechen, in der zum Höhenschnittpunkt des F.-Dreiecks doppeltconjugierten Geraden liegen. Der Scheitel des Büschels, das einen Kreis liefert, lässt sich aus der Gleichung sofort entnehmen.

4) Wenn in derselben Ebene drei zu einander collineare Systeme liegen, sodass (§ 62) Gleichungen

$$\mu x_i' = a_{i1} x_1 + \cdot\cdot, \qquad \mu x_i'' = b_{i1} x_1 + \cdot\cdot, \quad \text{etc.}$$

bestehen, so entspringt aus ihnen ein Ort der Punkte, in denen drei entsprechende Strahlen der drei Systeme sich begegnen, und eine Enveloppe der Geraden, in welchen drei entsprechende Punkte der Systeme liegen; jener ist eine Curve dritter Ordnung, diese eine Curve dritter Classe, oder in einer Geraden liegen drei Punkte, in denen sich drei entsprechende Gerade der Systeme schneiden, und durch einen Punkt gehen drei Gerade, in denen drei entsprechende Punkte der Systeme liegen.

Denn damit die Punkte

$$\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0, \quad \xi_1 x_1' + \cdot\cdot = 0, \quad \xi_1 x_1'' + \cdot\cdot = 0$$

oder

$$\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0, \qquad (a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + a_{31}\xi_3) x_1 + \cdot\cdot = 0,$$
$$(b_{11}\xi_1 + b_{21}\xi_2 + b_{31}\xi_3) x_1 + \cdot\cdot = 0$$

in einer Geraden liegen, ist nöthig, dass die Determinante der Coefficienten ihrer Gleichungen verschwindet, was eine Gleichung dritten Grades zwischen den Coordinaten dieser Geraden liefert. Und dual für die Geraden

$$\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0, \quad \xi_1' x_1 + \cdot\cdot = 0, \quad \xi_1'' x_1 + \cdot\cdot = 0$$

oder

$$\xi_1 x_1 + \cdot\cdot = 0, \qquad \xi_1 (A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3) + \cdot\cdot = 0,$$
$$\xi_1 (B_{11} x_1 + B_{21} x_2 + B_{31} x_3) + \cdot\cdot = 0$$

als durch einen Punkt gehend.

5) Wenn die drei collinearen Systeme einen Hauptpunkt gemein haben, so sondert sich derselbe von der Enveloppe dritter Classe als eine solche von der Classe Eins ab und die Enveloppe der ihn nicht enthaltenden Geraden, welche drei entsprechende Punkte verbinden, wird ein Kegelschnitt.

Weil gleichsinnig ähnliche und congruente Systeme die Kreispunkte der Ebene zu gemeinsamen Hauptpunkten haben, so sondern

sich die Büschel der Strahlen absoluter Richtungen ab und die reellen Geraden der Ebene, auf welchen Tripel entsprechender Punkte liegen, bilden ein Büschel.

Zugleich zerfällt, weil die unendlich ferne Gerade sich selbst entspricht — also diess auch für ungleichsinnige Aehnlichkeit und Congruenz und für affine Systeme — die Curve dritter Ordnung, welche den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlentripel bildet, in jene Gerade und einen Kegelschnitt.

6) Wenn in derselben Ebene vier collineare Systeme $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ liegen, so entspricht den Systemen 1 2 3 ein Ort dritter Ordnung und eine Enveloppe dritter Classe; ebenso den Systemen 1 2 4 ein anderer Ort und eine andere Enveloppe. Die neun gemeinsamen Punkte beider Orte und die neun gemeinsamen Tangenten beider Enveloppen sind Convergenzpunkte von vier entsprechenden Strahlen und Verbindungsgerade von vier entsprechenden Punkten der Systeme. Also bilden die vier aus ihrer Verbindung in Tripeln entstehenden Curven dritter Ordnung ein Büschel und die entsprechenden Curven dritter Classe eine Schaar.

7) Für vier gleichsinnig congruente Systeme in der Ebene giebt es nur eine reelle Gerade im Endlichen, welche vier entsprechende Punkte derselben enthält; natürlich die Verbindungslinie der beiden Punkte derselben, die die Scheitel der Büschel von Geraden durch drei entsprechende Punkte in den Systemen 1, 2, 3 und resp. 1, 2, 4 sind. Die Punkte gleicher Art für die Systeme 1 3 4 und 2 3 4 liegen in derselben Geraden.

8) Für drei gleichsinnig congruente Systeme $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ der Ebene kann der Scheitel T des Büschels der Geraden durch Tripel entsprechender Punkte wie folgt gefunden werden: Sei X_3 der im Endlichen sich selbst entsprechende Punkt der Systeme $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ und X_1 derjenige der Systeme $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$; jenem entspreche im dritten System $\mathbf{S}_3$ der Punkt X_{33}, diesem im ersten System der Punkt X_{11}; dann ist der Schnittpunkt der Geraden X_3X_{33} und X_1X_{11} der gesuchte Punkt, und natürlich geht auch X_2X_{22} durch ihn.

Das Strahlbüschel aus T als zu $\mathbf{S}_1$ gehörig angesehen erzeugt mit den ihm in $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ entsprechenden Kreise, denen in $\mathbf{S}_1$ ein auch durch T gehender Kreis entspricht; diese Kreise gehen als Orte der entsprechenden Punkte auf den Strahlen aus T auch durch X_3, X_2, X_{11}; X_1, X_3, X_{22}; X_2, X_1, X_{33} resp. und sind durch sie bestimmt.

71. Die Scheine zweier vereinigter collinearer Ebenen oder ihre projicierenden Bündel aus einem Punkt des Raumes sind concentrische collineare Bündel; die Strahlen nach den sich selbst entsprechenden Punkten X_i der Ebene sind ihre sich selbst entsprechenden Strahlen, die Ebenen nach den sich selbst entsprechenden Geraden x_i oder die Verbindungsebenen

der vorigen in Paaren sind die sich selbst entsprechenden Ebenen derselben. Man sieht hiernach auch, dass von den drei sich selbst entsprechenden Ebenen eine und von den sich selbst entsprechenden Geraden die ihr gegenüberliegende nothwendig reell sind, während die beiden andern Ebenen und Geraden des Hauptdreikants auch conjugiert imaginär sein können.

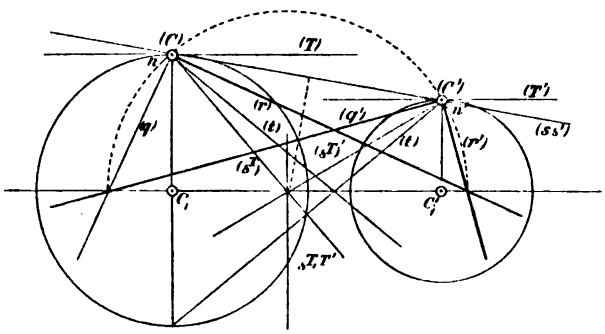
Wir fügen durch die Angabe seines Distanzkreises auf der Ebene (Fig. 44) die Bestimmung des Scheitels oder Centrums im Raum hinzu; die Specialfälle aus der unendlich fernen Doppelgeraden verlieren wesentlich ihre Specialität, nur die aus Vereinigung der Elemente des Hauptdreiecks übertragen sich als solche in das Bündel.

Es ist bekannt, wie der Distanzkreis die Elemente des projicierenden Bündels mit den projicierenden Normalebenen derselben verbindet (I, § 10) und daraus ersichtlich, dass die Beziehung eines Bündels von Strahlen zu dem Bündel ihrer Normalebenen beim Entsprechen der zu einander normalen Elemente eine besondere Form der Reciprocität ist. Betrachten wir also die Bündel $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ der Normalebenen zu den Strahlen der gegebenen Bündel, so sind diese zu denselben reciprok und, wenn wir die Normalebenen entsprechender Strahlen einander entsprechen lassen, zu einander collinear; nehmen wir zu den Normalebenen der Strahlen des ersten Bündels die zu den entsprechenden Strahlen des zweiten normalen Ebenen im zweiten, so bilden sie ein Bündel $\mathfrak{N}'$, welches auch mit $\mathfrak{N}'$ collinear ist und demnach mit ihm ein Hauptdreikant gemein hat, dessen entsprechende Elemente in den beiden ursprünglichen Bündeln entsprechende Tripel rechtwinkliger Strahlen und Ebenen sind. Und zwar ist nicht nur das eine Paar der so sich entsprechenden Strahlen n, n' reell; denn da ihre Normalebenen entsprechende Ebenen sind und also entsprechende projectivische Strahlbüschel enthalten, so sind die entsprechenden Rechtwinkelpaare q, r und q', r' die beiden andern Paare q, q' und r, r' der entsprechenden rechtwinkligen Dreikante der Bündel. Dieselben sind also stets reell und werden nach dem Vorigen allgemein construiert.

Im Fall der perspectivischen Lage erkennt man sie unmittelbar. Perspectivisch collinear sind zwei Bündel, welche

Scheine derselben Ebene aus verschiedenen Punkten sind; oder also, zwei collineare Bündel, wenn vier Paare entsprechender Strahlen derselben sich in einer Ebene schneiden; diese Ebene ist der perspectivische Durchschnitt, die Perspectivebene derselben, alle Paare entsprechender Strahlen und Ebenen der Bündel begegnen sich in ihr. Denken wir die Punkte C, C' als die Centra oder Scheitel der Bündel und die sie nicht enthaltende Ebene $\mathfrak{E}$ als die Perspectivebene, so sind alle Ebenen durch C und C' sich selbst entsprechend und unter ihnen ist die Normalebene zu $\mathfrak{E}$ dadurch ausgezeichnet, dass ihre Normalen in C und C' gleichfalls entsprechende Strahlen s, s' sind, während sie zugleich zwei entsprechende Rechtwinkelpaare q, r und q', r' der in ihr gelegenen perspectivischen

Fig. 44.



Strahlbüschel enthält; man findet sie durch den Kreis, der in ihr aus dem von C und C' äquidistanten Punkt ihrer Spur durch C und C' beschrieben wird, wie bekannt. (I, § 18, 6.) In der Figur sind C, C' durch ihre Distanzkreise angegeben und die Umlegungen mit der Normalebene zu $\mathfrak{E}$ durch CC' in Klammern bezeichnet. Diese Strahlen q, r, s und q', r', s' bilden die entsprechenden rechtwinkligen Dreikante. Aber an sie schliessen sich, analog wie in I, § 18, 10 an die entsprechenden rechten Winkel der projectivischen Büschel und an die Gegenaxen der collinearen Ebenen in I, § 14 andere metrische Besonderheiten der collinearen Bündel an. Wir sagten schon, dass die Gerade CC' Scheitelkante ss' eines sich selbst entsprechenden Ebenenbüschels ist, die Vereinigung zweier ent-

sprechenden Strahlen, deren projectivische Ebenenbüschel einander gleich sind. In der vorher betrachteten Normalebene zu **E** durch CC' liegt aber ein weiteres entsprechendes und zu **E** gleichgeneigtes Strahlenpaar, dessen Fusspunkt in C_1C_1' man erhält, wenn man das Spiegelbild C^* von C in Bezug auf ihre Spur C_1C_1' in **E** mit C' verbindet; diese Strahlen sind die Scheitelkanten t, t' von zwei andern entsprechend gleichen Ebenenbüscheln der perspectivisch collinearen Bündel. Sie entsprechen den Geraden ss', tt' gleicher entsprechender Reihen in perspectivischen Ebenen, als den reciproken Systemen zu den Bündeln. Reciprok den dort nachgewiesenen Punkten $\mathfrak{C}$, T mit gleichen entsprechenden Strahlbüscheln giebt es hier Ebenen Γ, **T** mit gleichen entsprechenden Strahlbüscheln; nämlich zuerst die von den Centren C, C' ausgehenden Parallelebenen Γ, Γ' zu **E**, deren entsprechende Strahlen einander parallel sind; und sodann die projicierenden Ebenen **T**, **T**′ der Geraden, in welcher die halbierende Normalebene von CC' die Ebene **E** schneidet. Diese entsprechend gleichen Büschel sind zugleich die einzigen ihrer Art. Ihre Träger sind zu den rechtwinkligen Dreikanten in einfacher Beziehung: Die Ebenen gleicher entsprechender Strahlbüschel gehen durch n, n' und liegen symmetrisch zu den beiden andern Rechtwinkelkanten q, r resp. q', r' oder den anliegenden Rechtwinkelebenen. Die Geraden gleicher entsprechender Ebenenbüschel liegen in der Ebene qr symmetrisch zu denselben Kanten. Sie können daher auch unabhängig von der perspectivischen Lage auf Grund der Construction entsprechender Rechtwinkeltripel für zwei beliebige collineare Bündel gefunden werden und dienen dann dazu, die perspectivische Lage derselben herzustellen; nämlich durch Vereinigung der entsprechend gleichen Ebenenbüschel s, s' zur Deckung; daraus ergiebt sich dann sofort die Ebene **E**. Man sieht, dass die perspectivische Lage noch die Verschiebung des einen Bündels parallel sich selbst längs CC' zulässt, womit Parallelverschiebung von **E** sich verbindet, und dass sie also auch bei Vereinigung der Scheitel C, C' noch möglich ist; wir wissen es aus I, p. 110.

Wenn die Abstände der Scheitel C, C' von der Perspectiv-

ebene gleich gross und von gleichem Sinn sind, so decken sich die Ebenen Γ und Γ' und enthalten die Scheitelkante ss'; auch fällt t in $\mathbf{T}$ und t' in $\mathbf{T}'$ und bei Parallelverschiebung des einen Bündels an das Centrum des andern werden t ($\mathbf{T}$) und t' ($\mathbf{T}'$), wie q und r', q' und r symmetrisch zu CC_1 in der ss' enthaltenden Ebene. Sind C und C' von $\mathbf{E}$ gleich entfernt auf entgegengesetzten Seiten, so fallen t, t' in Γ, Γ' resp. und $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ gehen durch ss' und fallen zusammen; bei der Verschiebung zur concentrischen Lage fallen Γ, Γ' und in ihnen t, t' zusammen, wie s, s' und durch sie $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$; zugleich fallen nicht nur wie immer n, n' zusammen, sondern es fällt auch q' auf r und r' auf q.

Wir können diess etwas vorgreifend, aber doch mit bekannten Vorstellungen operierend, auch so ausdrücken. Nach § 40, 4 sind projectivische Strahlbüschel gleich, wenn den absoluten d. h. nach Punkten des imaginären Kugelkreises gehenden Strahlen des einen die absoluten Strahlen des andern entsprechen; und projectivische Ebenenbüschel sind gleich, wenn den absoluten d. h. jenen Kreis berührenden Ebenen des einen die absoluten Ebenen des andern entsprechen. Wenn zu dem Kegel der absoluten Strahlen aus dem Scheitel der Bündel der nach ihrer Projectivität entsprechende Kegel gebildet wird, so haben beide als Kegel zweiten Grades ein gemeinsames Tripel (I, § 32 a) harmonischer Pol- und Polarebenen, welches als Tripel des Absoluten reell und orthogonal ist und dem ein orthogonales Tripel entspricht; ferner (§ 75 f.) vier gemeinsame Tangentialebenen, die sich in drei Paaren von Strahlen auf den Tripelebenen schneiden, von denen eines reell und zu den betreffenden Kanten des Tripels symmetrisch ist — die Träger von Ebenenbüscheln, die ihren entsprechenden gleich sind; und sie haben vier gemeinsame Erzeugende in drei durch die Kanten des Tripels gehenden Ebenenpaaren, von denen eines reell ist und symmetrisch zu den anstossenden Tripelebenen — die Träger von Strahlbüscheln, die ihren entsprechenden gleich sind. Das Vorige ist die reelle Ausführung dieser Bestimmung.

Man kann wegen der Erhaltung der Winkel, die an ihnen liegen, die Scheitelpunkte der Büschel, denen gleiche Büschel in der ebenen Collinearfigur entsprechen, als Focalpunkte der collinearen Systeme bezeichnen und wird dann die

Scheitelkanten der gleichen entsprechenden Ebenenbüschel in den collinearen Bündeln etwa Focalstrahlen derselben nennen. Alle Kegelschnitte, welche die zwei Focalpunkte des Originalsystems zu Brennpunkten haben, gehen über in confocale Kegelschnitte des Bildsystems mit den Focalpunkten desselben als Brennpunkten; und Kegelschnitte, die einen der Focalpunkte zum Brennpunkt haben, verwandeln sich in Kegelschnitte mit dem entsprechenden Focalpunkt als Brennpunkt. Im ersten Fall entspringen aus den Normalen des einen Kegelschnittes die Normalen des andern etc.; die Excentricitäten entsprechender Kegelschnitte haben reciproke Werthe etc. Das Kreisbüschel, welches die Focalpunkte ihres Systems zu Grenzpunkten und daher die Gegenaxe zur Radicalaxe hat, geht über in das Kreisbüschel mit den Focalpunkten des andern Systems als Grenzpunkten und ihrer Gegenaxe als Radicalaxe.

Dann wird man auch die Geraden der gleichen entsprechenden Reihen als cyklische Linien der collinearen Ebenen bezeichnen.

In der Benennung Focalstrahlen für die Strahlen mit gleichen entsprechenden Ebenenbüscheln ist die Analogie metrischer Eigenschaften der collinearen Bündel ebenso ausgeprägt, wie in der der Ebenen mit gleichen entsprechenden Strahlbüscheln als Paare der cyklischen Ebenen derselben. Schneidet man die Bündel mit Kugelflächen aus ihren Scheiteln als Mittelpunkten, so entstehen auf denselben sphärische Figuren, deren Seiten und Winkel die Linien- und Flächenwinkel zwischen den Elementen des Bündels messen, und man kann von den Focalpunkten derselben als den Durchschnittspunkten mit den Focalstrahlen und von ihren cyklischen Bögen als den Schnittkreisen mit den cyklischen Ebenen sprechen. Dann entsprechen den sphärischen Kegelschnitten (vergl. I, Ueberblick zu B. und weiterhin § 76) des Originalsystems mit den Focalpunkten desselben als Brennpunkten die sphärischen Kegelschnitte des Bildsystems mit seinen Focalpunkten als Brennpunkten, etc. und analog mit den cyklischen Bögen.

Der Kegel der absoluten Richtungen im Bündel C sei K_i, der aus C' ebenso $K_i^{*'}$; der entsprechende des ersten im gestrichenen Bündel K_i' und der des zweiten im ungestrichenen K_i^*. Dann sind die Axen der Kegel K_i^* und K_i' die Kanten der ent-

sprechenden Rechtwinkeltripel im ungestrichenen und im gestrichenen System. Die vier imaginären gemeinsamen Geraden und Tangentialebenen von K_i und K_i^* entsprechen denen von K_i' und $K_i^{*\prime}$, also den zwei reellen Verbindungsebenen und Schnittgeraden der einen die der andern oder den zwei reellen cyklischen Ebenen und Focalstrahlen von K_i^* die zwei reellen cyklischen Ebenen und Focalstrahlen von K_i'. Man bemerkt im Rückblick auf das Frühere, dass für die betrachteten imaginären Kegel zweiten Grades im Unterschied von den reellen (vergl. weiterhin § 76) die Focalstrahlen in derjenigen Hauptebene liegen müssen, zu der die cyklischen Ebenen senkrecht sind. Natürlich haben wir auf die Theorie der Kegel zweiten Grades noch zurückzukommen.

1) Wenn der Anfangspunkt Cartesisch-Plücker'scher Coordinaten als Scheitel der Bündel betrachtet wird, sodass der Ebene von den Coordinaten ξ, η, ζ die Ebene ξ', η', ζ' entspricht, so bedingt die Collineation beider Bündel die lineare Substitution

$$m\xi' = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta, \quad m\eta' = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\zeta,$$
$$m\zeta' = \alpha_{31}\xi + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\zeta.$$

Man kann die Entwickelungen des Textes algebraisch verfolgen mit Benutzung von § 74.

2) Man erläutere den besonderen Fall der involutorischen Vereinigung der Bündel näher.

3) Wenn zwei vereinigte collineare Bündel (oder Ebenen) durch das Hauptdreikant (§ 69, 3) und ein Paar entsprechender Strahlen y_i, y_i' bestimmt sind, so erhält man unter Festhaltung des ersteren und von y_i bei Bewegung von y_i' durch ein Strahlbüschel $(y_i' + \lambda z_i')$ ein einfach unendliches lineares System oder ein Büschel von Collineationen. Jeder Ebene entspricht ein Büschel von solchen und die für zwei Ebenen erhaltenen Büschel sind projectivisch. Unter den Collineationen eines Büschels sind drei singuläre, der Lage des Elements λ in einem der Hauptelemente entsprechend. Die singulären Collineationen entsprechen dem Verschwinden der Substitutionsdeterminante.

4) In einem Strahlenbündel giebt es drei Strahlen und ihre Verbindungsebenen, welche durch ihre entsprechenden Punkte und ihre Verbindungsgeraden in einer zu ihm projectivisch collinearen Ebene gehen.

5) Zwei projectivisch collineare Bündel von verschiedenen Scheiteln besitzen drei Paare entsprechender Strahlen, die sich auf einer gegebenen Ebene schneiden. Man construiert sie als die Doppelelemente der collinearen Systeme ihrer Schnitte in dieser.

72. Wenn zwei reciproke Gebilde zweiter Stufe ineinander liegen, und wenn das eine der Ebene, das andere einem Strahlenbündel angehört (also für Strahlenebene und Strahlenbündel, resp. Punktebene und Ebenenbündel), so kann von einer Verbindung ihrer entsprechenden Elemente nicht anders als in der Form des Ineinanderliegens die Rede sein. Diess aber findet statt in einfach unendlicher Zahl von Fällen. Wir denken — denn alle andern Fälle lassen sich darauf leicht zurückführen — zwei reciproke ebene Systeme durch vier Punkte A_1, A_2, A_3, E des einen und die entsprechenden Geraden a_1', a_2', a_3', e' des andern gegeben; man construiert dann zum Punkt P die Gerade p', indem man die den Strahlen A_1P, A_2P, A_3P entsprechenden Punkte $a_1'p'$, $a_2'p'$, $a_3'p'$ oder $\mathbf{P}_1'$, etc. nach der Bezeichnung des § 15 ermittelt. Man hat

$$(A_1 . A_2A_3EP) \barwedge (a_1' . a_2'a_3'e'p') \barwedge (A_2A_3E_1P_1)$$
$$\barwedge (A_3'A_2'\mathbf{E}_1'\mathbf{P}_1') \barwedge (A_1' . A_3'A_2'\mathbf{E}_1'\mathbf{P}_1')$$

und kann daher zur Ermittelung von $\mathbf{P}_1'$ sich ebensowohl des Kegelschnittes K_1 aus den Büscheln $(A_1 . A_2A_3EP)$ und $(A_1' . A_3'A_2'\mathbf{E}_1'\mathbf{P}_1')$ bedienen, welcher durch die Punkte A_1; A_1'; A_1A_2, $A_1'A_3'$; A_1A_3, $A_1'A_2'$; A_1E, $A_1'\mathbf{E}_1'$ bestimmt ist und auf dessen Peripherie sich die Geraden A_1P und $A_1'\mathbf{P}_1'$ schneiden; als auch des Kegelschnittes K^1 aus den Reihen $(A_2A_3E_1P_1)$ und $(A_3'A_2'\mathbf{E}_1'\mathbf{P}_1')$, der durch die Tangenten a_1; a_1'; $A_2'A_3'$; A_3A_2'; $E_1\mathbf{E}_1'$ bestimmt ist und für den $P_1\mathbf{P}_1'$ die zweite an ihn gehende Tangente aus P_1 ist. Ebenso liefert ein Paar von Kegelschnitten K_2, K^2 die Ableitung von P_2' oder $a_2'p'$ aus P_2 oder A_2P, und ein drittes K_3, K^3 die von P_3' aus P_3. Aber diese Kegelschnitte führen nicht auf gemeinsame Punkte oder Tangenten, weil bei ihrer Construction der Reciprocität fremde Elemente verwendet worden sind; sie können ersetzt werden durch andere mit einem willkürlichen Element, z. B. bei K_1 kann statt A_1' ein beliebiger Punkt der Ebene als Scheitel des zweiten Büschels genommen werden, ohne die lineare Construction wesentlich zu ändern.

Betrachten wir nun die gerade Punktreihe p' der zweiten Ebene, so entspricht ihr ein mit ihr projectivisches Strahlbüschel P der ersten und es giebt im Allgemeinen zwei Punkte der Reihe $F_{1p'}$ und $F_{2p'}$, welche in ihren entsprechenden Strahlen

f_{1P}, f_{2P} gelegen sind; so für jede Reihe und ihren entsprechenden Punkt, nur mit dem Unterschiede, dass in den einen die ineinanderliegenden entsprechenden Elemente reell und verschieden, in andern vereinigt, in andern nicht reell sein werden.

In Folge dessen müssen die einfach unendlich vielen Punkte der Ebene, die in ihren entsprechenden Geraden liegen, eine Curve zweiter Ordnung K_2 erfüllen und diese Geraden selbst, die Strahlen der Ebene, welche die ihnen entsprechenden Punkte enthalten, eine Curve zweiter Classe K^2 umhüllen; die Punkte der ersten liegen in den entsprechenden Tangenten der zweiten.

Indem wir bemerken, dass ein Punkt O, der als Punkt der ersten Ebene betrachtet in seiner entsprechenden Geraden o' gelegen ist, auch als Punkt P' der zweiten Ebene betrachtet in seiner entsprechenden Geraden p in der ersten liegen muss, (denn aus P' in o' folgt P durch O), erkennen wir auch sofort, dass diese beiden Kegelschnitte einzig der vorgelegten Frage entsprechen, für den Uebergang vom ersten zum zweiten wie für den vom zweiten zum ersten System. Wir wollen den Ort der Punkte, die in ihren entsprechenden Geraden liegen, den Polkegelschnitt K_2 und die Enveloppe dieser Geraden den Polarkegelschnitt K^2 nennen.

Von einem Punkte OP' des Polkegelschnitts aus gehen nach dem Vorigen zwei stets reelle Tangenten des Polarkegelschnitts o', p, welche ihm entsprechen, jenachdem man ihn dem ersten oder zweiten System zuzählt; und einer Tangente des Polarkegelschnitts entspricht ebenso der eine oder der andere ihrer zwei stets reellen Schnittpunkte mit dem Polkegelschnitt, jenachdem wir sie dem ersten oder zweiten System zurechnen. Es ist evident, dass der Polkegelschnitt den Polarkegelschnitt nicht durchschneiden kann, weil es sonst reelle Elemente geben würde, denen nicht wieder reelle Elemente entsprechen könnten. Denken wir einen gemeinsamen Punkt beider Kegelschnitte, so fallen die von ihm an den Polarkegelschnitt gehenden Tangenten in eine einzige zusammen, d. h. es entspricht ihm in beiden System dieselbe durch ihn hindurchgehende Gerade; und da nach der Natur der Reciprocität in Folge dessen auch er in beiden Systemen dieser Geraden entsprechen muss, so kann die betrachtete Tangente des Polar-

kegelschnitts den Polkegelschnitt nicht noch in einem von dem gemeinsamen Punkte beider verschiedenen Punkte schneiden; d. h. Polkegelschnitt und Polarkegelschnitt müssen sich in zwei Punkten X_2 und X_3 berühren; diesen Punkten entsprechen die durch sie gehenden gemeinschaftlichen Tangenten, gleichviel ob man sie zum ersten oder zum zweiten System rechnet; und in Folge dessen entspricht ihrer Verbindungslinie X_2X_3, der Berührungssehne der Kegelschnitte K_2 und K^2, der Schnittpunkt dieser Tangenten X_1 in derselben Weise. Diese drei Punkte und drei Geraden sind die einzigen Elemente der Ebene, welche einander vertauschbar entsprechen, die involutorisch zugeordneten Elementenpaare der Ebene.

Wir können leicht auch aus der analytischen Ausdrucksform der Reciprocität der Gebilde zweiter Stufe die Existenz und Zahl dieser Elemente ableiten. Denken wir beide reciproke Systeme der Ebene auf dieselbe Fundamentalgruppe oder das nämliche Coordinatensystem bezogen, also durch die allgemeine Substitution ausgedrückt. Nach § 62 entspricht dem Punkte y_i die durch

$$x_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3) + x_2(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3) + x_3(\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3) = 0$$

dargestellte Gerade im zweiten und die durch

$$x_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3) + x_2(\alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{32}y_3) + x_3(\alpha_{13}y_1 + \alpha_{23}y_2 + \alpha_{33}y_3) = 0$$

ausgedrückte im ersten System und die Identität beider wird durch die Erfüllung der drei Bedingungen

$$k(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3) = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3,$$
$$k(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3) = \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{32}y_3,$$
$$k(\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3) = \alpha_{13}y_1 + \alpha_{23}y_2 + \alpha_{33}y_3,$$

d. h. für die aus

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}(k-1), & k\alpha_{12} - \alpha_{21}, & k\alpha_{13} - \alpha_{31} \\ k\alpha_{21} - \alpha_{12}, & \alpha_{22}(k-1), & k\alpha_{23} - \alpha_{32} \\ k\alpha_{31} - \alpha_{13}, & k\alpha_{32} - \alpha_{23}, & \alpha_{33}(k-1) \end{vmatrix} = 0$$

entspringenden drei Werthe von k erreicht; indem jeder derselben eine Werthegruppe der y_i liefert, für welche die invo-

lutorische Correspondenz stattfindet. Der stets reellen Wurzel $k_1 = 1$ entpricht der Punkt X_1, der seiner Geraden gegenüber liegt; die beiden andern Wurzeln bestimmen Punkte, die in ihren entsprechenden Geraden liegen. Wenn man aber diese drei Punkte zu den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3 in der Weise wählt, dass A_1 der Pol der Berührungssehne in den beiden Kegelschnitten, oder der nicht in der ihm entsprechenden Geraden liegende der drei Punkte ist, so entsprechen den Punkten $(h_1, 0, 0)$, $(0, h_2, 0)$, $(0, 0, h_3)$ die Geraden $(k_1, 0, 0)$, $(0, 0, k_3)$, $(0, k_2, 0)$ und die linearen Substitutionen erhalten wegen der hiernach nöthigen Relationen

$$\alpha_{21} = 0,\ \alpha_{31} = 0,\ \alpha_{12} = 0,\ \alpha_{22} = 0,\ \alpha_{13} = 0,\ \alpha_{33} = 0$$

die Form

$$\mu\xi_1' = \alpha_{11}x_1,\ \mu\xi_2' = \alpha_{23}x_3,\ \mu\xi_3' = \alpha_{32}x_2;$$
$$\varrho\xi_1 = \alpha_{11}x_1',\ \varrho\xi_2 = \alpha_{32}x_3',\ \varrho\xi_3 = \alpha_{23}x_2'.$$

Während für die allgemeine Substitution der Punkt x_i' dann in der entsprechenden Geraden

$$x_1'(\alpha_{11}x_1 + \cdot\cdot) + x_2'(\alpha_{21}x_1 + \cdot\cdot) + x_3'(\alpha_{31}x_1 + \cdot\cdot) = 0$$

liegt, d. h. dem Polkegelschnitt angehört, wenn man hat

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})x_2x_3 + (\alpha_{31} + \alpha_{13})x_3x_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})x_1x_2 = 0,$$

vereinfacht sich diese Gleichung des Polkegelschnittes nun in

$$\alpha_{11}x_1^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})x_2x_3 = 0;$$

d. h. er berührt die Geraden A_1A_2 und A_1A_3 in A_1 und in A_3 respective. Und während allgemein aus den Substitutionsgleichungen

$$\alpha_{1i}x_1' + \alpha_{2i}x_2' + \alpha_{3i}x_3' = \varrho\xi_i'$$

und der Gleichung

$$\xi_1x_1' + \xi_2x_2' + \xi_3x_3' = 0$$

für das Ineinanderliegen von x_i' mit ξ_i die Gleichung des Polarkegelschnitts in der Form entspringt

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \alpha_{31}, & \xi_1 \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{32}, & \xi_2 \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder für $\mathbf{A}_{ik}$ als die Elemente des adjungierten Systems der α_{ik}

$$\mathfrak{A}_{11}\xi_1^2 + \cdots + (\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{32})\xi_2\xi_3 + \cdots = 0,$$

was sich auch direct aus der Benutzung der aufgelösten Substitutionsgleichungen ergiebt, so erhalten wir in unserer vereinfachten Ausdrucksweise seine Gleichung als

$$\alpha_{11}(\alpha_{23} + \alpha_{32})\xi_2\xi_3 + \alpha_{23}\alpha_{32}\xi_1^2 = 0,$$

welches dieselbe Beziehung zum Fundamentaldreieck ausspricht, wie die des Polkegelschnitts und welche in Bestätigung dessen in Punktcoordinaten lautet

$$\alpha_{11}(\alpha_{23} + \alpha_{32})x_1^2 + 4\alpha_{23}\alpha_{32}x_2x_3 = 0.$$

Wir wollen die Untersuchung in dieser analytischen Form fortsetzen und dann erst zur geometrisch construierenden Betrachtung zurückkehren.

Die beiden dem Punkte y_i oder P entsprechenden Geraden

$$\alpha_{11}y_1x_1 + \alpha_{23}y_3x_2 + \alpha_{32}y_2x_3 = 0,$$
$$\alpha_{11}y_1x_1 + \alpha_{32}y_3x_2 + \alpha_{23}y_2x_3 = 0$$

schneiden sich in einem Punkte P^* von den Coordinaten

$$y_1^* : y_2^* : y_3^* = -y_2y_3(\alpha_{23} + \alpha_{32}) : \alpha_{11}y_1y_2 : \alpha_{11}y_1y_3,$$

den wir als den zu P in beiderlei Sinn conjugierten Punkt der Ebene bezeichnen müssen. Die Beziehung zwischen P und P^* ist offenbar eine gegenseitige. Man bemerkt, dass immer

$$y_2^* : y_3^* = y_2 : y_3$$

ist, dass zwei doppeltconjugierte Punkte also immer in einem und demselben Strahl aus A_1 liegen. In Folge dessen wird dieser Punkt A_1 durch die zweimalige Construction des doppelt conjugierten Punktes zu einem gegebenen Punkt gefunden, als Schnitt der Geraden $P_1P_1^*$, $P_2P_2^*$ z. B., und ist somit stets reell. Dabei ist die Gleichung des Strahles PP^*A_1 die Differenz der obigen Gleichungen, indess ihre Summe, die Gleichung des ihm in Bezug auf sie conjugierten harmonischen Strahls

$$2\alpha_{11}y_1x_1 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})(y_2x_3 + y_3x_2) = 0$$

sofort als die Gleichung der Polare von y_i in Bezug auf den Polkegelschnitt erkannt wird.

Die dualistisch entsprechende Entwickelung giebt zu der Geraden p oder η_i die beiden entsprechenden Punkte

$$\alpha_{23}\alpha_{32}\eta_1\xi_1 + \alpha_{11}\alpha_{23}\eta_3\xi_2 + \alpha_{11}\alpha_{32}\eta_2\xi_3 = 0,$$
$$\alpha_{23}\alpha_{32}\eta_1\xi_1 + \alpha_{11}\alpha_{32}\eta_3\xi_2 + \alpha_{11}\alpha_{23}\eta_2\xi_3 = 0,$$

für deren Verbindungsgerade p^* man die Gleichung ihres Schnittpunktes mit A_2A_3 als Differenz der vorigen Gleichungen erhält, während ihre Summe offenbar den Pol von η_i in Bezug auf den Polarkegelschnitt darstellt; die Coordinaten von p^* sind

$$\eta_1^* : \eta_2^* : \eta_3^* = -\alpha_{11}\eta_2\eta_3(\alpha_{23} + \alpha_{32}) : \alpha_{23}\alpha_{32}\eta_1\eta_2 : \alpha_{23}\alpha_{32}\eta_1\eta_3,$$

woraus wieder folgt

$$\eta_2^* : \eta_3^* = \eta_2 : \eta_3,$$

d. h. die zu einer geraden Linie p in beiderlei Sinn oder doppelt conjugierte Gerade p^* begegnet ihr in einem Punkt von A_2A_3, und diese Linie kann somit durch zweimalige Construction der doppelt conjugierten p_1^*, p_2^* zu gegebenen Geraden p_1, p_2 als die Verbindungslinie von (p_1, p_1^*) mit (p_2, p_2^*) stets reell gefunden werden. Wir wollen nachher diese Relationen geometrisch beweisen.

Oder allgemeiner: Setzt man nacheinander die Verhältnisse $\eta_1 : \eta_2$, $\eta_2 : \eta_3$, $\eta_3 : \eta_1$ einer Constanten k gleich, d. h. betrachtet man Gerade durch einen festen Punkt respective in A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 gehend, so erhält man für die Verhältnisse

$$\eta_3^* : \eta_1^*, \quad \eta_2^* : \eta_3^*, \quad \eta_1^* : \eta_2^*$$

die ebenfalls constanten Werthe

$$-\frac{k\alpha_{23}\alpha_{32}}{\alpha_{11}(\alpha_{23}+\alpha_{32})}, \quad k, \quad -\frac{k\alpha_{11}(\alpha_{23}+\alpha_{32})}{\alpha_{23}\alpha_{32}};$$

d. h. die doppelt conjugierten gehen durch feste Punkte in A_1A_3, A_2A_3, A_1A_2 respective, und die auf A_2A_3 fallen mit den gegebenen immer zusammen — wie oben.

Analog für Punkte in festen Geraden durch A_3, A_1, A_2 respective; d. h. für $y_1 : y_2$, $y_2 : y_3$, $y_3 : y_1$ gleich einer Constanten k nach einander $y_3^* : y_1^*$, $y_2^* : y_3^*$, $y_1^* : y_2^*$ gleich

$$-\frac{k\alpha_{11}}{\alpha_{23}+\alpha_{32}}, \quad k, \quad -\frac{k(\alpha_{23}+\alpha_{32})}{\alpha_{11}},$$

oder die doppelt conjugierten solcher Punkte liegen in festen Geraden aus A_2, A_1, A_3 respective, und die aus A_1 insbesondere fallen mit den gegebenen immer zusammen.

Allgemein aber entsprechen den Punkten einer Geraden

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

die Punkte eines Kegelschnittes von der Gleichung

$$- \xi_1(\alpha_{23} + \alpha_{32}) x_2 x_3 + \xi_2 \alpha_{11} x_1 x_2 + \xi_3 \alpha_{11} x_1 x_3 = 0,$$

der durch die drei Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 geht und in ihnen die respectiven leicht construirbaren Tangenten hat

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0, \quad - \xi_1(\alpha_{23} + \alpha_{32}) x_3 + \xi_2 \alpha_{11} x_1 = 0,$$
$$\xi_3 \alpha_{11} x_1 - \xi_1(\alpha_{23} + \alpha_{32}) x_2 = 0.$$

Die Verbindung mit der Gleichung des Polkegelschnittes zeigt sofort, dass beide sich auf der Geraden ξ_i ausser in $x_1 = 0$ durchschneiden. Der Kegelschnitt aus ξ_i zerfällt nur, wenn die Gerade ξ_i durch einen von den ihren Geraden involutorisch entsprechenden Punkten geht.

Einem Kegelschnitt entspricht ebenso eine Curve vierter Ordnung, man zeigt leicht mit drei Doppelpunkten, aber dem Polkegelschnitt er selbst und den Kegelschnitten durch die Fundamentalpunkte gerade Linien; ebenso dualistisch entsprechend, und insbesondere dem Polarkegelschnitt er selbst. Und zwar beide so, dass die Punkte respective Tangenten sich selbst doppelt conjugiert sind; z. B. dem Punkte des Polkegelschnitts (§ 42)

$$x_1 : x_2 : x_3 = k(\alpha_{23} + \alpha_{32}) : (\alpha_{23} + \alpha_{32}) : - k^2 \alpha_{11}$$

derselbe Punkt

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* = k(\alpha_{23} + \alpha_{32}) : (\alpha_{23} + \alpha_{32}) : - k_2 \alpha_{11}.$$

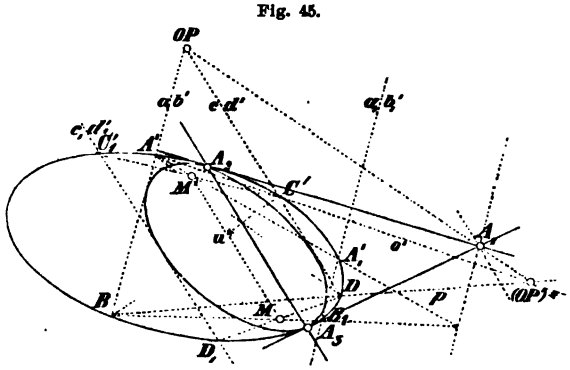
Wir kehren zur Construction zurück. Ist A_1 und a_1 das sich involutorisch entsprechende nothwendig reelle Elementenpaar, so wird der Reihe der Punkte OP' auf einer durch A_1 gehenden Geraden ein Paar ihr projectivischer Strahlbüschel aus Punkten von a_1 entsprechen, deren Schnitte mit ihr zu ihr selbst involutorisch und die unter einander perspectivisch sind, weil dem Punkte A_1 in beiden der Strahl a_1 entspricht; ihre perspectivische Axe muss daher die Gerade von A_1 nach OP' sein. Und ebenso dualistisch entsprechend.

Nach der hierauf gegründeten Construction von A_1 und a_1 wird man zu drei Punkten in a_1 ihre entsprechenden Strahlen durch A_1 aus den Daten der Reciprocität erhalten haben und die Doppelelemente der in a_1 und A_1 dadurch bestimmten Projectivitäten sind die Punkte A_2, A_3 und respective die Strahlen

A_1A_2, A_1A_3; mit ihnen sind Pol- und Polarkegelschnitt zugleich reell und nicht reell. Die Doppelpunkte in einem Strahl durch A_1 bestimmen jenen, die Doppelstrahlen aus einem Punkt auf a_1 diesen.

Im Fall ihrer Realität bietet sich dann für die einem beliebigen ausserhalb des Polarkegelschnitts liegenden Punkt OP' entsprechenden Geraden op' folgende Construction dar: Man zieht die Tangenten aus OP' an den Polarkegelschnitt und bezeichnet die eine von ihnen als ab', die andere als cd' — immer als dem ersten oder zweiten System angehörig; dann

Fig. 45.



sind (Fig. 45) A', B die der erstern und C', D die der letztern im jedesmaligen andern System entsprechenden Punkte und es müssen sich nach § 43, 1 die Geraden $A'D$, BC' in A_2A_3 durchschneiden; die dem Punkte O oder a, c entsprechende Gerade $A'C'$ oder o' und die dem P' entsprechende Gerade BD oder p schneiden sich im doppeltconjugierten Punkte (OP') oder $o'p$ und die Verbindungslinie von OP' mit $o'p$ muss auch nach § 43 durch A_1 gehen. Wir wollen insbesondere bemerken, dass wenn die Punkte $C'D$ von $A'B$ durch die Berührungspunkte A_2A_3 getrennt sind, der Sinn ihrer Aufeinanderfolge $A'C'$, BD in der Punktreihe des Polkegelschnitts umgekehrt ist $(A'C'DB)$ in Folge des Durchgangs durch die Doppelpunkte natürlich. Ebenso dualistisch entsprechend für eine Gerade op', die den Polkegelschnitt reell trifft in Punkten AB', CD', von denen an den Polarkegelschnitt die Tangentenpaare $a'b$, $c'd$ als entsprechende Gerade gehen, sodass die Punkte $a'd$, bc' mit

A_1 in einer Geraden liegen; und man erhält die Punkte O', P als die Punkte $a'c'$, bd respective; dazu gehen op' und $O'P$ durch denselben Punkt von A_2A_3. Durch Wiederholung des ersten Verfahrens für zwei Punkte construiert man hiernach auch die Punkte, welche einer den Polkegelschnitt nicht reell schneidenden Geraden entsprechen; durch Wiederholung des zweiten für zwei Geraden die Strahlen, welche einem Punkt im Innern des Polarkegelschnitts entsprechen.

Von den reciproken Bündeln erwähnen wir das Wesentliche unter den Beispielen.

1) Man construiere die der unendlich fernen Geraden der Ebene im ersten und zweiten System entsprechenden Punkte M, M'. Wenn der Polkegelschnitt eine Ellipse ist, so erhält man sie durch Anwendung des ersten Verfahrens auf zwei unendlich ferne Punkte — so in der Figur für die Punkte in den Paaren von Parallelen ab', a_1b_1'; cd', c_1d_1' — im Fall der Hyperbel durch die Anwendung des zweiten. Die gerade Linie MM' oder u^* als die der unendlich fernen Geraden doppelt conjugierte muss parallel A_2A_3 werden. Natürlich können diese Punkte stets ohne Vermittelung der beiden Kegelschnitte aus vier gegebenen Paaren entsprechender Elemente der reciproken Systeme bestimmt werden. Man erhält auch dann zu zwei Richtungen ST', UV' die entsprechenden Strahlen s', t; u', v, nämlich t, v durch M, s' und u' durch M'.

Den Reihen durch den Punkt M (resp. M') entsprechen Parallelenbüschel im gestrichenen (resp. ungestrichenen) System. Die unendlich ferne Lage von M bedingt auch die von M'. Die Art des Kegelschnittes, der einem gegebenen entspricht, hängt ab von der Lage des ersten zu dem Punkt M (M') seines Systems.

2) Fügt man für eine dritte Richtung WX' die Strahlen wie w', x hinzu, so hat man die projectivischen Büschel an M, M' durch die Gruppen von Strahlen t, v, x und s', u', w' bestimmt; ihre parallelen entsprechenden Strahlen gehen den Asymptoten des Polkegelschnitts parallel.

3) Man zeige durch die Construction mittelst Pol- und Polarkegelschnitt, dass für Punkte auf A_2A_3 die entsprechenden Geraden durch A_1 gehen und umgekehrt.

4) Wenn der Polkegelschnitt mit dem Polarkegelschnitt identisch gedacht wird, so verwandeln sich die Constructionen des Textes für den Uebergang von einem Punkt zu der ihm entsprechenden Geraden und umgekehrt in die Constructionen, durch welche man die Polare eines Punktes und den Pol einer Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt findet. Dann entspricht einem Punkt in beiderlei Sinn eine und dieselbe Gerade und umgekehrt. Man hat statt der Reciprocität in allgemeiner Lage die Polarreciprocität in

Bezug auf einen Kegelschnitt oder mit durchaus involutorischem Entsprechen. Alle Punkte der Ebene sind Punkte A_1, die des Kegelschnitts speciell Punkte A_2, A_3. Einem Element entsprechen alle Elemente eines Gebildes erster Stufe als doppelt conjugiert. (Vergl. II, § 39, 17 f.)

5) Nach den Entwickelungen des Textes erhält man aus jedem Punkte als den vierten harmonischen Strahl zu seiner Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte der beiden entsprechenden Geraden in Bezug auf diese seine Polare in Bezug auf den Polkegelschnitt; und zu jeder Geraden als den vierten harmonischen Punkt zu ihrem Schnittpunkte mit der Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte in Bezug auf diese ihren Pol in Bezug auf den Polarkegelschnitt. Man gelangt so auf doppelte Weise von der allgemeinen Reciprocität zu einer involutorischen, welcher der Pol- respective Polarkegelschnitt als Directrixkegelschnitte zugehören. Die Punkte A_1, A_2, A_3 haben in beiden dieselben entsprechenden Geraden A_2A_3, A_2A_1, A_3A_1.

6) Wenn zwei projectivische Gebilde erster Stufe ineinander liegen, so erhält man eine Involution, welche mit ihnen die Doppelelemente gemein hat, in folgender Weise: Man bestimmt zu einem Elemente X des Gebildes die beiden ihm im ersten und zweiten Gebilde entsprechenden Elemente und das zu ihm conjugiert harmonische X_1 in Bezug auf diese; dann bilden die Elemente X, X_1 ein Paar der fraglichen Involution.

7) Wenn zwei concentrische reciproke Bündel durch vier Paare entsprechender Elemente gegeben sind, so führt man ihre construierende Behandlung durch Angabe der Schnitte mit einer Ebene, die den Scheitel nicht enthält und in der derselbe also durch seinen Distanzkreis fixirt wird, auf die der vereinigten reciproken Ebenen zurück. Man erhält als Ort der Strahlen, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, den Polarenkegel K_2 und als Enveloppe dieser Ebenen den Polarebenenkegel K^2 des Systems; man erkennt, dass beide in doppelter Berührung sind und dass die Ebene der beiden Berührungserzeugenden sowie die Polare derselben in den Kegeln durch lineare Construction direct gefunden werden; endlich auch, dass man mit dieser Construction zugleich die Polarsysteme dieser beiden Kegel bestimmen kann. Aber wir haben Einiges hinzuzufügen, was die metrischen Besonderheiten der Bündel betrifft. (Vergl. § 71.)

Wenn dem Strahle a die Ebene $\mathbf{A}'$ und der Ebene $\mathbf{B}$ der Strahl b' reciprok entspricht, so beschreiben a und der Normalstrahl $a^{*'}$ der Ebene $\mathbf{A}'$ im gestrichenen Bündel zwei collineare Bündel und die metrischen Elemente derselben führen zu denen der Reciprocität. Die drei Strahlenpaare der Rechtwinkeltripel n, q, r und $n^{*'}, q^{*'}, r^{*'}$ liefern durch die Normalebenen der letzteren, d. h. die Ebenen $q^{*'}r^{*'}$, $r^{*'}n^{*'}$, $n^{*'}q^{*'}$ das einzige Tripel recht-

winkliger Ebenen im gestrichenen Bündel, welchem ein Tripel auch rechtwinkliger Strahlen im ungestrichenen entspricht; und dem Tripel ihrer Schnittlinien entspricht im ungestrichenen Bündel das gleichfalls rechtwinklige der bezüglichen Verbindungsebenen. Man nennt diese entsprechenden Rechtwinkeltripel die Axen und die Hauptebenen der reciproken Bündel; sie sind stets reell. (Vergl. § 74.) Auch entspringen aus den Paaren der gleichen entsprechenden Strahlenbüschel und Ebenenbüschel der collinearen Bündel a und a^* Strahlenbüschel und Ebenenbüschel des gestrichenen Bündels, die mit ihren entsprechenden im ungestrichenen gleichwinklig sind. Man sieht, dass die Betrachtungen des absoluten Kegels und seines entsprechenden aus § 71 auch hier in Wirksamkeit sind.

73. Pol- und Polarkegelschnitt werden nach ihren speciellen Gleichungen identisch (§ 72, 4) für $(\alpha_{23}+\alpha_{32})^2 = 4\alpha_{23}\alpha_{32}$, d. h. für $\alpha_{23} = \alpha_{32}$. Die allgemeinen Gleichungen erfordern für dieselbe Identität $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$; denn dann ist die Gleichung des Polarkegelschnitts in ihrer Determinantenform offenbar nichts anderes als die Gleichung des Polkegelschnitts in ξ-Coordinaten. (§ 49.)

Dieselben drei Bedingungen machen die Werthe der ξ_i' und die der ξ_i in den allgemeinen Substitutionsgleichungen der Reciprocität in § 62, p. 410

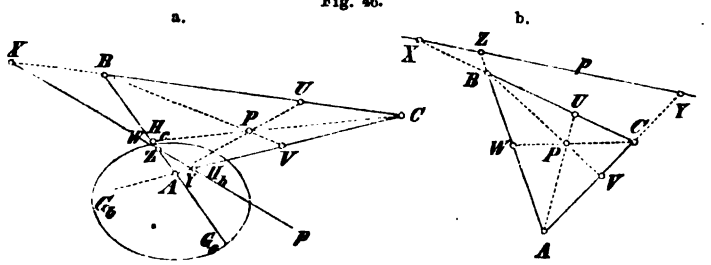
$$m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \cdots,$$
$$r\xi_k = \alpha_{1k}x_1' + \cdots$$

identisch, so dass jedem Punkt, gleichviel ob er dem ersten oder dem zweiten der ebenen Systeme zugezählt wird, die nämliche Gerade entspricht; d. h. die involutorische Correspondenz, welche im Allgemeinen nur zwischen drei ausgezeichneten Elementenpaaren besteht, findet dann für alle Elementenpaare statt: Die Reciprocität der beiden Systeme ist involutorisch. Nach den Constructionen des vorigen Paragraphen fordert diess die Identät von Pol- und Polarkegelschnitt. Entsprechende Elemente sind Pol und Polare in Bezug auf diesen, den man den Directrixkegelschnitt oder die Directrix nennt. Sie bilden dreifach unendlich viele Tripel harmonischer Pole und Polaren — wir wollen kürzer sagen Polardreiecke — d. h. Dreiecke, in denen jede Ecke der Gegenseite entspricht und umgekehrt. Wir beweisen den Satz: Wenn in zwei vereinigten reciproken Ebenen ein Polardreieck

existirt, so entsprechen alle ihre Elementenpaare einander vertauschbar und sie sind in involutorischer Lage. Man sagt, sie bilden ein Polarsystem.

Sei ABC ein Polardreieck und der Punkt P mit der Geraden p ein ausserdem bekanntes Elementenpaar, nämlich P der der Geraden p des ersten Systems entsprechende Punkt im zweiten. Dann entspricht derselbe Punkt als Punkt des ersten Systems derselben Geraden als im zweiten. Denn für X, Y, Z als die Schnitte von p mit den Geraden BC, CA, AB und U, V, W als die Schnitte derselben Dreiecksseiten mit den Geraden AP, BP, CP respective, ist z. B. die Reihe $(BCXU)$ im ersten System dem Büschel $(A.CBUX)$ im zweiten projectivisch, d. h. auch projectivisch zur Reihe $(BCXU)$ oder das U im ersten und im zweiten System können nicht von einander verschieden sein; ebenso V und W, also der Punkt P. Es erhellt damit auch — wir führen es aber weitherhin noch näher aus — dass diese Elemente (in der That vier Paare) wie für reciproke Ebenen nöthig, das Polarsystem bestimmen, d. h. zu jedem andern Punkte X die entsprechende Gerade x und zu jeder andern Geraden y den entsprechenden Punkt Y zu construieren gestatten.

Fig. 46.



In Folge dessen können zwei reciproke Ebenen immer durch blosse Lagenveränderung der einen von ihnen in die involutorische Lage gebracht werden, oder die Polarreciprocität ist von der allgemeinen nicht wesentlich sondern nur der Lage nach verschieden.

Denn es giebt eine Gerade in der Ebene, die unendlich ferne, welche durch keine ausführbare Lagenveränderung derselben geändert wird und durch Vereinigung ihrer entsprechenden Punkte M, M' (§ 72, 1) in beiden Systemen hat man zu-

nächst ein festes Elementenpaar von vertauschbarem Entsprechen für alle Drehungen des einen Systems um diesen Punkt erhalten. Für jeden Strahl a aus diesem Punkt erhält man als seiner Richtung a_∞ entsprechend einen andern Strahl a' derselben, so dass die beiden so entstehenden Büschel projectivisch sind; wären dieselben involutorisch, so entspräche nicht nur a' der Richtung von a, sondern auch a der Richtung von a' und diese Richtungen würden mit dem Scheitel MM' ein unendlich grosses Dreieck bilden, in welchem jeder Ecke die Verbindungsgerade der beiden andern vertauschbar entspricht, also ein Polardreieck; da diess aber für jedes solches Paar wie a, a' gültig bleibt, so hätte man einfach unendlich viele Polardreiecke mit gemeinsamer Ecke MM' und der unendlich fernen Geraden als gemeinsamer Gegenseite erhalten. Man kann aber jene Büschel an MM', von denen das eine über den Richtungen der Ebene steht und das andere von den entsprechenden Geraden des andern Systems gebildet wird, stets in zwei Arten involutorisch machen; nämlich durch verkehrte Vereinigung ihrer entsprechenden Rechtwinkelpaare (I, § 20, 10); also einerseits durch einfache Drehung der Ebene des gestrichenen Systems um MM', andererseits durch Drehung derselben nach vorhergegangener Umwendung im Raume, wobei im einen Falle die entstehende Involution reelle und im andern Falle nicht reelle Doppelstrahlen hat. Man hat durch diese Operation (vergl. p. 509 f) bewirkt, dass den bei Verschiebungen und Drehungen der Ebene unverändert bleibenden Kreispunkten im Unendlichen je eine und dieselbe Gerade im ersten und im zweiten System entspricht; damit aber ist das involutorische Entsprechen aller andern Richtungen der Ebene mit den durch den Punkt M gehenden entsprechenden Strahlen bedingt. Pol- und Polarkegelschnitt fallen nun in den Directrixkegelschnitt zusammen, der den Punkt MM' zum Mittelpunkt hat; die verkehrt vereinigten Rechtwinkelstrahlen bilden die Axen, die reellen oder imaginären Doppelstrahlen der Involution die Asymptoten desselben; die Involution selbst ist mit der Involution seiner conjugierten Durchmesser identisch. Man kann in Folge dessen die Benennungen des speciellen Falles der Polarreciprocität mit Recht auf den allgemeinen Fall übertragen. Man wird M, M' die Mittelpunkte der beiden reciproken

Systeme, die Strahlbüschel aus ihnen die Durchmesserbüschel derselben nennen, wird dem Büschel nach den Richtungen der Ebene im einen System die entsprechenden Durchmesser im andern conjugiert sein lassen und von den entsprechenden Rechtwinkelpaaren der beiden als von den Axen der Systeme reden.

Man sieht leicht, dass diese Operation von denselben reciproken Ebenen zu vier verschiedenen Polarsystemen führt; denn ist M (Fig. 47) der Mittelpunkt und sind die durch ihn gehenden zu einander rechtwinkligen Geraden x und y die Axen desselben, sowie ein nicht in ihnen enthaltener Punkt P und die ihm entsprechende Gerade p in der ersten Zusammensetzung a), so geht unter Festhaltung des Punktes P durch die zu x orthogonal-symmetrische Lage von p die zweite b), durch die zu y orthogonal-symmetrische die dritte in c) und aus dieser wieder symmetrisch zu x oder aus jener zu y die vierte in d) hervor.

Die Construction des Polarsystems aus diesen Daten ist sehr einfach (Fig. 47). Man verbindet P mit den Ecken des Polardreiecks $Mx_\infty y_\infty$ durch Gerade und schneidet seine Seiten mit p und mit jenen Geraden; dann sind die auf den Seiten des Polardreiecks entstandenen Punktepaare M, x_∞; X, X_1; ferner M, y_∞; Y, Y_1 und x_∞, y_∞; $(MP)_\infty, p_\infty$ und ebenso die zu ihnen perspectivischen von den Ecken ausgehenden Strahlenpaare $x_\infty . M, \infty$; X, X_1 etc. die bestimmenden Paare von Involutionen, in denen jedes neue Paar von Elementen des Polarsystems in derselben Weise je ein neues Paar liefern wird. Ist also P^* ein gegebener Punkt und sind z. B. X^*, Y^* die Schnittpunkte der Axen mit den durch ihn gehenden Axenparallelen, so findet man die Schnittpunkte der ihm entsprechenden Geraden p^* mit denselben Axen als die entsprechenden Punkte X_1^*, Y_1^* der Involutionen in x, y zu X^*, Y^* resp.; und überdiess die Richtung der Graden p^* als diejenige des Strahles in der Involution von M, welcher dem Strahl MP^* entspricht. Natürlich kann alles das durch die Linealconstruction der Involution geschehen z. B. wie in Fig. 47 a), wo man als die durch x_∞, X und X^* gezogenen Geraden die Parallelen durch P^* zu x und durch X, X^* zu y benutzt hat und wieder für y_∞, Y, Y^* die Parallelen durch P^* zu y und durch Y, Y^* zu x; für die Bestim-

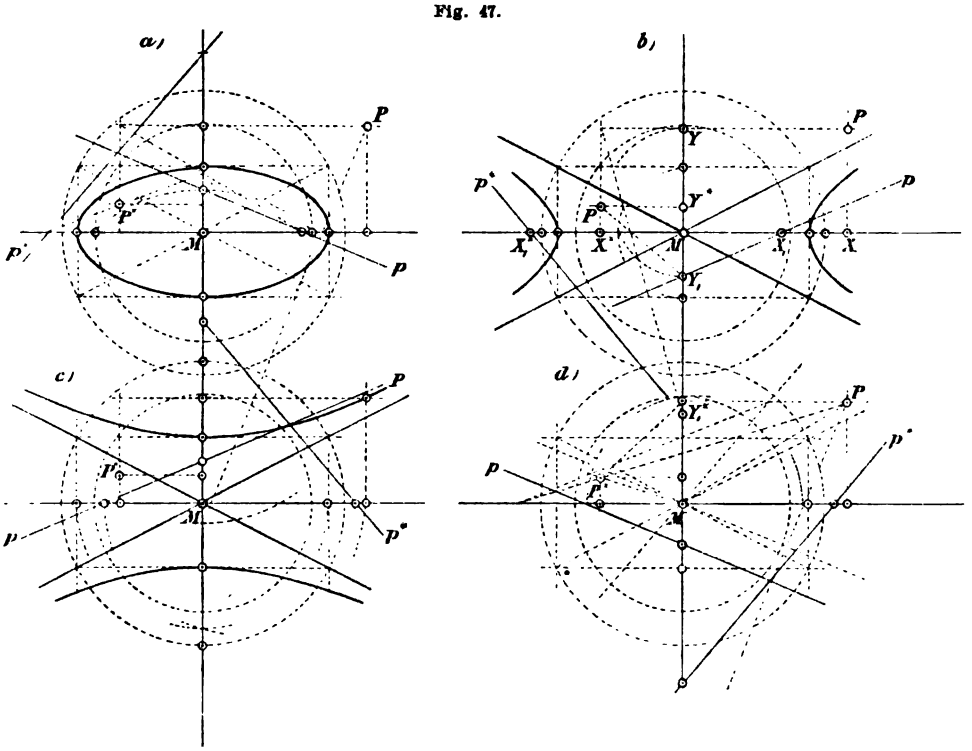
mung des Parallelstrahls zu p^* aber das Dreieck PP^*X, dessen Ecken in Strahlen der drei Paare der zugehörigen Involution liegen. Die Verwendung des Kreises hierfür, etwa eines die Axen berührenden Kreises, ist in der Regel nicht von Vortheil. Aber man bestimmt mittelst desselben die Doppelpunkte der Involutionen in den Axen oder die Scheitel nebst den Scheiteltangenten der Directrix; dazu mittelst eines Hülfskreises durch M die Doppelstrahlen oder das symmetrische Paar in der Involution seiner conjugierten Durchmesser um M, je nachdem der Hülfskegelschnitt eine Hyperbel oder eine Ellipse ist.

Wir betrachten dies näher zunächst für die vier Polarsysteme der Figuren a, b, c, d, die aus der involutorischen Vereinigung derselben reciproken Ebenen entstanden sind. In dem bei a) skizzierten Falle sind die Involutionen auf den Axen x und y hyperbolisch und ihre Doppelpunkte reell; dagegen ist die Involution der conjugierten Durchmesser elliptisch und ihr symmetrisches Paar, das Paar gleichlanger conjugierter Durchmesser der Directrixellipse, ist reell; sie liegen in den Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten. Die Potenz der Involution auf x ist $MX \,.\, MX_1$ und ihre Wurzel giebt die Länge der Halbaxen in x; die Potenz der Involution auf y ist $MY \,.\, MY_1$ und hat die Halbaxenlängen auf y zu Wurzeln.

Im Fall b) ist die Involution auf x hyperbolisch und da ihr Potenzwerth $MX \,.\, MX_1$ derselbe ist wie vorher, so sind die Doppelpunkte auf x dieselben; die Involution auf y ist elliptisch, ihr Potenzwerth ist $-MY \,.\, MY_1$, oder unterscheidet sich von dem des vorigen Falles nur durch das Zeichen, im Abstand gleich der Quadratwurzel aus ihrem absoluten Werth liegen die Punkte des symmetrischen Paares. Die Durchmesserinvolution hat reelle Doppelstrahlen, die Asymptoten der Directrixhyperbel, die mit den Diagonalen des Rechtecks aus den Scheiteltangenten und den Hauptaxenparallelen durch das symmetrische Paar in der Nebenaxe zusammenfallen. Im Fall c) ist die Involution auf x elliptisch und liefert bei dem entgegengesetzt gleichen Potenzwerth $-MX \,.\, MX_1$ das symmetrische Paar in denselben Punkten, die in den Fällen a) und b) die Scheitel waren; die Involution auf y ist hyperbolisch und die reellen Scheitel fallen wieder auf dieselben Punkte von

y wie bei a); die Durchmesserinvolution der Directrixhyperbel hat die Diagonalen desselben Rechtecks wie vorher zu Doppelstrahlen. Bezeichnet man mit k_x^2 und k_y^2 die numerischen Werthe der Potenzen in den Axen x und y, so ist die

Fig. 47.



Directrixellipse des ersten Falles nach I, § 33, 9 ausgedrückt durch

$$\frac{x^2}{k_x^2} + \frac{y^2}{k_y^2} = 1;$$

während die Directrixhyperbeln der Fälle b) und c) dargestellt werden durch

$$\pm\frac{x^2}{k_x^2} \mp \frac{y^2}{k_y^2} = 1.$$

Betrachten wir endlich den Fall d), so zeigt derselbe auf beiden Axen sowohl als am Mittelpunkt elliptische Involutionen; die Scheitel sowohl als die Asymptoten sind durch die symmetrischen Paare ersetzt, die der letzteren aber immer die Diago-

nalen des Rechtecks, das man mit den ersten bildet. Die Gleichung der Directrix ist

$$-\frac{x^2}{k_x^2}-\frac{y^2}{k_y^2}=1.$$

Wir bezeichnen dieselbe als imaginäre Ellipse, weil sie reelle Punkte und Tangenten nicht enthält; sie wird als die conjugierte der reellen Ellipse in a) ebenso benannt, wie die beiden Hyperbeln der Fälle b) und c) als conjugiert zu einander bezeichnet werden.

Mit Rücksicht auf die Directrixen kann man nun die vorher besprochene Construction der einem Punkt entsprechenden Geraden oder der Polare und des einer Geraden entsprechenden Punktes oder des Pols dahin aussprechen, dass man im ersten Fall die Pole der durch den Punkt gehenden Axenparallelen und im zweiten die Polaren der der Geraden angehörenden Axenpunkte bestimmt; dort ist die Verbindungslinie derselben die gesuchte Gerade, hier der Schnittpunkt der gesuchte Pol. Die Polaren von Punkten einer Axe sind Normalen zu ihr, die Polaren der Punkte eines Durchmessers parallel dem conjugierten, und durch den Fusspunkt in jener resp. jenem allein bestimmt; und diese Punkte sind entsprechende in der Involution des Durchmessers. Haben wir nun zwei Involutionen mit demselben Mittelpunkt und entgegensetzt gleichen Potenzwerthen, so entsprechen demselben Punkt zwei vom Mittelpunkt gleichweit entfernte Punkte der Reihe und wir gelangen somit zu dem Ergebniss, dass die Polaren desselben Punktes im Fall a) und im Fall d) einander parallel und äquidistant vom Mittelpunkt sind und dass diess ebenso mit den Polaren desselben Punktes in den Fällen b) und c) ist; oder die Polaren desselben Punktes in Bezug auf zwei (concentrische coaxiale und) conjugierte Kegelschnitte sind parallel und äquidistant vom Mittelpunkt. In der Vereinigung aller Fälle mit denselben Axen bilden die vier Polaren desselben Punktes einen Rhombus mit den Axen als Diagonalen.

Wenn das Polarsystem wie in Fig. 46 durch ein Polardreieck ABC im Endlichen und ein Paar P, p allgemein bestimmt ist, so bleibt die Construction entsprechender Elemente wie die Bestimmung der Directrix im Wesentlichen dieselbe; nur haben wir in den Involutionen auf den Seiten des Drei-

ecks zwei beliebige Paare an Stelle des Mittelpunktes und eines Paares. Wäre in Fig. 46 b) ein Punkt P^* gegeben, so findet man den zum Strahl CP^* entsprechenden Punkt der Polare p^* auf AB z. B., indem man den Schnittpunkt von p mit CP^* mit A durch eine Gerade verbindet und von dem Schnittpunkt derselben mit CP nach X zieht; diese Gerade markiert auf AB den gesuchten Punkt.

Weiter wird man die Doppelpunkte der Involutionen auf den Seiten des Polardreiecks, sagen wir G_a, H_a in BC, G_b, H_b in CA und $G_c H_c$ in AB ermitteln, welche zugleich in $G_a A$, $H_a A$; $G_b B$, $H_b B$ und $G_c C$, $H_c G$ die Doppelstrahlen der Involutionen an den Gegenecken liefern; jene sind die Schnittpunkte des Directrixkegelschnittes mit den Seiten und diese sind seine in denselben berührenden Tangenten aus den gegenüberliegenden Ecken des Polardreiecks. Der Fall a) giebt die reelle elliptische Directrix, der Fall b) die imaginäre; in jenem sind auf zwei Seiten des Polardreiecks und an ihren Gegenecken die Involutionen hyperbolisch, in diesem sind sie auf allen drei Seiten elliptisch und man sieht, dass diess immer eintritt, wenn P im Innern des Dreiecks liegt und p die Seiten desselben äusserlich schneidet. Aber man erkennt auch unmittelbar die Wahrheit des Satzes: Jeder reelle Kegelschnitt wird von einem seiner Polardreiecke mit zwei Seiten reell geschnitten und hat von ihren Gegenecken aus reelle Tangenten. (I, § 32, 12.)

Denken wir die Elemente p, P correspondierend bewegt, d. h. so, dass die X, U; Y, V; Z, W immer Paare der Involutionen mit den Doppelelementen G_a, H_a etc. bleiben, so sind dieselben — und ebenso die B, C; C, A; A, B — in allen ihren Lagen conjugierte Punktepaare in Bezug auf den Kegelschnitt der sechs Doppelpunkte, oder p und P sind Polare und Pol in Bezug auf denselben; sein Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden, das Dreieck ist ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf ihn.

Wir sagen, dass das ebene Polarsystem in jedem Fall einen Kegelschnitt definiert und sehen, dass das Vorige die Construction der Polare für jeden Punkt und des Pols für jede Gerade der Ebene in Bezug auf denselben aus seinem Polarsystem, also auch unabhängig von seiner Realität, leistet. (I, § 32, 12.) Die Definition durch das Polarsystem

umfasst also neben den reellen Kegelschnitten auch die imaginären. Diese Definition liefert auch die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit einer Geraden und seine Tangenten aus einem Punkt, indem sie unmittelbar die zu ihm gehörige Involution harmonischer Pole in der Geraden und harmonischer Polaren um den Punkt liefert. Ist p die Gerade und P ihr Pol, so sind die Punktepaare p, AB und p, CP; p, BC und p, AP; p, CA und p, BP drei Paare der Polinvolution in p und ihre Verbindungsgeraden mit P zugleich drei Paare der Polarinvolution um P.

1) Man bestimme die Polarsysteme aus zwei reciproken Ebenen, die durch entsprechende Parallelogramme gegeben sind.

2) Ein Polardreieck und der Mittelpunkt bestimmen das Polarsystem. Man construiere das Polarsystem aus Asymptote, Mittelpunkt und einem Paar P, p. Zwei Dreiecke in perspectivischer Lage bestimmen ein Polarsystem zusammen mit dem Centrum und der Axe ihrer Perspective.

3) Wenn man in einem Polarsystem zu drei beliebigen Punkten P, Q, R die Polaren p, q, r bestimmt, so sind die Dreiecke PQR und pqr zu einander perspectivisch, d. h. die Geraden P, qr; Q, rp; R, pq oder PP', QQ', RR' gehen durch einen Punkt S und die Punkte QR, p; RP, q; PQ, r oder $p'p, q'q, r'r$ liegen in einer Geraden s, der Polare von S im System. Man wird die Figur leicht bilden oder vorstellen.

Denn RR' ist die Polare von p, p' oder 3, QQ' die von q, q' oder 2, ihr Schnitt S also der Pol von 3 2 oder s. Schneide nun s die Strahlen SQ, SR, SP in $2', 3', 1'$ und ist 1 der Schnitt mit QR, so sind aus dem Viereck $PQRS$ die Paare $11', 22', 33'$ Paare einer Involution. Würde dann SP' von s in X geschnitten, so ist nothwendig auch $22', 33', 1X$ eine Involution — conjugierter Paare in s; folglich muss X mit $1'$ identisch sein. Wir geben auch den algebraischen Beweis im folgenden Artikel.

4) Wenn die Potenzen k_x^2 und k_y^2 der Involutionen in den Polarsystemen aus zwei reciproken Ebenen auf ihren Axen gleichen numerischen Werth haben, so werden von jenen Polarsystemen zwei circular und die beiden andern gleichseitig hyperbolisch, jene wie diese conjugiert zu einander; die Directrixen sind durch
$x^2 + y^2 = k^2$, $x^2 - y^2 = k^2$, $-x^2 + y^2 = k^2$, $-x^2 - y^2 = k^2$
ausgedrückt. Die Polaren eines Punktes in diesen vier Systemen bilden einen Rhombus, dessen Ecken in den Axen liegen, während zwei seiner Seiten normal zum Durchmesser des Punktes sind; für Punkte einer Axe zwei doppelt zählende Normalen derselben.

Da für die beiden circularen Polarsysteme die Axen unbestimmt werden, weil ihre Durchmesserinvolutionen rechtwinklige Involutionen sind, so erhält man für das Polarsystem mit reellem Directrix-

kreis **D** die Polare als normal zum Durchmesser des Pols in dem von ihm durch den Kreis harmonisch getrennten Punkt; für das concentrische mit imaginärem Directrixkreis und derselben Potenz als die Normale zum Durchmesser des Pols in dem zum vierten harmonischen von vorhin symmetrischen Punkt desselben. Den vierten harmonischen Punkt des Pols liefert der durch ihn gehende Orthogonalkreis zu **D**, dessen Mittelpunkt in PM liegt; den zu ihm symmetrischen Punkt der durch P gehende Kreis, der **D** in dem zu PM normalen Durchmesser schneidet. Oder für P als Fusspunkt eines projicierenden Strahles in der Projection mit dem Distanzkreis **D** ist die Polare im zugehörigen imaginär circularen Polarsystem die Spur der projicierenden Normalebene desselben. Man erläutere die Verwandschaft der Punkte und Geraden von denselben regulär projectivischen Coordinaten (§§ 16, 1; 18, 6) als imaginär circulares Polarsystem.

5) Eine reelle Ellipse kann als Stellvertreterin der zu ihr conjugierten imaginären dienen; die Polaren gegebener Punkte und die Pole gegebener Geraden in Bezug auf die letzte können aus der ersten construiert werden. Man hat sie bei ihren Anwendungen in der Mechanik Antipolaren und Antipole derselben genannt. Die Polare eines Punktes für eine gegebene Hyperbel ist auch seine Antipolare für die zu ihr conjugierte Hyperbel.

6) Im Fall der Bestimmung aus Axen und Paar (Fig. 47) erhält man die Doppelemente der Involutionen in den Axen, wenn sie hyperbolisch sind, mittelst der Kreise um M, welche die Kreise über den Durchmessern XX_1 resp. YY_1 orthogonal schneiden; und die symmetrischen Paare mittelst der Kreise um M, welche die Kreise über XX_1, YY_1 diametral schneiden.

7) Die Construction entsprechender Elemente und der Directrix eines Polarsystems aus einem Polardreieck ABC und einem Paar P, p kann zweckmässig erfolgen mit Hülfe des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises; die Involutionen $A.BC, UX$; $B.CA, VY$; $C.AB, WZ$ führen zu drei Polen P_A, P_B, P_C in diesem Kreis, mit deren Hülfe man ebenso leicht neue Paare als die Doppelelemente derselben findet. (Fig. 46.)

8) Man untersuche die Besonderheiten reciproker Ebenen, welche zu circularen und daher auch zu gleichseitig hyperbolischen Polarsystemen führen. Ebenso für die parabolischen; wenn dem Parallelogramm $ABCD$ ein Parallelogramm $a'b'c'd'$ entspricht, so dass zugleich ein Seitenpaar AC, BD der ersten einer Diagonale $a'b', c'd'$ der zweiten gleich ist, so sind die Richtung der ersten und die dieser Diagonale die Mittelpunkte M, M' der reciproken Ebenen; die involutorische Lage wird durch Drehung allein herbeigeführt und ist somit auf unendlich viele Arten möglich. Es bleibt die Frage nach dem conjugierten Polarsystem.

9) Jedes Polarsystem besitzt zwei reelle Brennpunkte in der einen und zwei imaginäre Brennpunkte in der andern Axe; zu den

ersten auch zwei reelle Directrixen. Man findet die Brennpunkte nach I, § 36, indem man von einem Punkt auf die entsprechende Gerade die Normale verzeichnet, als die Doppelpunkte der Involutionen vom Centrum M, welche das Schnittpunktepaar X_1, X dieser Geraden und Normale in den Axen enthalten; die zugehörigen Directrixen sind die Normalen dieser Axe in den Punkten, welche den Brennpunkten in der Involution harmonischer Pole entsprechen. Für die imaginäre Ellipse sind die Brennpunkte und Directrixen derjenigen Axe reell, welcher der kleinere Potenzwerth zukommt (bei der reellen diejenigen der Axe mit dem grösseren; bei den Hyperbeln derjenigen mit dem positiven). Wir sehen, dass ein imaginärer Kegelschnitt folgende reelle Elemente hat: Mittelpunkt und Axen, Brennpunkte und Directrixen, conjugierte Durchmesser, insbesondere gleiche. Der imaginäre Hauptkreis oder der Ort der imaginären Scheitel gleichseitiger Polarinvolutionen bei der imaginären Ellipse hat den der conjugierten reellen zum Stellvertreter. Für die Potenzwerthe k_x^2, k_y^2 des Textes erhält man in den Fällen a, b, c, d der Reihe nach die Quadrate der Brennpunktsabstände $k_x^2 - k_y^2$, $k_x^2 + k_y^2$, $-k_x^2 - k_y^2$, $-k_x^2 + k_y^2$ und die Quadrate der Radien der Hauptkreise resp. $k_x^2 + k_y^2$, $k_x^2 - k_y^2$, $-k_x^2 + k_y^2$, $-k_x^2 - k_y^2$; man sieht, wie die Brennpunktsabstände und Hauptkreisradien der vier Kegelschnitte a, b, c, d zusammenhängen. Man erläutere das für die conjugierten Paare a, d; b, c.

10) Nach dem Vorigen wird ein imaginärer Kegelschnitt durch einen reellen vertreten, der auf allen seinen Durchmessern die symmetrischen Paare der zugehörigen Polinvolutionen enthält. Durch Projection kann diese Beziehung zur Ersetzung des imaginären Kegelschnittes durch einen reellen in allgemeinerer Lage erweitert werden. Das Vorige ist die symmetrisch harmonische Darstellung des imaginären Kegelschnittes — um durch diesen Ausdruck an den entsprechenden Vorgang bei der Darstellung des imaginären Punktepaares zu erinnern.

74. Wie am Anfang des vorigen Paragraphen schon bemerkt ist, können die vorigen Betrachtungen leicht algebraisch verfolgt werden. Die Existenz eines Polardreiecks in zwei vereinigten reciproken Ebenen bedingt, dass dieselben involutorisch liegen oder ein Polarsystem bilden — sagten wir. In der That muss, damit das F.-Dreieck der Coordinaten ein Polardreieck ist, die allgemeine lineare Substitution

$$\varrho \xi_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3$$

so specialisiert sein, dass die Punkte und Geraden $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$; $\xi_2' = \xi_3' = 0$, $\xi_3' = \xi_1' = 0$, $\xi_1' = \xi_2' = 0$ einander respective entsprechen, d. h. man hat

$\alpha_{21} = \alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = \alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, oder $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$,

die Bedingung der involutorischen Reciprocität, in der besonderen Form der Nullwerthe. Pol- und Polarkegelschnitt fallen in den Directrixkegelschnitt

$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 = 0$ oder kürzer $\alpha_1 x_1^2 + \cdots = 0$

zusammen, der das fundamentale Tripel zu einem Tripel harmonischer Pole hat. Dem Punkt y_i entspricht die Gerade von den Coordinaten $\varrho\,\xi_i = \alpha_{ii}y_i$, seine Polare in Bezug auf den Directrixkegelschnitt. Wenn für diesen einen Punkt die entsprechende Gerade gegeben ist, so sind die α_{ii}, die Coefficienten der Substitution, bestimmt und die Reciprocität ist also durch ein Polardreieck und ein Elementenpaar bestimmt, das demselben nicht angehört. An jedem Punkt der Ebene als Ecke bildet man unendlich viele weitere Polardreiecke, deren beide andern Ecken in der der gegebenen entsprechenden Geraden Paare der Involution sind, die durch die Punkte und ihre entsprechenden Geraden in ihr bestimmt wird.

Diese Lage kann durch blosse Verschiebung und Drehung der einen Ebene in der andern herbeigeführt werden. Denn die allgemeine Substitution der Reciprocität

$$m\,\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3$$

geht in die der Polarität über für $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ und Ersetzung der ξ_i' durch die ξ_i. Specialisiert man sie also für rechtwinklige Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten mit Ersetzung von ξ, η, ζ für ξ_2, ξ_3, ξ_1, und von x, y, 1 für x_2, x_3, x_1, so müssen die Bedingungen der Involution durch Ersetzung der x, y durch ihre einer Verschiebung des Nullpunktes nach dem Punkt a, b und einer Drehung ξ ihrer Ebene um den Winkel φ entsprechenden neuen Werthe erfüllt werden können; d. h. in den Gleichungen

$$m\xi = \alpha_{21} + \alpha_{22}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{23}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$
$$m\eta = \alpha_{31} + \alpha_{32}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{33}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$
$$m\zeta = \alpha_{11} + \alpha_{12}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + \alpha_{13}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

müssen nach Ordnung der rechten Seiten nach den Veränderlichen die Coefficientengleichheiten $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ stattfinden. Dies giebt die Bedingungen

$$\alpha_{31} + a\alpha_{32} + b\alpha_{33} = \alpha_{22}\cos\varphi + \alpha_{23}\sin\varphi,$$
$$-\alpha_{22}\sin\varphi + \alpha_{23}\cos\varphi = \alpha_{11} + a\alpha_{12} + b\alpha_{13},$$
$$-\alpha_{32}\sin\varphi + \alpha_{33}\cos\varphi = \alpha_{12}\cos\varphi + \alpha_{13}\sin\varphi,$$

zur Bestimmung der Verschiebungsgrössen a, b und der Drehungsgrösse φ. Die letzte Gleichung liefert somit durch

$$\tan\varphi = \frac{\alpha_{33} - \alpha_{12}}{\alpha_{13} + \alpha_{23}}$$

zwei Werthe von φ, die beiden übrigen bestimmen a, b in einziger Weise.

Man erhält den Drehungswinkel φ auch als den Winkel der Polaren von einem der Kreispunkte oder einer der absoluten Richtungen; denn indem man diese durch Drehung zur Deckung bringt, hat man die Kreispunkte nicht geändert und also das vertauschbare Entsprechen in der unendlich fernen Geraden bewirkt, wie in der Constructionsentwickelung des Vorigen.

Die Polaren p, q, r der Ecken eines Dreiecks PQR bilden ein zu diesem perspectivisches Dreieck. In Bezug auf ein Polardreieck als fundamental ist die Polare eines Punktes P von den Coordinaten p_i ausgedrückt durch

$\alpha_1 p_1 x_1 + \alpha_2 p_2 x_2 + \alpha_3 p_3 x_3 = 0$, schreiben wir $\mathbf{P}_p = 0$;

die Polaren von Q und R sind ebenso

$$\mathbf{P}_q = 0, \quad \mathbf{P}_r = 0;$$

bezeichnen wir nun das Resultat der Substitution der Coordinaten von Q in die Polare von P durch (p, q) etc., wofür man hat $(p, q) \equiv (q, p)$ etc., so können die Verbindungslinien von P mit (q, r), etc. dargestellt werden (§ 34) durch

$$(r, p)\mathbf{P}_q = (q, p)\mathbf{P}_r, \quad (p, q)\mathbf{P}_r = (r, q)\mathbf{P}_p, \quad (q, r)\mathbf{P}_p = (p, r)\mathbf{P}_q;$$

und da die Summe dieser drei Gleichungen verschwindet, so gehen jene drei Geraden durch einen Punkt. Darnach bedarf der zweite Theil des Satzes des Beweises nicht mehr. (§ 4.)

Die Vereinigung reciproker Bündel zu einem Polarsystem im Bündel kann in ganz analoger Weise geschehen. An die Stelle der Axen und der unendlich fernen Geraden tritt das Tripel rechtwinkliger Strahlen, dessen entsprechende Ebenen wieder rechtwinklig zu einander sind; jede Vereinigung der beiden Bündel, bei welcher diese so zur Deckung gebracht werden, dass jeder der drei Strahlen des Tripels im ersten Bündel mit der Durchschnittslinie der beiden ihm nicht entsprechenden Ebenen des Tripels im zweiten zusammenfällt, liefert eine involutorische Reciprocität und es ist ersichtlich,

dass deren vier zu Stande kommen. Die Figuren und Entwickelungen des vorigen Paragraphen können in diesem Betracht auch hierfür genügen, weil die Voraussetzung, dass der Scheitel der vereinigten Bündel in der in M auf der Zeichnungsebene errichteten Normale liege, der Strahl n mit dieser vereinigt sei und die Strahlen q, r oder x, y die Spuren der durch n gehenden Ebenen des orthogonalen Tripels, P und p aber Durchstosspunkt und Spur des gegebenen Paares, die unmittelbare Uebertragung gestattet. Es ist aber klar, dass man ein ebenes Polarsystem immer so projicieren kann, dass ein beliebiges spitzwinkliges Polardreieck desselben Spur des orthogonalen Polar-Dreikants und -Dreiflachs desselben ist — der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist der Mittelpunkt und das geometrische Mittel aus den Abschnitten der Höhen der Radius des Distanzkreises für den Scheitel des Bündels.

Aber jedes projicierende Bündel eines ebenen Polarsystems ist ein Polarsystem im Bündel, die projicierenden Dreikante seiner Dreiecke sind seine Polardreikante; der projicierende Kegel seiner Directrix ist sein Directrixkegel und ein Strahl und die zugehörige Ebene des Bündels sind Polarstrahl- und Polarebene zu einander in Bezug auf diesen Kegel.

Zu seinen metrischen Elementen gelangen wir von den Untersuchungen des nächsten Paragraphen aus, da sie seine Beziehungen zu dem mit ihm concentrischen Polarsystem im Bündel sind, das den Kegel seiner absoluten Strahlen zum Directrixkegel hat. Offenbar sind in einem Polarbündel dieser Art ein Strahl und eine Ebene dann einander entsprechend, wenn sie zu einander normal sind. Einem Ebenenbüschel entspricht das in der Normalebene seiner Scheitelkante enthaltene Strahlenbüschel der Normalen seiner Ebenen und umgekehrt einem Strahlenbüschel das durch die Normale seiner Ebene gehende Büschel der zugehörigen Normalebenen; die Winkel entsprechender Elementenpaare sind gleichgross und von gleichem Sinn. Alle rechtwinkligen Dreikante in einem solchen Bündel sind Polardreikante desselben und umgekehrt. Ein solches Dreikant und ein Strahl mit seiner Normalebene bestimmen das Bündel in dieser seiner Specialität; man nennt es das Orthogonalsystem im Bündel.

Wir haben in I, § 51 in den Punkten H, H_x, H_y, H_z und

den Geraden h_n, h_{nx}, h_{ny}, h_{nz} entsprechende Elemente eines Schnittes von einem solchen Orthogonalsystem aus O mit dem Polardreieck $S_x S_y S_z$ und dem Mittelpunkt N kennen gelernt. Die Dreiecke $H H_x H_y$ und $h_n h_{nx} h_{ny}$, etc. sind deshalb perspectivisch und der jedesmal fehlende H-Punkt und die fehlende h_n-Gerade (hier z. B. H_z und h_{nz}) sind Centrum und Axe dieser Perspective. Das Orthogonalsystem erschliesst also wichtige Fundamente der orthogonalen Parallelprojection.

Das Orthogonalsystem im Bündel aus dem Projectionscentrum liefert die fundamentalen Constructionen zur Maassbestimmung mittelst der Centralprojection (I, §§ 9, 10); die Spur seines Directrixkegels in der Bildebene wird durch den Distanzkreis symmetrisch harmonisch vertreten.

Für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ als zu einander rechtwinklige Ebenen ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

die Gleichung für den Directrixkegel des Orthogonalsystems, das sie zu einem Polardreiflach hat; insofern dieselbe zugleich eine Kugel aus dem Schnittpunkt darstellt, deren Radius Null ist, und welche mit allen Kugeln desselben Mittelpunktes denselben Kegel der absoluten Richtungen zum Asymptotenkegel hat, spricht man von ihm als dem Asymptotenkegel der Nullkugel. Seine Gleichung in Ebenencoordinaten ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ und zwei Ebenen des Bündels

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0, \quad \xi' x + \eta' y + \zeta' z = 0$$

sind in Bezug auf ihn zu einander conjugiert, d. i. rechtwinklig zu einander, wenn ihre Coordinaten die Relation erfüllen

$$\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta' = 0.$$

So enthält dies specielle Polarsystem die Grundlage der Metrik; zuerst (vergl. I, § 31, 6; II, § 40, 14 etc.) die Bestimmungen der Rechtwinkligkeit aus der Harmonie mit den absoluten Elementen; sodann diejenigen über die Gleichheit der Winkel (I, § 31, 10; oben § 40, 4) aus der Projectivität mit ihnen: Zwei Linienwinkel sind gleich, wenn ihre Schenkel mit den je vom Scheitel des Winkels ausgehenden und in seiner Ebene liegenden Geraden absoluter Richtung Gruppen von gleichem Doppelverhältniss bilden; und zwei Flächenwinkel sind gleich, wenn ihre Schenkelebenen mit den je durch die Scheitelkante des Winkels gehenden Ebenen von absoluter

Stellung Gruppen von gleichem Doppelverhältniss bilden. Man erhält den Abstand eines Punktes von einer Ebene oder Geraden, wenn man ihn mit dem absoluten Pol ihrer Stellung resp. mit der absoluten Polare ihrer Richtung durch eine Ebene resp. Gerade verbindet, als seinen Abstand von ihrem Schnittpunkt mit jener. Und man findet die kürzeste Distanz von zwei windschiefen Geraden, wenn man die Distanz ihrer Schnittpunkte mit derjenigen Transversale misst, die den absoluten Pol ihrer gemeinsamen Stellung zur Richtung hat. Die Brennpunkte des Kegelschnitts sind die Schnittpunkte seiner Tangenten von absoluter Richtung im Endlichen und die Focalkegelschnitte einer Fläche zweiten Grades (oder auch insbesondere eines Kegelschnittes) sind die Doppelcurven derjenigen ihr umgeschriebenen developpabeln Fläche, deren Ebenen den absoluten Kreis berühren. (Vergl. II, § 47, 25.)

Die Ueberführung reciproker Ebenen in die involutorische Lage geschieht nach § 73 durch die Aufsuchung der absolut grössten unter den congruenten entsprechenden Dreiecken der Ebenen — nämlich der rechtwinkligen mit unendlich ferner Hypothenuse — und ihre Vereinigung zum Polardreieck.

75. Im Vorigen ist die Analogie vollständig hervorgetreten, welche besteht zwischen der Involution projectivischer ineinanderliegender Gebilde erster Stufe und der involutorischen Lage der ineinanderliegenden reciproken Gebilde zweiter Stufe. Aus dieser Analogie entspringt naturgemäss die Frage nach dem gemeinsamen Tripel von zwei ineinanderliegenden Polarsystemen zweiter Stufe, welche der Frage nach dem gemeinsamen Paar von zwei Involutionen genau entspricht. Es ist im Fall von zwei Polarsystemen in derselben Ebene mit reellen Directrixkegelschnitten das gemeinsame Tripel ihrer harmonischen Pole (§§ 49, 66, 3); aber wir construieren es nunmehr unabhängig von diesen Kegelschnitten und also von ihrer Realität und erweitern die Betrachtung zugleich auf das Bündel.

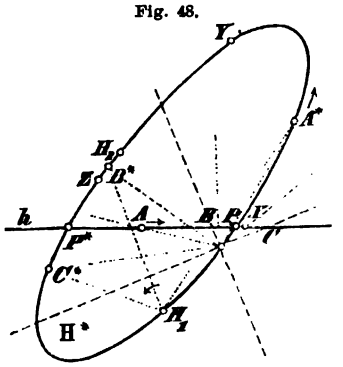
Wir denken beide Polarsysteme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ durch hinreichende Elementenpaare — etwa je ein Polardreieck und ein Elementenpaar bestimmt und betrachten eine gerade Punktreihe g in ihrer Ebene; derselben entsprechen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zwei zu ihr projectivische Strahlbüschel G_1 und G_2 respective, welche als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen oder als

Ort der zu den Punkten der Reihe doppelt conjugierten Punkte einen Kegelschnitt $\mathbf{G}^*$ erzeugen. Eine zweite Reihe l liefert ebenso die Büschel L_1, L_2 und als ihr Erzeugniss den Kegelschnitt $\mathbf{L}^*$, der mit dem vorigen offenbar denjenigen Punkt gemein hat, der dem Schnittpunkt der Reihen g, l doppelt conjugiert ist. Beide Kegelschnitte werden einander noch in drei Punkten X, Y, Z schneiden, von denen einer, sagen wir X und die Verbindungslinie der beiden andern, sagen wir x (p. 467) nothwendig reell sein muss. Diese Punkte bilden das gemeinsame Tripel der beiden Polarsysteme, weil jeder von ihnen in beiden dieselbe Polare hat, die nur die Verbindungslinie der beiden andern sein kann; jene, die Verbindungslinie der beiden Punkte in g, l, die ihm doppelt conjugiert sind; dieses aber desshalb, weil das gemeinsame Paar der beiden Polinvolutionen auf x in $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ nur die Punkte Y, Z sein können, da ihnen ja dieselbe Polare ZX, YX in beiden Systemen zukommt.

Von diesen Punkten und ihren geraden Verbindungslinien aus — die man durch die dualistisch entsprechende Construction aus zwei Strahlbüscheln und den ihren Strahlen doppelt conjugierten Strahlen, respective den von diesen umhüllten Kegelschnitten als Gruppe ihrer drei von der Wahl der Büschel unabhängigen gemeinsamen Tangenten hätte direct construieren können — gelangt man zu den ferneren gemeinsamen Elementen beider Polarsysteme, welche im Fall reeller Directrixkegelschnitte und bei gewissen Lagen derselben gegeneinander als die sechs Verbindungslinien s ihrer gemeinschaftlichen Punkte und als die sechs Schnittpunkte T ihrer gemeinsamen Tangenten bezeichnet werden und von denen wir schon in I, § 32, 12 f. erkannt haben, dass sie die Träger von einerlei Involutionen harmonischer Pole respective Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte sind. Als Träger von einerlei Involutionen harmonischer Pole respective Polaren können sie auch in den Polarsystemen unabhängig von den Kegelschnitten, welche ihre Directrixen sein mögen, definiert und construiert werden; jene sind Doppelstrahlen von Involutionen um X, Y, Z, diese Doppelpunkte von Involutionen auf x, y, z, den Gegenseiten der ersteren; wir werden sie darnach als $s_{1x}, s_{2x}; s_{1y}$, etc., respective $T_{1x}, T_{2x}; \ldots T_{2z}$ bezeichnen.

Denn ist h (Fig. 48) die Verbindungsgerade von zwei einander doppelt conjugierten Punkten P, P^*, so entspricht ihr als Ort aller den ihrigen doppelt conjugierten Punkte ein durch P, P^*, X, Y, Z, H_1, H_2 gehender Kegelschnitt H^*; dem die Reihe beschreibenden Punkt A entsprechen projectivisch die den H^* erzeugenden Strahlen zweier Büschel aus H_1 und H_2; verbinden wir ihn und den entsprechenden (doppelt conjugierten) Punkt A^* des Kegelschnittes mit X oder Y, Z respective durch Gerade, so beschreiben diese zwei concentrische projectivische Büschel in Involution; das letztere, weil ihn ihnen die Strahlen nach P, P^* einander vertauschbar entsprechen. Denken wir die Doppelstrahlen dieser Involution, so liegen in jedem derselben zwei Paare doppelt conjugierter Punkte, nämlich seine Schnittpunkte mit h und H^* und die Ecke des Tripels X, Y, Z, von der er ausgeht, nebst seinem Schnitt mit der Gegenseite desselben; in Folge dessen trägt jeder dieser Doppelstrahlen in beiden Polarsystemen die nämliche Involution harmonischer Pole, da diese durch zwei Paare vollständig bestimmt ist.

Fig. 48.



Die dualistisch entsprechende Entwickelung überlassen wir dem Leser und geben die Resultate als die Sätze:

Die Strahlen von den Tripelecken nach den doppelt conjugierten Punkten von zwei Polarsystemen bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die Geraden s, d. i. die Strahlen mit einerlei Involution harmonischer Pole in beiden sind.

Die Punkte in den Tripelseiten auf den doppelt conjugierten Strahlen von zwei Polarsystemen bilden eine Involution, deren Doppelpunkte die Punkte T, d. i. die Punkte mit einerlei Involution harmonischer Polaren in beiden sind.

Man sieht, dass diese Involutionen durch die oben entwickelte Construction des Tripels in jeder der beiden Arten gleichmässig mit bestimmt sind, da bei derselben sowohl doppelt conjugierte Punkte als Gerade in hinreichender Zahl zu benutzen waren.

Wir fragen nun nach der Realität dieser Elemente der beiden Polarsysteme; zunächst des gemeinsamen Tripels. Von demselben ist eine Ecke X und die Gegenseite x nothwendig reell; in dieser letztern aber (dualistisch für die y, z) sind die Punkte Y, Z als das gemeinsame Paar der beiden Involutionen harmonischer Pole in x aus beiden Polarsystemen bestimmt. Sie sind daher nur dann nicht reell, wenn diese Involutionen reelle Doppelpunkte haben, die sich trennen; also wenn beide Polarsysteme reelle Directrixkegelschnitte haben, die von x in reellen und sich trennenden Punktepaaren geschnitten werden; d. h. wenn die Directrixkegelschnitte einander nur in zwei reellen Punkten schneiden und nur zwei reelle gemeinsame Tangenten haben; die Verbindungssehne der beiden ersteren geht durch X und der Schnittpunkt der letzteren liegt in x, die zweiten Doppelelemente der bezüglichen Involutionen sind die Sehne aus X, welche die beiden nicht reellen also imaginär conjugierten Schnittpunkte verbindet, und der Punkt auf x, wo sich die nicht reellen gemeinsamen Tangenten schneiden.

In jedem andern Falle ist das gemeinschaftliche Tripel reell und an dasselbe knüpft sich die Realität der s_{ik} und T_{ik} wie folgt. Ist M ein Punkt im Innern des Tripeldreiecks, so ist M^* entweder auch im Innern desselben oder nicht; im ersten Falle trennen sich die Paare der Involutionen an keiner Ecke und man erhält drei reelle Paare der s_{ik} und vier reelle gemeinsame Punkte der reellen Directrixen, durch welche sie zu dreien gehen; im zweiten Falle trennen sie sich nur an einer Ecke nicht und man erhält nur aus dieser zwei reelle s_{ik} und also keine reellen Schnittpunkte der Directrixen.

Betrachten wir ebenso eine Gerade l, die die Tripelseiten ausserhalb des Dreiecks schneidet und ihre doppeltconjugierte l^*, so hat diese entweder dieselbe Lage oder sie geht in das Innere des Dreiecks; im ersteren Falle sind alle sechs T_{ik} reell und man erhält vier gemeinsame Tangenten der reellen Directrixkegelschnitte, in denen sie zu dreien liegen; im andern Falle liegen nur auf einer Seite des Tripels reelle T_{ik} und es giebt keine reellen gemeinsamen Tangenten.

Der zweite Fall tritt also auch immer ein, wenn von den Directrixen der Polarsysteme eine und wenn beide imaginär sind.

1) Die Construction der gemeinsamen Elemente von zwei Polarsystemen $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ in derselben Ebene erfordert also unter der Voraussetzung, dass sie durch je ein Polardreieck und ein Paar von allgemeiner Lage gegeben seien, folgende Schritte.

Man wählt zwei Gerade der Ebene g und l und ausser ihrem gemeinsamen Punkte O auf jeder von ihnen zwei Punkte A, B und resp. C, D. Man construiert das Büschel ihrer Polaren im ersten und im zweiten Polarsystem, also o_1, a_1, b_1; o_1, c_1, d_1 mit den Scheiteln G_1, L_1 und resp. o_2, a_2, b_2 und o_2, c_2, d_2 mit den Scheiteln G_2, L_2; aus den projectivischen Büscheln $G_1.o_1a_1b_1$ und $G_2.o_2a_2b_2$ folgen fünf Punkte G_1, G_2, O^*, A^*, B^* des Kegelschnittes $\mathbf{G}^*$ und aus den projectivischen Büscheln $L_1.o_1c_1d_1$ und $L_2.o_2c_2d_2$ die fünf Punkte L_1, L_2, O^*, C^*, D^* des Kegelschnittes $\mathbf{L}^*$. Um die ausser O^* diesen Kegelschnitten gemeinsamen Punkte zu finden, skizziert man ihre Gestalt und verzeichnet sie aus den erzeugenden projectivischen Büscheln in der Nachbarschaft eines jener Schnittpunkte X, um diesen mit möglichster Genauigkeit zu erfahren. Bestimmt man nun von diesem die Polare in $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$, so muss man dieselbe Gerade x erhalten. Dual entsprechend hätte man zu zwei Strahlbüscheln die Reihen der Pole, aus ihnen die Enveloppen der doppeltconjugierten ihrer Strahlen mit der doppeltconjugierten ihres gemeinsamen Strahles als gemeinsamer Tangente erhalten, dann eine zweite gemeinsame Tangente x durch Verzeichnung aus den erzeugenden projectivischen Reihen bestimmt und zu ihr in beiden Systemen den nämlichen Pol X gefunden. Construiert man nun für beide Systeme die Involutionen der harmonischen Polaren um X — aus zwei Strahlen und ihren entsprechenden Punkten in beiden Systemen — oder die Involutionen harmonischer Pole in x (was beides nur die Benutzung vorhandener Elemente fordert), so liefert das gemeinsame Paar dort die Seiten y, z des gemeinsamen Tripels aus x, hier die Ecken Z, Y in x, die in jenen liegen.

Zur Bildung der Involutionen an den Ecken resp. auf den Seiten des Tripels, deren Doppelelemente die s_{ik} und resp. T_{ik} sind, hat man in jedem Falle alles Nöthige, fünf Paare doppeltconjugierter Punkte z. B. A, A^*; B, B^*; CC^*; DD^*; OO^* und Paare doppelt conjugierter Geraden $g, G_1\,G_2$; $l, L_1\,L_2$ etc., deren Verbindung mit den Ecken resp. Schnitt mit den Seiten des Tripels jene Involutionen bestimmt.

2) Wenn man nach II, §§ 45, 25 die Ebenen Cd der vom Projectionscentrum C ausgehenden Bisekanten der Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiten Grades $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ermittelt hat, so sind C und d in den auf ihr durch die Flächen bestimmten Polarsystemen $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ reelle Gegenelemente X, x des gemeinsamen Tripels und die zugehörigen Strahlen s_{1x}, s_{2x} die Bisekanten selbst. Man hat damit die allgemeine Construction derselben und kann die dabei betreffs der Realität der scheinbaren Doppelpunkte und nach

ihrer Natur als Knoten, Spitzen und isolierte Doppelpunkte möglichen Fälle erläutern.

Sie ist für zwei Kegel zweiten Grades und insbesondere für den Fall einer gemeinsamen Mantellinie zur Construction des scheinbaren Doppelpunktes der Curve dritter Ordnung zu specialisieren. (§ 78.)

3) Wenn die Polarsysteme durch je ein Dreieck und den Mittelpunkt gegeben sind, so wird man natürlich die unendlich ferne Gerade als g wählen und den Kegelschnitt $\mathfrak{G}^*$ durch die Mittelpunkte bestimmen; analog immer, wenn man von einer Geraden die Pole in beiden Systemen kennt oder dual. Sonst ist die Wahl von Seiten eines Polardreiecks als g und l vortheilhaft. Das Gleiche gilt für die Bestimmung aus Axen und Paar.

4) Für concentrische Polarsysteme ist das Centrum X und die unendlich ferne Gerade x und das gemeinsame Paar der beiden Durchmesserinvolutionen liefert y und z, Z und Y; die s_{iy} und s_{iz} sind Parallelen und die s_{ix} die Diagonalen des aus ihnen gebildeten Parallelogramms; die T_{ix} sind ebenfalls Richtungen. Die Discussion der verschiedenen Fälle der Realität ist zu empfehlen.

Die Tangenten zweier Kegelschnitte in den gemeinsamen Punkten theilen sich drei Mal in vier Paare, von denen je zwei durch harmonische Punkte einer Tripelseite gehen, so dass der Strahl nach der Gegenecke des Tripels der vierte harmonische Strahl ist.

5) Man untersuche den Fall von zwei gleichseitig hyperbolischen Polarsystemen und die Fälle mit parabolischer Directrix.

Zwei kreisförmige Directrixen gestatten drei Fälle nach ihrer Realität und im Fall der Realität verschiedene Fälle der gegenseitigen Lage. Der gemeinsame Durchmesser ist die Seite x und die Richtung seiner Normalen die Ecke X; Y und Z sind das gemeinsame Paar der Polinvolutionen beider Kreise in x, also immer reell, ausser wenn beide Kreise reell sind und sich reell schneiden. Die Potenzlinie der beiden Kreise und die unendlich ferne Gerade bilden stets das allein reelle Paar der s_{ik}, also s_{1x}, s_{2x}; darum sind Y, Z auch das zu jener symmetrische Paar unter den zu den Aehnlichkeitspunkten, den zwei stets reellen T_{ik}, nämlich T_{1x} und T_{2x}, harmonischen. Für zwei imaginäre Kreise sind die Aehnlichkeitspunkte dieselben wie für ihre reellen Stellvertreter im Sinne von § 73, 4; die Potenzlinie ist symmetrisch zu der der letzteren in Bezug auf die Mitte der Centraldistanz; zugleich sind Y, Z stets reell. Man erläutere den Fall eines reellen und eines imaginären Directrixkreises. (Vergl. I, § (36°).)

6) Kann die Directrix des einen Polarsystems in ein Linienpaar oder ein Punktepaar degeneriren? Und kann diess bei beiden geschehen? Der Fall der Kreispunkte liefert die Brennpunkte des allgemeinen Polarsystems als reelle T_{ik}.

Wenn eine Gerade s_{ik} ins Unendliche fällt, so sind die entsprechenden Paare conjugierter Durchmesser in beiden Systemen parallel und die Directrix-Kegelschnitte, falls sie existieren, ähnlich

und ähnlich gelegen. Man zeige die Proportionalität ihrer entsprechenden Durchmesserlängen.

7) Die Kegelschnitte G^*, L^* können in besonderen Fällen sich berühren resp. osculieren (jedoch nicht vierpunktig); im Fall der Berührung sei X der einfache Schnittpunkt, x die Tangente im gemeinsamen Berührungspunkt; im Fall der Osculation ist X der Osculationspunkt und x seine Tangente. Man erläutere die Besonderheiten rücksichtlich der s_{ik} und T_{ik}.

8) Den zweifach unendlich vielen Geraden (Punkten) der Ebene entsprechen als Orte (Enveloppen) ihrer doppelt conjugierten die Kegelschnitte durch die drei Punkte (an die drei Seiten) des gemeinsamen Tripels; in jeder Geraden liegen zwei Punkte, durch jeden Punkt gehen zwei Gerade, die einander doppelt conjugiert sind. Für das F.-Dreieck als das gemeinsame Polardreieck beider Systeme sind die Gleichungen zweier Polarsysteme

$$m\xi_i' = \alpha_i x_i, \quad r\xi_i' = \beta_i x_i$$

mit den Directrixen

$$\alpha_1 x_1^2 + \cdots = 0, \quad \beta_1 x_1^2 + \cdots = 0;$$

dem Punkte y_i entsprechen die Geraden

$$\alpha_1 y_1 x_1 + \cdots = 0, \quad \beta_1 y_1 x_1 + \cdots = 0$$

und somit der doppelt conjugierte Punkt

$$y_1^* : y_2^* : y_3^*$$
$$= y_2 y_3 (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) : y_3 y_1 (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) : y_1 y_2 (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

$$\text{Aus } y_1^* : y_2^* = (A_1 A_2 E_3 Y_3^*) = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}\frac{y_2}{y_1}$$
$$= \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}(A_2 A_1 E_3 Y_3)$$

etc. folgt die Construction von Y^* aus Y mittelst involutorischer Büschel. Y und Y^* fallen zusammen in den gemeinsamen Punkten der Directrixen, wie doppeltconjugierte Gerade in ihren gemeinsamen Tangenten.

Oder die Punkte v_i und v_i^* sind für beide Systeme harmonische Pole, wenn zugleich

$$\alpha_1 v_1 v_1^* + \cdots = 0, \quad \beta_1 v_1 v_1 + \cdots = 0$$

und das projicierende Büschel solcher Paare aus A_1 oder X ist somit die Involution

$$(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) v_2 v_2^* + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) v_3 v_3^* = 0;$$

$x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehören ihr an und die gemeinsamen Sehnen der Directrixen aus X sind ihre Doppelstrahlen. Und dual.

Den Geraden ξ_i der Ebene entsprechen die Kegelschnitte

$$\xi_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)x_2 x_3 + \xi_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)x_3 x_1$$
$$+ \xi_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)x_1 x_2 = 0;$$

sie degenerieren für $\xi_i = 0$ in die gleichnamige F.-Gerade $x_i = 0$ und eine Gerade durch den entsprechenden F.-Punkt $\xi_i = 0$ oder A_i.

Wenn zwei Ecken Y, Z des gemeinsamen Polardreiecks mit den absoluten Richtungen zusammenfallen, so erhält man die Kreisverwandtschaft, bei der den Geraden und Kreisen der Ebenen Kreise entsprechen. Denn einem Kegelschnitt durch zwei F.-Punkte entspricht eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem Kegelschnitt durch die F.-Punkte und den zwei Geraden von jenem nach dem dritten zusammengesetzt ist.

9) Man erläutere die Lage der Geraden, welchen zwei zusammenfallende doppeltconjugierte Punkte angehören, aus der Determinantengleichung (§ 49, 28, 3)

$$\begin{vmatrix} 0 & \xi_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), & \xi_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3), & \xi_1 \\ \xi_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1), & 0 & \xi_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2), & \xi_2 \\ \xi_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3), & \xi_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2), & 0, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

10) Die Kegelschnitte G^*, die den Geraden g der Ebene doppeltconjugiert sind, werden Parabeln für alle Tangenten des durch die Mittelpunkte des Polarsystems gehenden $\mathbf{M}$ unter ihnen; für die ihn reell schneidenden sind sie Hyperbeln für die nicht schneidenden Ellipsen. Unter den letzteren giebt es einen Kreis, unter den Hyperbeln unendlich viele gleichseitige; die Geraden, denen die letzteren entsprechen, bilden ein Büschel, dessen Scheitel der Schnittpunkt der Sehnen ist, die die Axen der Polarsysteme $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ in dem Kegelschnitt $\mathbf{M}$ spannen. Zugleich ist seine Polare in Bezug auf $\mathbf{M}$ die Gerade, der der Kreis des Systems doppelt conjugiert ist. (Vergl. § 70, 3.)

76. Die Uebertragung der gewonnenen Ergebnisse auf zwei concentrische Polarsysteme im Strahlbündel geschieht einfach durch Eintragung des Distanzkreises für seinen Scheitel in die Bildebene. Die Construction giebt ohne Weiteres die Resultate: Die beiden Polarsysteme besitzen ein gemeinsames Polardreikant $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$; x, y, z, von welchem eine Kante x und die gegenüberliegende Fläche $\mathbf{X}$ nothwendig reell sind; während die beiden andern in dem einzigen Fall conjugiert imaginär werden, wo die Directrixkegel beider Polarbündel reell sind und nur zwei reelle Gerade und zwei reelle Tangentialebenen gemein haben. Durch jede Kante dieses Dreikants gehen zwei zu den Nachbarflächen desselben harmonisch gelegene Ebenen, denen für beide Polarbündel dieselbe Involution harmonischer Polarstrahlen angehört; und in jeder Fläche derselben liegen

zwei zu den zugehörigen Kanten harmonische Strahlen, welchen in beiden Bündeln dieselbe Involution harmonischer Polarebenen zukommt. Jene drei Paare von Ebenen gehen viermal zu drei durch eine Gerade, die gemeinsamen Erzeugenden der Directrixkegel der Bündel und diese drei Paare von Geraden liegen viermal zu drei in einer Ebene, den gemeinsamen Tangentialebenen derselben Kegel, wenn dieselben reell sind.

Wir erörtern diese Eigenschaften noch speciell in dem Fall, wo das eine der Polarbündel ein Orthogonalsystem ist. Wir erfahren dann zuerst, dass ein beliebiges Polarsystem im Bündel immer ein reelles Tripel orthogonaler Elemente hat, wir sagen drei Axen und drei Hauptebenen, weil die Directrix des Orthogonalsystems wenigstens imaginär ist; Axen axialer und Ebenen orthogonaler Symmetrie für den Directrixkegel desselben, wenn er reell ist. In jedem Fall existieren ferner zwei reelle Ebenen s_{it} und zwei reelle Strahlen t_{it}, nämlich jenes Ebenen mit je derselben rechtwinkligen Involution harmonischer Polarlinien, und dieses Strahlen mit einerlei Rechtwinkelinvolution harmonischer Polarebenen; die erstgenannten Ebenen gehen durch eine der Axen und sind zu den anliegenden Hauptebenen orthogonal symmetrisch, weil harmonisch; die letzteren Geraden liegen in einer der Hauptebenen, symmetrisch zu den ihr angehörigen Axen. Im Fall eines reellen Directrixkegels nennt man jene Ebenen die cyklischen Ebenen, weil die Richtungen der von ihnen aus dem Kegel geschnittenen Erzeugenden dem Directrixkegel des Orthogonalsystems d. i. dem imaginären unendlich fernen Kugelkreis angehören, und weil in Folge dessen die zu ihnen parallelen Ebenen den Kegel in Curven schneiden, die durch diese Punkte gehen, d. h. in Kreisen. Ist das Polarsystem im Bündel das für den Scheitel einer gegebenen Fläche zweiten Grades entsprechende (II, § 39, 18), so schneiden seine cyklischen Ebenen die Fläche in Kegelschnitten, die den besagten Scheitel zum einen Brennpunkt haben.

Dann nennt man diese Strahlen ferner die Focalstrahlen; denn die von ihnen ausgehenden Tangentialebenen des Kegels berühren auch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis oder sie sind die reellen Durchschnittslinien der zwei Paare nicht reeller Ebenen, welche Tangentialebenen des Kegels und

zugleich des Kugelkreises oder der Nullkugel aus der Spitze sind. In Folge dessen sind die in der Normalebene eines Focalstrahles gelegenen Spuren jener Tangentialebenen auch Gerade durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte dieser Ebene, d. h. jede Normalebene eines Focalstrahles schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt, der den Fusspunkt des Focalstrahles zum Brennpunkt hat.

Legt man durch einen beliebigen Strahl p des Bündels die Tangentialebenen an den Kegel und die Ebenen nach den Focalstrahlen, so haben beide Paare dieselben Halbierungsebenen ihrer Winkel; denn in einer Bild- oder Spurebene sind die Durchstosspunkte der Focalen Punkte T_{ik} für die Spur des Polarsystems sowohl als für die des Orthogonalsystems, d. h. die Spuren der Halbierungsebenen der von den Tangentialebenen aus p gebildeten Winkel sind für beide Polarsysteme conjugiert und somit durch die T_{ik} harmonisch getrennt; sonach werden auch die Halbierungsebenen durch die Focalen harmonisch getrennt, d. h. sie sind auch die Halbierungsebenen ihrer Winkel. Insbesondere bilden hiernach die von einer Erzeugenden des Kegels nach seinen Focalstrahlen gehenden Ebenen mit der bezüglichen Tangential- und Normalebene desselben gleiche Winkel — man sieht, die Uebertragung der Brennpunktseigenschaften der Curven zweiten Grades in den Kegel; und zugleich die Bewahrung derselben auch in dem Fall, wo der Kegel nicht reell ist, als Beziehungen eines Polarsystems im Bündel zu einem Orthogonalsystem.

Man sieht nun leicht, wie die Existenz der Focalstrahlen des Polarsystems bei der Herstellung der perspectivischen Lage collinearer Bündel vermittelt. (§ 71.) Von den vier Lösungen der Aufgabe gehören zu jedem der beiden Focalstrahlen zwei.

Wenn aus dem Scheitel der Bündel als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben wird, so bilden die Strahlen und Ebenen der Bündel auf ihrer Oberfläche durch ihre Schnittpunkte und Schnittkreise sphärische Polarsysteme und wir erfahren, dass dieselben ein gemeinsames Polardreieck grösster Kreise besitzen; dass auf dessen Seiten harmonisch getrennt durch die Ecken Paare von Punkten T_{ik} liegen, denen die nämliche Polarinvolution grösster Kreise in beiden angehört, und dass durch seine

Ecken harmonisch zu den Seiten Paare grösster Kreise s_{ik} gehen, mit derselben Polinvolution in beiden Systemen. Jene liegen viermal zu dreien in grössten Kreisen, welche die gemeinsam berührenden der Directrixen sind, diese gehen viermal zu dreien durch die gemeinsamen Punkte derselben. Diese Directrixen sind als Durchdringungen der Directrixkegel zweiten Grades mit der Kugel Curven vierter Ordnung erster Art, aber man nennt sie sphärische Kegelschnitte. Ihre Eigenschaften entspringen aus der vorigen Verbindung eines allgemeinen Polarbündels mit dem concentrischen Orthogonalbündel und sind mit denen des zugehörigen Kegels wesentlich identisch. Die drei Axen und Hauptebenen des Kegels sind die im Scheitel zusammenlaufenden Kanten und Ebenen des gemeinsamen Quadrupels der Durchdringung, die Richtungen von jenen sind die drei andern Ecken und die unendlich ferne Ebene ist die vierte Ebene derselben; der sphärische Kegelschnitt ist nach jenen Richtungen und mit jenen Ebenen als Symmetrieebenen in orthogonaler Symmetrie mit sich selbst. Die developpable Fläche seiner Tangenten hat in den letzteren Doppelcurven; und der centrischen Symmetrie der Curve um den Kegelmittelpunkt entsprechend hat sie in den entsprechenden Punkten parallele Tangenten, d. h. eine vierte Doppelcurve liegt in unendlicher Ferne; die Tangenten in symmetrisch entsprechenden Punkten begegnen sich in den Doppelcurven. Die Punkte, in denen die Ebenen des Quadrupels die Curve schneiden, sind Schnittpunkte derselben mit den zugehörigen Doppelcurven, die in ihnen zugleich die Kugel berühren; sie sind nur auf zweien der Ebenen reell und sie sind als die Scheitel der Curve zu bezeichnen, da ihre Tangenten hier zugleich die Normalen dieser Ebenen sind. Die grössten Kreise, in denen diese Ebenen die Kugel schneiden, können als die Hauptkreise oder Axen des sphärischen Kegelschnittes benannt werden; zwei sind Verbindungskreise der Scheitel, der dritte schneidet nicht reell; ihre Schnittpunkte wird man als Centra des sphärischen Kegelschnittes bezeichnen und nach der verschiedenen Lage zu zwei Axen und den zugehörigen Centren kann man jeden sphärischen Kegelschnitt als sphärische Elipse und ebenso als sphärische Hyperbel auffassen. In Bezug auf jedes Centrum besitzt er sphärisch-centrische Symmetrie und ein System con-

jugierter Durchmesser; in Bezug auf jede Axe ist er mit sich selbst in sphärischer orthogonaler Symmetrie.

Auf den Axen und symmetrisch zu den zugehörigen Centren liegen Punktepaare T_{ik}, nur in einer derselben reell, denen rechtwinklige Involutionen harmonischer Polarebenen oder grösster Kreise in Bezug auf den Kegel resp. Kegelschnitt entsprechen — die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes.

Und durch die Centren symmetrisch zu den zugehörigen Axen gehen Paare grösster Kreise s_{ik}, nur an einem reell, denen rechtwinklige Involutionen harmonischer Polarlinien am Kegel angehören oder orthogonale Paare conjugierter Punkte in Bezug auf den sphärischen Kegelschnitt; man nennt sie die cyklischen Bögen desselben. Diese Elemente sind reell, unabhängig von der Realität des Directrixkegels des betrachteten Polarbündels und also des sphärischen Kegelschnittes; im Fall der Realität desselben lassen sich von ihnen Eigenschaften aussagen, die sie in Analogie zu den Asymptoten der Kegelschnitte stellen. Die Pole der cyklischen Bögen und die Polarkreise der Brennpunkte — Directrixen — sind gleichfalls auszuzeichnen und natürlich immer reell wie jene.

Wir haben aber an dieser Stelle eine Betrachtung hinzuzufügen, die von der Betrachtung zweier vereinigter Polarsysteme hinüberführt zu der von einfach unendlich vielen, deren Gesammtheit man als ein Büschel resp. als eine Schaar derselben zu bezeichnen hat; denn hier sind dann diese Begriffe und Anschauungen wiederum unmittelbar für ebene Systeme und für Bündel zugleich festgestellt.

Aus dem gemeinsamen Polardreieck XYZ und einem Paar doppelt conjugierter Punkte A, A^* bestimmen sich die Strahlenpaare s_{ik} mit denselben Involutionen harmonischer Pole und somit die vier gemeinsamen Punkte beider Directrixen, aber nicht die Polarsysteme und die Directrixen selbst. Unsere Entwickelung hat zu dem Punkte A den doppelt conjugierten A^* als Schnitt der Polaren a_1, a_2 in zwei bestimmten Polarsystemen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ erhalten und umgekehrt können wir offenbar einen beliebigen Strahl a_k des Büschels um A^* als die Polare des Punktes A in einem Polarsystem $\mathfrak{S}_k$ bezeichnen, dessen Directrix durch dieselben vier Punkte hindurchgeht. Wir haben den

Begriff des Kegelschnittbüschels in seiner allgemeinen Form, definierbar auch durch zwei nicht reelle Kegelschnitte und daher zweckmässig als Büschel von Polarsystemen in der Ebene unterschieden; zugleich mit der fundamentalen Eigenschaft, vom Polarenbüschel eines Punktes in Bezug auf dasselbe wie in § 49, 39, 8. Der Schein aus einem Punkt ausserhalb der Ebene liefert uns das Büschel von Polarsystemen im Bündel; bestimmt durch ein Polardreikant und ein Paar doppelt conjugierte Strahlen, sodass jede Ebene durch den einen derselben als Polarebene des andern eines der Polarsysteme ausscheidet. Ist insbesondere das eine der Bündel orthogonal, so dass wir aus den zwei reellen s_{ik} die gemeinsamen cyklischen Ebenen des andern erhalten, so entspringt ein Büschel concentrischer Kegel zweiten Grades, welche dieselben vier Strahlen absoluter Richtung gemein haben: concyklische Kegel zweiten Grades.

Dual entsprechend sind aus dem gemeinsamen Polardreieck XYZ und einem Paar doppelt conjugierter Strahlen g, g^* ($G_1 G_2$ in § 75) die Involutionen in den Seiten des ersten und damit die Punkte T_{ik}, also die gemeinsamen Tangenten der Directrixkegelschnitte, aber nicht diese selbst und nicht die Polarsysteme bestimmt. Erst die Wahl eines bestimmten Punktes in g^* als Pol der Geraden g individualisiert eines der Polarsysteme, deren daher einfach unendlich viele sind — die Schaar von Polarsystemen in der Ebene. Die Pole einer Geraden in allen Polarsystemen der Schaar erfüllen eine andere Gerade (§ 39, 8), eben die doppelt conjugierte, vielmehr nun unendlich vielfach conjugiert. Die Scheinbildung aus einem Punkt des Raumes giebt die Schaar von Polarsystemen im Bündel mit der entsprechenden Eigenschaft. Ist aber unter den Polarsystemen im Bündel speciell das zugehörige Orthogonalsystem, so dass die reellen Strahlen T_{ik} die Focalstrahlen sind, so erhalten wir die Schaar der confocalen Bündel und Kegel; Kegel, deren gemeinsame Tangentialebenen zugleich den unendlich fernen Kreis aller Kugeln berühren oder, wie man sagen kann, Ebenen von absoluter Stellung sind. Offenbar giebt es in demselben wie in dem Büschel der concyklischen unendlich viele Polarbündel mit imaginären Directrixen neben denen mit reellen; und ebenso in den

Büscheln mit imaginären Grundpunkten in der Ebene und in den Schaaren mit imaginären gemeinsamen Tangenten.

Endlich wollen wir drei Polarsysteme $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ in derselben Ebene oder an demselben Punkt denken, wie früher drei collineare. Dann giebt es (in offenbarem Zusammenhang mit dem dort Entwickelten) einen Ort von Punkten P in der Ebene, für welche die Polaren in den drei Systemen durch denselben Punkt P^* gehen, und daher auch die Polaren für alle die Polarsysteme, die den von den drei gegebenen bestimmten linearen Gebilde erster Stufe angehören; denn diese Eigenschaft kommt nicht mehr allen Punkten der Ebene zu. In einer Geraden g liegen drei Punkte dieses Ortes, sodass derselbe eine Curve dritter Ordnung ist; denn die doppelt conjugierten ihrer Punkte in den Systemen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ liegen in einem Kegelschnitt $\mathfrak{G}_3^*$ durch das gemeinsame Tripel harmonischer Pole derselben X_3, Y_3, Z_3 und durch die Pole von g in ihnen G_1 und G_2; ebenso die doppelt conjugierten in $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ in dem Kegelschnitt $\mathfrak{G}_1^*$ durch das gemeinsame Tripel X_1, Y_1, Z_1 und die Pole G_2, G_3 von g; beide Kegelschnitte haben also ausser G_2 noch einen oder noch drei reelle Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* gemein, welche als dreifach conjugiert Punkten P_1, P_2, P_3 von g entsprechen und denen nach der Natur dieses Zusammenhangs diese dreifach conjugiert sind etc.

Offenbar gehören die Punkte X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 und X_3, Y_3, Z_3 zur Curve und bestimmen sie; solcher Tripel enthält sie zweifach unendlich viele, d. h. jeder Punkt in ihr ist eine Ecke für unendlich viele solche Tripel; die Gegenseiten derselben gehen durch den conjugierten Punkt der ersten. Und dual entsprechend.

Zwei Paare derselben P_1^*, P_2^* und P_1, P_2 liefern sofort auch nach § 73 ein drittes Paar in allen drei Polarsystemen conjugierter Punkte in den Schnitten der Geraden $P_1^* P_2$, P_2^*, P_1 und $P_1 P_2$, $P_1^* P_2^*$ und da der letztere in der Geraden $P_1 P_2 P_3$ liegt und diese nicht mehr als drei solche Punkte enthalten kann, so ist er nothwendig identisch mit P_3 und der andere daher P_3^*; die drei Paare conjugierter Punkte liegen viermal zu dreien auf geraden Linien.

Und wenn zwei conjugierte Punkte der Curve zugleich Punkte eines Tripels im vorigen Sinn sein sollen, so muss der

dritte Punkt desselben der Schnittpunkt ihrer Tangente sein oder conjugierte Punkte derselben sind solche, deren Tangenten sich in ihr schneiden. Entsprechend im Bündel.

Man sieht, die Lehre von den conjugierten Punkten der Curve dritter Ordnung nach der Maclaurin'schen Theorie (§§ 50, 51) tritt auf dem Wege projectivischer Construction in der Ebene hervor. Wir haben dieselbe schon in weitem Umfange betrachtet und kommen nicht darauf zurück.

1) Der Inhalt des sphärischen Dreiecks zwischen den cyklischen Bögen eines sphärischen Kegelschnittes und einem ihn berührenden grössten Kreis ist constant; d. h. auch die Summe der Winkel ist constant, welche eine Tangentialebene des Kegels vom zweiten Grade mit seinen cyklischen Ebenen bildet. Die Bögen eines grössten Kreises zwischen den Schnitten mit einem sphärischen Kegelschnitt und seinen cyklischen Bögen sind gleich.

2) Die Normalebenen der Erzeugenden des Kegels umhüllen den Supplementarkegel; sein Polarsystem hat mit dem Orthogonalsystem die orthogonalen Elemente derjenigen gemein, die dem ersten angehörten; also dieselben Hauptebenen und Axen, aber die Normalen der cyklischen Ebenen des ersten als die Focalstrahlen des zweiten und die Normalebenen der Focalstrahlen von jenem als cyklische Ebenen des Supplementaren.

Die Orthogonalprojectionen der Focalstrahlen auf die Berührungsebenen liegen auf einem Kegel, der in den Kanten auf der focalen Hauptebene den gegebenen berührt und die Normalebenen seiner Focalstrahlen zu cyklischen Ebenen hat.

Weil also das Product der Sinus der Normalen zu den cyklischen Bögen aus den Punkten des sphärischen Kegelschnittes constant ist, so ist auch das Product der Sinus der Normalbögen zu den Tangenten aus den Focalpunkten constant, etc.

3) Unter den Kegeln zweiten Grades giebt es solche, welchen rechtwinklige Dreikante eingeschrieben und solche, denen rechtwinklige Dreiflache umgeschrieben werden können; solche, deren cyklische Ebenen zu zwei Mantellinien und solche, deren Focalstrahlen zu zwei Tangentialebenen normal sind; solche, welche mit den Ebenen durch die Polargeraden ihrer cyklischen Ebenen rechtwinklige Gerade und solche, welche mit den Strahlen in den Polarebenen der Focalstrahlen rechtwinklige Tangentialebenen gemein haben; solche, deren Focalstrahlen, resp. deren cyklische Ebenen rechtwinklig zu einander sind. Sie sind paarweise Polarfiguren im Orthogonalsystem. (Vergl. § 73, 4 Schluss.)

4) Zwei Kreise, von denen einer reell und der andre imaginär ist, bestimmen einen schiefen Kreiskegel, der den ersten zur Spur und den zweiten zum Distanzkreis oder cyklographischen Bild seiner

Spitze hat. Der über der Centraldistanz als Durchmesser beschriebene Kreis schneidet die eine der zur Centrale normalen Seiten des gemeinsamen Tripels in den Durchstosspunkten der Focalstrahlen des Kegels.

5) Die Mittelpunkte aller Polarsysteme eines Büschels liegen in einem Kegelschnitt, die Mittelpunkte aller Polarsysteme einer Schaar in einer Geraden. (Vergl. § 39, 8.)

6) Man charakterisiere das Büschel concyklischer und die Schaar confocaler sphärischer Kegelschnitte.

7) Man entwickle für drei concentrische Polarbündel die Lehre vom Ort der Polgeraden, deren Polarebenen ein Büschel bilden, unter der Voraussetzung, dass das eine derselben das Orthogonalsytem sei.

77. Zwei nicht ineinanderliegende reciproke Gebilde zweiter Stufe (Ebenen oder Bündel) erzeugen durch Verbindung ihrer entsprechenden Elemente — also der Punkte der einen Ebene mit den entsprechenden Geraden der andern durch Ebenen, und der Strahlen des einen Bündels mit den entsprechenden Ebenen des andern als Punkte — zweifach unendlich viele Ebenen respective Punkte, also die Tangentialebenen und Punkte krummer Oberflächen, und zwar wie wir sogleich sehen werden, von einer Fläche zweiter Classe und einer Fläche zweiter Ordnung. Denn jeder Punkt des Raumes bestimmt durch Verbindung mit den entsprechenden Elementen von zwei reciproken Ebenen Σ, Σ' zwei concentrische reciproke Bündel, und die vom gedachten Punkt ausgehenden Tangentialebenen der Fläche sind diejenigen Ebenen im Bündel, welche ihre entsprechenden Strahlen enthalten, d. h. es sind die Tangentialebenen des Kegels zweiter Classe, der als Polarebenen-Kegel im Bündel nach § 72, 7 erhalten wird. Und jede Ebene im Raum schneidet aus beiden Bündeln S, S' zwei reciproke ebene Systeme in allgemeiner Lage, in welcher die in ihren entsprechenden Geraden gelegenen Punkte, d. i. die Punkte des Polkegelschnittes, der Fläche angehören.

Oder durch eine Gerade g gehen im Allgemeinen zwei Tangentialebenen an die erste und in ihr liegen zwei Punkte der zweiten Fläche; denn sie schneidet die eine Ebene in einem Punkte, dem Scheitel eines Strahlbüschels, welchem eine bestimmte Reihe der andern projectivisch entspricht; und es gehen nur zwei Ebenen durch g so, dass jede einen Punkt und

einen Strahl dieser beiden Gebilde erster Stufe enthält, welche einander entsprechen, nämlich die Doppelebenen der zugehörigen projectivischen Ebenenbüschel; und sie wird mit dem einen Scheitel durch ein Strahlbüschel verbunden, dem im andern Bündel ein ihm projectivisches Ebenenbüschel entspricht, welches in ihr eine Punktreihe angiebt, und es giebt nur zwei Punkte dieser Reihe in ihren entsprechenden Strahlen. (§ 6.)

Man sieht auch, dass der Tangentenkegel und der ebene Querschnitt, das Paar der Tangentialebenen und das der Schnittpunkte, reell oder imaginär sein können und erkennt darin den aus früheren Entwickelungen wohlbekannten Charakter der Flächen zweiter Classe respective Ordnung.

Man sieht ferner, dass das Erzeugniss ungeändert bleibt, ob man das eine oder das andere der beiden Bündel als Strahlenbündel, die eine oder die andre beider Ebenen als Strahlenebene betrachtet; ist A der Schnitt des Strahles a im Bündel S mit der Ebene $\mathbf{A}'$ im Bündel S', so ist es auch der Schnitt des Strahles $S'A$ oder b' in $\mathbf{A}'$ mit der entsprechenden durch a oder SA gehenden Ebene $\mathbf{B}$; etc.

Sind die Bündel durch ihre Scheitel S, S' und vier Gerade a, b, c, d von allgemeiner Lage im ersten, so wie ihre entsprechenden Ebenen $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}'$ im zweiten gegeben, so erhält man sofort zwölf Punkte der Fläche, nämlich S, S'; $a\mathbf{A}'$, $b\mathbf{B}'$, $c\mathbf{C}'$, $d\mathbf{D}'$; ab, $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$; ac, $\mathbf{A}'\mathbf{C}'$; ad, $\mathbf{A}'\mathbf{D}'$; bc, $\mathbf{B}'\mathbf{C}'$; bd, $\mathbf{B}'\mathbf{D}'$; cd, $\mathbf{C}'\mathbf{D}'$. Ebenso aus zwei reciproken Ebenen zwölf Ebenen der Fläche zweiter Classe. Wir wissen (§ 33, II, § 46), dass neun Punkte resp. neun Ebenen von allgemeiner Lage sie bestimmen.

Der gemeinschaftlichen Geraden beider Ebenen Σ, Σ' als einer Geraden o oder p' entsprechen respective Punkte O', P in ihnen, welche als Berührungspunkte der Ebenen Σ', Σ mit der entsprechenden Fläche zu bezeichnen sind; und dem gemeinschaftlichen Strahl SS' oder o, p' beider Büschel entsprechen Ebenen Ω' und Π, welche die Tangentialebenen der Fläche zweiter Ordnung in S respective S' sind. Wir betrachten, um diess einzusehen, die von Punkten von Σ ausgehenden Tangentenkegel der Fläche zweiter Classe oder die durch S gehenden Querschnitte der Fläche zweiter Ordnung; beispielsweise sei das letztere ausgeführt. Ist $\mathbf{E}$ eine durch S gehende

Ebene mit ihrem Strahlbüschel $a, b, c \ldots$ und sei das demselben correspondierende projectivische Ebenenbüschel $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \ldots$ von der Scheitelkante e' im Bündel S', so bilden die Spuren der $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \ldots$ in $\mathbf{E}$ ein zu $a, b, c, \ldots$ projectivisches Strahlbüschel $\alpha', \beta', \ldots$ welches mit diesem den fraglichen Schritt hervorbringt. Dieser Schnitt der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene $\mathbf{E}$ durch S wird einen Doppelpunkt nur dann zeigen, d. h. in zwei reelle oder nicht reelle Gerade degenerieren, wenn die Ebene $\mathbf{E}$ dem Scheitelstrahl SS' als Strahl des Büschels S' in S entspricht, d. h. für die Ebene Π; dann wird S der Scheitel auch des Büschels $\alpha', \beta', \ldots$ und das Erzeugniss beider Büschel ist ein von S ausgehendes Paar von geraden Linien. Die dualistisch entsprechende Betrachtung im Fall der Fläche zweiter Classe überlassen wir dem Leser. In dem hier gewählten Fall kann man aber auch wie folgt schliessen: Wenn die Ebene $\mathbf{E}$ den Strahl SS' enthält, so hat der entsprechende Strahl e' im zweiten Bündel nicht nur den Punkt S', sondern auch den Schnitt mit $\mathbf{E}$ mit der Fläche gemein und ist also Tangente der Fläche zweiter Ordnung. Der Drehung von $\mathbf{E}$ um SS' entspricht die Drehung der Tangente in der Tangentialebene der Fläche in S' um S' projectivisch; diejenigen zwei Tangenten, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, sind ganz in der Fläche enthalten, d. h. sie sind die geraden Erzeugenden derselben aus dem Punkte S'.

In beiden Fällen wird die Fläche eine Regelfläche, wenn der Schnitt der Berührungsebene mit ihr aus zwei reellen Geraden besteht; eine Nichtregelfläche, wenn diese Geraden imaginär sind; insbesondere aber eine Kegelfläche, wenn sie sich decken. (Vergl. II, § 30.)

Jede Fläche zweiter Ordnung kann aus zwei reciproken Bündeln erzeugt werden, deren Scheitel zwei beliebige unter ihren Punkten sind; ebenso jede Fläche zweiter Classe aus zwei reciproken Ebenen, welche unter ihren Tangentialebenen sind. Wir erläutern das erstere und empfehlen dem Leser die Durchführung der dualistisch entsprechenden Betrachtung für das letztere. Sei S der eine Scheitel in der Fläche zweiter Ordnung, so legen wir zwei Schnitte K, K_1 durch ihn, welche sich im Punkte A zum zweiten Male schneiden, und denken dieselben durch projectivische

Strahlen und Ebenenbüschel k, k_1 und $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_1$ aus S und einem andern Punkte S' der Fläche erzeugt; dazu wählen wir in K zwei Punkte B, C und in K_1 zwei andere Punkte D und E, legen durch $S'A$ eine Ebene, die K in G und K_1 in H zum zweiten Male schneidet und setzen sie als dem Strahl SA entsprechend. Dann ist das Bündel S durch die vier nach B, C, D, E gehenden Strahlen reciprok zu dem Bündel S' in der Art bestimmt, dass die Strahlen $S'G$ und $S'H$ den Ebenen K oder SBC und K_1 oder SDE und der Strahl SA der Ebene $S'GH$ entspricht; den Strahlen

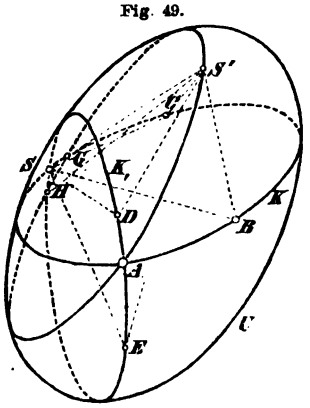
$$SB,\ SC,\ SD,\ SE$$

entsprechen somit die Ebenen

$$S'GB,\ S'GC,\ S'HD,\ S'HE.$$

Das Erzeugniss der so definierten reciproken Bündel wird von der Ebene SBC in dem Kegelschnitt K durch S, B, C, A und G, von der Ebene SDE in dem Kegelschnitt K_1 durch S, D, E, A und H geschnitten und enthält den Punkt S'. Es hat daher mit der gegebenen Fläche zweiter Ordnung auch alle durch S' gehenden Querschnitte gemein und ist folglich mit ihr identisch.

Fig. 49.



Zur Bestimmung der zwei auf der Fläche liegenden Kegelschnitte K, K_1 haben wir in der That acht Punkte gebraucht und S' ist der neunte.

Wir bemerken, dass die Bestimmung der reciproken Bündel für dieselbe Fläche auch bei festgehaltenen Scheiteln in unendlich mannigfacher Weise geschehen kann, weil schon die dem Strahl SA correspondierende Ebene $S'AGH$ willkürlich ist.

Dass mit dieser Erzeugung auch die Abbildung der Fläche auf ein Elementargebilde zweiter Stufe gegeben ist, erläutern wir unter den Beispielen.

Nach dem Früheren (II, § 39, 10) führt die Theorie der Pole und Polarebenen sofort zu der Einsicht, dass die Fläche zweiter Ordnung, das Erzeugniss reciproker Bündel, auch eine Fläche zweiter Classe, das Erzeugniss reciproker Ebenen sei; das ist

mit allen wesentlichen Consequenzen früher entwickelt und wir kommen überdies darauf zurück. (§ 84.) In Anknüpfung an die vorher entwickelte Theorie der ebenen Polarsysteme kann man darnach sofort als eine andere Art der Bildung der erzeugenden reciproken Bündel die folgende angeben: Man denke in den auf der Fläche willkürlich gewählten Scheiteln die Tangentialebenen und lege durch ihre Schnittlinie einen Querschnitt der Fläche; dann sind vier Punkte in der Ebene dieses Querschnitts und ihre vier Polaren in Bezug auf denselben Durchstosspunkte und Spuren von vier Strahlen des einen und den vier entsprechenden Ebenen des andern Bündels. (Vergl. I, § 32.) Dasselbe Ergebniss, die Identität dieser Erzeugnisse, haben wir in § 57 in der Untersuchungsform der projectivischen Coordinaten gefunden.

Wir erörtern noch die Besonderheiten der Erzeugnisse, welche aus der Verbindung solcher Gebilde zweiter Stufe hervorgehen, welche in einer der drei Arten von singulärer Reciprocität stehen, die wir früher definiert haben.

Im Fall der Reciprocität ebener Systeme Σ, Σ' mit singulären Linien (I, A) Ueberblick, p. 116) s_1, s_2', denen alle Punkte der jedesmaligen andern Ebene entsprechen, während ihren Punkten Strahlbüschel aus projectivisch zugeordneten Punkten der andern singulären Linie entsprechen, erkennt man, dass die entstehende Fläche zweiter Classe berührt wird von allen durch s_1 und von allen durch s_2' gehenden Ebenen, so wie von allen den Ebenen, welche durch je eine der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte in den projectivischen Reihen s_1, s_2' hindurchgehen, so dass die singulären Linien und diese Verbindungsgeraden sämmtlich der Fläche angehören. Man erhält also als speciellen Fall der allgemeinen Erzeugung aus reciproken Ebenen die Construction der Regelflächen zweiten Grades in II, § 35. Wenn insbesondere s_1, s_2' in der Schnittlinie von Σ, Σ' sich schneiden, so entsteht ein Kegelschnitt als Fläche zweiter Classe, als umhüllt von allen Ebenen durch seine Tangenten; und wenn in der Projectivität der Reihen in s_1, s_2' der Schnittpunkt sich selbst zugeordnet ist, ein Paar von Strahlbüscheln als Enveloppe aller durch ihre Strahlen gehenden Ebenen oder was dasselbe ist zwei Punkte mit allen durch sie gehenden Ebenen.

Im Fall der Reciprocität mit singulären Punkten S_1, S_2', deren jedem eine unbestimmte Gerade der andern Ebene und deren Geraden die Punkte anderer projectivisch zugeordneter Geraden durch den singulären Punkt der andern Ebene entsprechen, löst sich die Fläche zweiter Classe auch in die Punkte S_1, S_2' als Enveloppe aller durch sie gehenden Ebenen auf.

Wenn endlich die Reciprocität eine solche mit singulärem Punkt S in singulärer Linie s ist, so erhält man Analoges. Die entsprechenden singulären Reciprocitäten zwischen den Bündeln liefern die dualistisch entsprechenden Specialitäten der Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und der Fläche selbst: Regelfläche, Kegel, Ebenenpaar.

Die speciellen Formen zeigen als wesentlichen unterscheidenden Character, dass sie respective mit einer Reihe zwei vereinigte Punkte als Schnitt, mit einem Ebenenbüschel zwei vereinigte Ebenen als Tangentialebenen, mit einem Strahlbüschel zwei vereinigte Strahlen als Tangenten gemein haben, wenn wir die Ebenen durch den Kegelscheitel als Tangentialebenen des Kegels ansehen, wie es für den Kegel als Fläche zweiter Ordnung geschehen muss (vergl. II, §§ 20, 29), und dualistisch die Punkte der Kegelschnittebene.

Wir zeigen noch den algebraischen Ausdruck der entwickelten Construction.

Für $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \ldots$ als homogene lineare Functionen der vier Variabeln x_i oder ξ_i repräsentieren die Gleichungen

$$\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \lambda_3\mathbf{A}_3 = 0, \quad \mu_1\mathbf{B}_1 + \mu_2\mathbf{B}_2 + \mu_3\mathbf{B}_3 = 0$$

zwei ebene Systeme oder zwei Bündel, und wenn die Parameter λ_i, μ_i derselben in einer solchen linearen Abhängigkeit stehen, dass zwei Werthe der Verhältnisse der λ_i eine Werthgruppe für diejenigen der μ_i bestimmen, wie in

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)\mu_1 + (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3)\mu_2 + (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3)\mu_3 = 0,$$

so sind sie zu einander reciprok. Dem Werthgruppenpaare λ_i', λ_i'' entspreche die Gruppe μ_i, so dass man hat

$$\lambda_1'\mathbf{A}_1 + \lambda_2'\mathbf{A}_2 + \lambda_3'\mathbf{A}_3 = 0, \quad \lambda_1''\mathbf{A}_1 + \lambda_2''\mathbf{A}_2 + \lambda_3''\mathbf{A}_3 = 0,$$

$$\mu_1\mathbf{B}_1 + \mu_2\mathbf{B}_2 + \mu_3\mathbf{B}_3 = 0,$$

$$(a_1\lambda_1' + a_2\lambda_2' + a_3\lambda_3')\mu_1 + (b_1\lambda_1' + \cdot\cdot)\mu_2 + (c_1\lambda_1' + \cdot\cdot)\mu_3 = 0,$$

$$(a_1\lambda_1'' + a_2\lambda_2'' + a_3\lambda_3'')\mu_1 + (b_1\lambda_1'' + \cdot\cdot)\mu_2 + (c_1\lambda_1'' + \cdot\cdot)\mu_3 = 0.$$

Setzt man aus den ersten Gleichungen die Werthe

$$\lambda_3' = -\frac{\lambda_1'\mathbf{A}_1 + \lambda_2'\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_3}, \quad \lambda_3'' = -\frac{\lambda_1''\mathbf{A}_1 + \lambda_2''\mathbf{A}_2}{\mathbf{A}_3}$$

in die letzten ein, so entstehen

$$\begin{aligned}
&\{\lambda_1'(a_1\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(a_2\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_2)\}\mu_1 \\
+\ &\{\lambda_1'(b_1\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(b_2\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_2)\}\mu_2 \\
+\ &\{\lambda_1'(c_1\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(c_2\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_2)\}\mu_3 \qquad = 0, \\
&\{\lambda_1''(a_1\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2''(a_2\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_2)\}\mu_1 + \text{etc.} = 0;
\end{aligned}$$

und die Elimination der μ_i zwischen diesen und der Gleichung in den $\mathbf{B}_i$ giebt

$$\begin{vmatrix}
\lambda_1'(a_1\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(a_2\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_2), & \lambda_1''(a_1\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2''(a_2\mathbf{A}_3 - a_3\mathbf{A}_2), & \mathbf{B}_1 \\
\lambda_1'(b_1\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(b_2\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_2), & \lambda_1''(b_1\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2''(b_2\mathbf{A}_3 - b_3\mathbf{A}_2), & \mathbf{B}_2 \\
\lambda_1'(c_1\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2'(c_2\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_2), & \lambda_1''(c_1\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_1) + \lambda_2''(c_2\mathbf{A}_3 - c_3\mathbf{A}_2), & \mathbf{B}_3
\end{vmatrix} = 0,$$

oder durch Zerlegung und Unterdrückung der Factoren $\mathbf{A}_3$ und $(\lambda_1'\lambda_2'' - \lambda_1''\lambda_2')$

$$\begin{vmatrix} a_2, a_3, \mathbf{B}_1 \\ b_2, b_3, \mathbf{B}_2 \\ c_2, c_3, \mathbf{B}_3 \end{vmatrix} \mathbf{A}_1 + \begin{vmatrix} a_3, a_1, \mathbf{B}_1 \\ b_3, b_1, \mathbf{B}_2 \\ c_3, c_1, \mathbf{B}_3 \end{vmatrix} \mathbf{A}_2 + \begin{vmatrix} a_1, a_2, \mathbf{B}_1 \\ b_1, b_2, \mathbf{B}_2 \\ c_1, c_2, \mathbf{B}_3 \end{vmatrix} \mathbf{A}_3 = 0.$$

Es ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche durch die Scheitel beider Bündel geht, oder einer Fläche zweiter Classe, welche beide Ebenen berührt etc. wie vorher.

1) Die Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene knüpft sich an die Erzeugung aus reciproken Bündeln einfach dadurch, dass bei einer sich selbst parallelen Verschiebung des einen Bündels an den Scheitel des andern der Kegel der Strahlen, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, offenbar der vom Scheitel nach dem unendlich fernen Querschnitt der in der ursprünglichen Lage erzeugten Fläche zweiter Ordnung gehende Kegel ist. Wenn derselbe reell und ein eigentlicher Kegel ist, so ist die Fläche ein Hyperboloid; ist er ein reelles oder ein nicht reelles Ebenenpaar, so ist sie ein Paraboloid; ist er kein Ebenenpaar und nicht reell, so ist sie ein Ellipsoid.

Es fällt hiernach nicht schwer, reciproke Bündel so anzuordnen, dass Flächen zweiter Ordnung von bestimmten Typen entstehen.

2) Man bildet ein einfaches Hyperboloid, indem man für a und $\mathbf{E}$ als ineinanderliegende Elemente in S und für $\mathbf{A}'$ und e' als die entsprechenden in S' die Strahlen a und e' zur Deckung bringt, ohne auch $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{E}$ zusammenfallen zu lassen.

Welche Fläche entsteht, wenn auch die Ebenen **A'** und **E** vereinigt liegen?

Wenn ein ebenes System einem Bündel reciprok ist, so dass ihren Punkten die Ebenen desselben entsprechen, so umhüllen die Parallelebenen der letzteren durch die entsprechenden Punkte der ersteren ein Paraboloid; desgleichen die Normalebenen durch die Punkte des ebenen Systems zu den entsprechenden Strahlen eines ihr collinearen Bündels.

Wenn eine Ebene und ihre Normale sich um ihren Schnittpunkt drehen und ihre Spuren in zwei beliebigen Ebenen stets durch eine Ebene verbunden werden, so umhüllt diese eine Fläche zweiten Grades.

3) Man zeige, dass die Entstehung der Kugel über dem Durchmesser SS' aus zwei reciproken Bündeln, deren eines das orthogonale vom andern ist, einen speciellen Fall hiervon bildet. (II, § 43, 20.)

Der Kegel der Strahlen der absoluten Richtungen aus einem der Scheitel geht nach ihrem unendlich fernen Querschnitt, derjenige aus dem Mittelpunkt insbesondere ist ihr Asymptotenkegel.

Wenn man von zwei congruenten Bündeln von Strahlen und Ebenen aus verschiedenen Scheiteln und in beliebiger Lage jeden dem Normalenbündel des andern reciprok zuordnet, so hat man zwei reciproke Bündel hergestellt, in denen der Winkel zweier Strahlen des einen gleich ist dem Winkel der entsprechenden Ebenen des andern. Es giebt in denselben immer je einen Strahl, der zu seiner entsprechenden Ebene im andern normal ist. Das Erzeugniss solcher zwei reciproken Bündel ist als den absoluten Kreis doppelt berührend eine Rotationsfläche zweiten Grades (vergl. II, § 43 und oben § 71), deren Axe zu diesen Strahlen parallel ist; auch ist sie stets die kleinere Axe des Meridiankegelschnittes.

Jedes abgeplattete Rotationsellipsoid wird von seinen in der Rotationsaxe liegenden Scheiteln oder Polen aus durch gleichwinklige reciproke Strahlenbündel erzeugt; ebenso jedes zweifache Rotationshyperboloid, dessen reelle Hauptaxe kleiner ist als die imaginäre.

Diese Erzeugung verbindet die Kugel mit den gleichseitigen Rotationshyperboloiden; man drehe das eine der beiden Bündel, die die Kugel erzeugen, bei denen also die Ebenen des einen normal sind auf den entsprechenden Strahlen des andern, um einen seiner Strahlen um 180^0; dann entsteht aus dem Schnitt der entsprechenden Strahlen und Ebenen beider das Rotationsellipsoid einer gleichseitigen Hyperbel und zwar ein einfaches oder zweifaches, je nach dem der als Rotationsaxe benutzte Strahl von dem gemeinsamen Strahl der Bündel um mehr oder weniger als 45^0 abweicht. Ist diese Abweichung 45^0, so entsteht der gleichseitige Rotationskegel.

4) Der Satz: Die Pole aller Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine andere Fläche zweiter Ordnung bilden eine Fläche zweiter Ordnung — ergiebt sich aus der entwickelten Erzeugungsweise.

5) Wenn man dem einen der erzeugenden Bündel ein ebenes Punktsystem $\mathbf{E}'$ projectivisch (oder geradezu perspectivisch) zuordnet, so entspricht jedem Punkte desselben ein Punkt der Fläche und jenes kann als eine eindeutige punktweise Abbildung der Fläche zweiter Ordnung bezeichnet werden. Einer geraden Reihe g' in $\mathbf{E}'$ entspricht ein zu ihr projectivisches Strahlenbüschel im ersten und ein solches Ebenenbüschel im zweiten Bündel und somit Punkt für Punkt das Erzeugniss beider, ein durch den Scheitel des ersten Bündels gehender Querschnitt der Fläche. Dem Schnitt der bezüglichen Tangentialebene der Fläche als zwei reellen oder imaginären Strahlen des ersten Bündels entsprechen zwei feste Punkte in $\mathbf{E}'$, die Fundamentalpunkte der Abbildung; zugleich Ausnahmepunkte derselben, insofern ihnen Reihen von unendlich vielen Punkten der Fläche entsprechen. Jeder andere ebene Schnitt der Fläche erscheint als Kegelschnitt durch diese zwei Punkte, oder ihre dreifach unendlich vielen Querschnitte entsprechen den sämmtlichen Kegelschnitten in $\mathbf{E}'$, die durch diese gehen. Die Büschel von Strahlen durch den einen und den andern sind die Bilder der geraden Erzeugenden der Fläche und zwar repräsentieren die eines jeden eine Regelschaar, zu der auch die im andern Fundamentalpunkt abgebildete Gerade gehört. (Vergl. § 43 f.)

Die Bilder aller ebenen Querschnitte auf die dem Durchmesser des Centrums conjugierte Diametralebene sind ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte; von den Nabelpunkten auf die cyklischen oder Kreisschnitt-Ebenen (und also bei der Kugel stets) Kreise.

6) Man erläutere die Besonderheit der Abbildung, welche einer Kegelfläche zweiten Grades entspricht.

7) Man vergleiche die so erhaltene Abbildung mit der stereographischen Projection in II, § 34, § 44, 14, resp. zeige ihre Identität im allgemeinen Fall der letzteren.

8) Wenn die Scheitel der Bündel die F.-Punkte A_1 und A_2 sind, so dass die Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ als die F.-Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und die $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ als $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ gewählt werden können, so erhält man als Gleichung der erzeugten Fläche

$$\begin{vmatrix} a_2, a_3, x_1 \\ b_2, b_3, x_3 \\ c_2, c_3, x_4 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_3, a_1, x_1 \\ b_3, b_1, x_3 \\ c_3, c_1, x_4 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} a_1, a_2, x_1 \\ b_1, b_2, x_3 \\ c_1, c_2, x_4 \end{vmatrix} x_4 = 0$$

und mit den Abkürzungen $(a_i b_k)$ für $a_i b_k - a_k b_i$, etc.

$$x_2 x_4 (a_2 b_3) + x_2 x_3 (a_3 c_2) + x_1 x_2 (b_2 c_3) + x_3 x_4 \{(a_3 b_1) + (a_2 c_1)\} + x_3^2 (a_1 c_3) + x_1 x_3 (b_3 c_1) + x_4^2 (a_1 b_2) + x_1 x_4 (b_1 c_2) = 0.$$

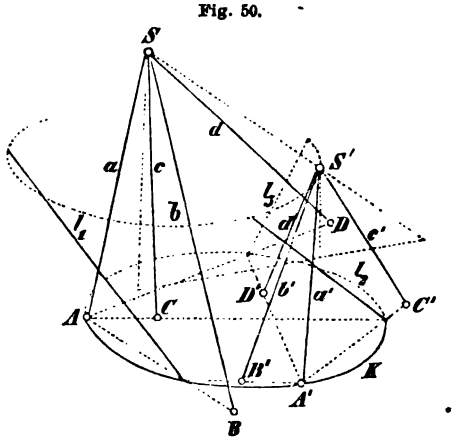
Wenn man hat $a_1 c_3 = a_3 c_1$ und $a_1 b_2 = a_2 b_1$, so geht die Fläche auch durch die F.-Punkte A_3, A_4, etc. (Vergl. § 29, 1 f. und § 87.)

78. Wir untersuchen ferner die Erzeugnisse von zwei nicht ineinanderliegenden collinearen Gebilden

zweiter Stufe, also von zwei collinearen Ebenen und von zwei collinearen Bündeln. In beiden Fällen entsteht zuerst ein System von zweifach unendlich vielen Strahlen, dort als Verbindungslinien entsprechender Punkte, hier als Schnittlinien entsprechender Ebenen — also eine Congruenz nach § 30. Und es entsteht zweitens durch diejenigen Paare entsprechender Strahlen beider Gebilde, welche durch einen Punkt der Schnittlinie der Ebenen dort gehen, respective in einer Ebene des gemeinsamen Strahls beider Bündel liegen, eine einfach unendliche Folge von Ebenen dort, also eine developpable Fläche, und eine einfach unendliche Reihe von Punkten hier, also eine Curve.

Die Erzeugnisse des einen Falles sind wie die erzeugenden Gebilde dualistisch entsprechend denen des andern. Betrachten wir zunächst den Fall der collinearen Bündel von den Scheiteln S, S' (Fig. 50), wo den Strahlen a, b, c, d, x des ersten die Strahlen a', b', c', d', x' des zweiten entsprechen. Einem Ebenenbüschel des ersten Bündels $(a.bcd..)$ entspricht das ihm projectivische des zweiten $(a'.b'c'd'..)$ und beide erzeugen mit einander als Theil der entstehenden Strahlencongruenz die die Geraden a, a' schneidende Regelschaar ab, $a'b'$; ac, $a'c'$; etc. (In der Figur l_1, l_2, l_3; ihre Querschnitte mit einer Ebene K und mit der Parallelebene derselben durch den Scheitel S' sind auch angedeutet.) Ein zweites Paar solcher Ebenenbüschel bringt eine zweite Regelschaar hervor, welche mit der ersten einen Strahl gemein hat; z. B. $(b.acd..)$ und $(b'.a'c'd'..)$ die die b, b' schneidende Regelschaar ba, $b'a'$; bc, $b'c'$ bd, $b'd'$; etc., deren erstgenannter Strahl auch der vorigen angehört.

Fig. 50.



Denken wir nun die Curve dritter Ordnung, in welcher sich in Folge dessen die Hyperboloide H_a, H_b beider

Regelschaaren noch durchdringen, so ist ein beliebiger Punkt P derselben zugleich der Schnittlinie von zwei Ebenen aP und $a'P$ des ersten und zweiten Bündels aus den Büscheln a und von zwei entsprechenden Ebenen bP und $b'P$ der Büschel b angehörig, d. h. er ist der Schnittpunkt von zwei sich entsprechenden Strahlen beider Bündel. In Folge dessen muss er aber allen den vorbezeichneten Regelschaaren oder Hyperboloiden H_c, H_x, etc. zugleich angehören, weil die Scheitelkanten x, x' zweier entsprechenden Ebenenbüschel stets xP und $x'P$ als zwei entsprechende Ebenen liefern und somit eine durch P gehende Erzeugende ihrer Regelschaar oder des Hyperboloides H_x hervorbringen.

Diese Curve ist also allen den einfachen Hyperboloiden gemein, welche aus den Paaren entsprechender projectivischer Ebenenbüschel der beiden Bündel entstehen; sie wird zur Gesammtdurchdringung irgend zweier unter ihnen ergänzt durch eine Gerade, die der Schnitt der entsprechenden Ebenen durch die Paare ihrer Scheitelkanten ist; eine Bisekante der Curve. In der That, jeder Strahl der Congruenz hat mit dieser Curve dritter Ordnung zwei Punkte gemein und kann daher auch als eine Sehne derselben bezeichnet werden; denn in der Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen der Bündel bringen die in denselben liegenden correspondierenden Strahlbüschel zwei vereinigte projectivische Reihen hervor, deren sich selbst entsprechende Punkte, die Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare in ihr, der Curve angehören müssen; jenachdem sie reell oder vereinigt oder nicht reell sind, wird man den Strahl als Sehne, Tangente oder ideale Sehne der Curve bezeichnen.

Da die Punkte der Curve einzeln in den durch den gemeinsamen Strahl SS' oder o, p' der Bündel gehenden Ebenen liegen, so können wir zu ihrer Construction das Büschel dieser Ebenen und die ihm in beiden Bündeln entsprechenden Büschel von den respectiven Scheitelkanten p, o' benutzen; die Büschel o, o' erzeugen aber mit einander einen Kegel zweiter Ordnung, der die Scheitelkanten o, o' enthält, und ebenso die Büschel p, p' einen solchen durch diese, Kegel also, welche die gerade Linie SS' oder (o, p') gemein haben und deren übrige gemeinsame Punkte unsere Curve dritter Ordnung bilden (II, § 21), die zugleich die beiden collinearen Bündel S und S' mit

op und o, p' zusammen bestimmen. Diese Kegel sind die dem Scheitelstrahl entspringenden Hyperboloide $\mathbf{H}_o$, $\mathbf{H}_p$ der allgemeinen Construction. Es ist überdiess evident, dass die entsprechenden Ebenenbüschel beider Bündel durch ein beliebiges sich in der Curve schneidendes Strahlenpaar einen Kegel zweiter Ordnung bilden, der alle andern Punkte der Curve enthält und den gegebenen zur Spitze hat; mit andern Worten, dass der projicierende Kegel aus einem Punkt der Curve ein Kegel zweiter Ordnung ist. (II, § 24, 5.) In der That giebt die Construction des Curvenbildes nach II, § 21 und p. 182 für das in ihr gelegene Centrum (M' auf S, $M^{*\prime}$ auf S^*) seine Entstehung aus projectivischen Strahlbüscheln. Diess zeigt in Verbindung mit dem Vorigen, dass die Punkte S, S' als Punkte der Curve sich von den übrigen nicht unterscheiden, und dass das Strahlensystem unserer Curve von zwei beliebigen Punkten derselben aus durch collineare Bündel projiciert wird; ihre entsprechenden Strahlen bilden die zweiten Regelschaaren der von den Strahlen der Congruenz erfüllten Hyperboloide.

Eine beliebige Ebene des Raumes enthält drei Strahlen derselben (also auch drei Punkte der Curve), von denen einer und der Schnittpunkt der beiden andern Strahlen nothwendig reell ist; denn diese Strahlen sind die sich selbst entsprechenden Geraden in den beiden collinearen ebenen Systemen, welche von den Bündeln S, S' in dieser Ebene erzeugt werden. Man sieht daraus zugleich, dass es auch imaginäre Bisekanten giebt, die in Paaren conjugiert sind, und die natürlich aus den imaginären entsprechenden Ebenen der Büschel entstehen, deren Scheitelkanten sich auf der Curve schneiden.

Und durch einen beliebigen Punkt P des Raumes geht ein Strahl derselben Congruenz, den man wie folgt construiert: Man bestimmt zum Strahl SP oder x den entsprechenden Strahl x' und in dem Büschel um x in der Ebene von x' nach P die entsprechende; sie schneidet jene in der gesuchten Geraden. Das Bild der Raumcurve dritter Ordnung ist daher stets eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt; derselbe kann jedoch isoliert sein, die projicierende Bisekante eine in conjugiert imaginären Punkten schneidende. (Vergl. die Construction der Geraden d in II, § 25 p. 150.) Man bezeichnet daher die er-

zeugte Congruenz auch als ein Strahlensystem (1, 3) oder eine Congruenz dritter Classe und erster Ordnung. ($h = 1$, in II, § 23, *11.)

Wir erinnern (vergl. II, § 21), dass die Curve dritter Ordnung als cubische Ellipse oder Hyperbel bezeichnet wird, je nachdem von den Strahlen ihrer Bisekantencongruenz in der unendlich fernen Ebene nur einer oder alle drei Realität haben; dem letztern Fall schliessen sich durch Vereinigung die hyperbolische Parabel und die cubische Parabel (a. a. O.) an.

Für zwei collineare Ebenen Σ, Σ' ergeben sich die dualistisch entsprechenden Entwickelungen. Einer Punktreihe $(a.bcd..)$ entspricht die zu ihr projectivische Reihe $(a'.b'c'd'..)$ und erzeugt mit ihr eine Regelschaar $ab, a'b'$; $ac, a'c'$; etc. oder ein Hyperboloid $\mathbf{H}_a$; die andere Reihe $(b.acd..)$ mit $(b'.a'c'd'..)$ ebenso die Regelschaar $ba, b'a'$; $bc, b'c'$; $bd, b'd'$; etc. d. i. das Hyperboloid $\mathbf{H}_b$, das mit dem vorigen den Strahl $ba, b'a'$ gemein hat. Die von den collinearen Ebenen erzeugte Congruenz zerfällt also in unendlich viele Regelschaaren, von denen je zwei einen Strahl gemein haben. Die Verbindungsebenen entsprechender Geraden beider Ebenen müssen gemeinsame Tangentialebenen derselben und somit Tangentialebenen einer developpabeln Fläche dritter Classe sein. (II, § 47.) Ist Π eine solche Tangentialebene, gemeinschaftlich den beiden Regelflächen $\mathbf{H}_a$ und $\mathbf{H}_b$, so enthält sie die Verbindungslinie von zwei entsprechenden Punkten der ersten Reihen $a\Pi$ und $a'\Pi$ und auch die von zwei solchen $b\Pi$ und $b'\Pi$ der zweiten, ist also die Verbindungsebene von zwei entsprechenden Strahlen $\Sigma\Pi$ und $\Sigma'\Pi$ der beiden ebenen Systeme; alle die bezeichneten Regelschaaren müssen diese Ebene Π enthalten, weil zwei entsprechende Gerade x, x' der Ebenen in $x\Pi, x'\Pi$ immer ein entsprechendes Paar von Punkten haben, das eine in Π liegende Gerade der Congruenz hervorbringt.

Die Strahlen der Congruenz sind die Schnittlinien der Ebenen Π untereinander und jeder ist Schnittlinie von zwei reellen verschiedenen oder von zwei vereinigten oder zwei nicht reellen Ebenen dieser Art; denn seine Durchstosspunkte A, A in Σ, Σ' sind Träger von zwei projectivischen Strahlbüscheln entsprechender Geraden, die mit ihm zwei vereinigte projectivische Ebenenbüschel bestimmen, als deren Doppelebenen

man jene erhält; die Strahlen der Congruenz sind Doppeltangenten d. h. Schnitte der Tangentialebenenpaare — auch der conjugiert imaginären unter ihnen — der developpabeln Fläche dritter Classe; die Erzeugenden derselben gehören zu ihnen als Schnitte der unendlich benachbarten.

Da die in einer Ebene liegenden entsprechenden Geraden der Ebenen Σ, Σ' sich in ihrer Durchschnittslinie o, p' begegnen, welcher als Punktreihe die zu ihr projectivischen Reihen in zwei respective in Σ' und Σ gelegenen Geraden o', p entsprechen, so sind die Ebenen der Developpabeln die gemeinsamen Tangentialebenen von zwei Curven zweiter Classe C_o, C_p, welche aus den Reihen o und o', p und p' respective erzeugt sind und daher in Σ', Σ respective liegen und die Durchschnittslinie in zwei verschiedenen Punkten berühren. Sie sind als Tangentengebilde die der gemeinsamen Reihe entsprechenden Regelschaaren oder Hyperboloide $\mathfrak{H}_o$ und $\mathfrak{H}_p$. Diese Kegelschnitte bestimmen mit op' und o', p zusammen auch die Collineation der Ebenen Σ, Σ'. (I, § 26, p. 130.) Und wenn wir irgend eine solche Ebene betrachten, so sind die Durchstosspunkte der unendlich vielen in ihr liegenden Strahlen der Congruenz oder ihrer Schnittlinien mit allen andern Ebenen dieser Art die entsprechenden Punkte der projectivischen Reihen auf ihren Spuren in Σ, Σ'; d. h. die Tangentialebene unserer developpabeln Fläche schneidet sie in einer Curve zweiter Classe K, K'; und in irgend zwei Tangentialebenen derselben developpabeln Fläche werden durch alle übrigen zwei collineare ebene Systeme bestimmt. Die entsprechenden Geraden derselben gehören sämmtlich den zweiten Regelschaaren der Hyperboloide an, welche von den Strahlen der Congruenz gebildet werden.

Von den drei (Schmiegungs-)Ebenen der Developpabeln, die von einem beliebigen Punkt in Σ oder Σ' ausgehen, fallen zwei zusammen für die Punkte der Kegelschnitte selbst, und zwar die beiden von Σ resp. Σ' verschiedenen; und für die Punkte von o', p, nämlich die eine von diesen mit Σ' resp. Σ. Nur in den Berührungspunkten S, S' von p resp. o' mit K resp. K' fallen alle drei mit Σ, Σ' resp. zusammen, d. h. diese sind die zu Σ, Σ' resp. gehörigen Punkte der Rückkehrcurve der Developpabeln.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Strahlen der Congruenz, von denen einer und die Verbindungsebene der beiden andern nothwendig reell sind, die sich selbst entsprechenden der vereinigten collinearen Bündel aus ihm nach Σ, Σ'; in jeder Ebene liegt einer ihrer Strahlen, da die Punkte ihrer Spur s in Σ mit denen der zu dieser entsprechenden Geraden s' von Σ' eine Regelschaar bestimmen, von der ein Strahl der Ebene angehört, nämlich derjenige, dessen Durchstosspunkt in Σ' der Schnitt von s' mit der Spur der Ebene in Σ' ist. Die Congruenz heisst dritter Ordnung und erster Classe oder eine Congruenz (3, 1). ($g = 1$, II, § 23, *11.)

Noch ist ein specieller Fall zu erwähnen, der bei den collinearen Bündeln wie den collinearen Ebenen zu analogen Resultaten führt. Wenn bei den collinearen Bündeln S, S' der Scheitelstrahl sich selbst entspricht, so haben die zugehörigen vereinigten projectivischen Ebenenbüschel zwei sich selbst entsprechende Ebenen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ und die in einer derselben liegenden entsprechenden Büschel sind perspectivisch und erzeugen durch den Schnitt ihrer entsprechenden Strahlen zwei Gerade als Perspectivaxen. Irgend zwei entsprechende Ebenen der Bündel gehen durch einen und denselben Punkt der ersten wie der zweiten Geraden oder schneiden sich in einer Transversale derselben und alle Transversalen derselben werden so erzeugt. Diese beiden windschiefen Geraden vertreten als Reihen die Raumcurven dritter Ordnung des allgemeinen Falles, der Scheitelstrahl, der beide schneidet, ergänzt sie als Ort von gemeinsamen Punkten zweier entsprechenden Strahlen zur Linie dritter Ordnung; der eine scheinbare Doppelpunkt, der ihr wesentlich ist, fehlt auch hier nicht. Die Bisekanten dieser Linie sind die Transversalen der beiden windschiefen Perspectivaxen, so dass durch jeden Punkt im Raum eine derselben geht und in jeder Ebene eine derselben liegt, Congruenz (1, 1); dazu die Strahlen zweier ebenen Systeme und zweier Bündel.

Und ganz analog im Fall der collinearen Ebenen Σ, Σ' mit sich selbst entsprechender Schnittlinie. In derselben liegen dann zwei sich selbst entsprechende Punkte F_1, F_2, deren entsprechende Büschel in Σ, Σ' zu einander perspectivisch sind, so dass die Verbindungsebenen ihrer entsprechenden Paare je ein Büschel bilden. Irgend zwei entsprechende Punkte der

Ebenen liegen in einer Ebene des ersten wie des zweiten Büschels oder ihre Verbindungsgerade ist eine Transversale ihrer Scheitelkanten. Dieselben vertreten als Ebenenbüschel die Developpable dritter Classe, von der das Ebenenbüschel der gemeinsamen Geraden abgesondert ist; ihre Transversalen sind Bitangenten und durch jeden Punkt geht eine solche, in jeder Ebene liegt eine. Die Congruenz (3, 1) ist gleichfalls in eine Congruenz (1, 1) übergegangen.

Die collinearen Ebenen sind unter dieser Voraussetzung durch zwei entsprechende Dreiseite und die collinearen Bündel durch zwei entsprechende Dreikante bestimmt; die gemeinsame Gerade und die aus den drei entsprechenden Punkt- respective Ebenen-Paaren hervorgehenden windschiefen Geraden sind die vier Strahlen, welche die lineare Congruenz bestimmen; in Uebereinstimmung mit ihrer Entstehung als gemeinsam zu zwei linearen Complexen, welche wie wir wissen zu ihrer Bestimmung je fünf Strahlen erfordern (§ 33). Man sieht in dieser Auffassung die Unabhängigkeit von der Realität der Doppelelemente $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ und F_1, F_2 der vorigen Constructionen und daher der Axen der Congruenz. (Vergl. § 81.) Ihre Scheine aus zwei Punkten eines Strahls sind collineare Bündel und ihre Schnitte mit zwei Ebenen eines solchen collineare Ebenen, die ihn entsprechend gemein haben.

Hätten dagegen die collinearen Bündel nur eine Ebene entsprechend gemein, nicht aber den gemeinsamen Strahl, so erzeugen die entsprechenden projectivischen Büschel in dieser einen Kegelschnitt als Theil der Raumcurve dritter Ordnung des allgemeinen Falles; die entsprechenden Ebenenbüschel durch ein erzeugendes Strahlenpaar dieses Kegelschnittes sind perspectivisch, d. h. die Schnittlinien entsprechender Paare bilden ein Strahlenbüschel aus dem Punkte des Kegelschnittes. Die Ebenen dieser Strahlenbüschel schneiden sich in einer Geraden, die mit dem Kegelschnitt einen Punkt gemein hat. Die Schnittlinien der entsprechenden Ebenenpaare bilden eine Congruenz (1, 2), etc. Und dual; die entstehende Congruenz ist aber zweiter Ordnung erster Classe oder (2, 1). Abgesehen von einem ebenen System und einem Bündel, wie leicht zu sehen. Die erzeugte Curve ist also dritter Ordnung mit einem wirklichen und einem scheinbaren Doppelpunkt.

1) Die Tangentialebenen einer Developpabeln dritter Classe schneiden irgend zwei Doppeltangenten derselben in projectivischen Reihen; und die Punkte einer Curve dritter Ordnung werden mit irgend zwei Sehnen derselben durch projectivische Ebenenbüschel verbunden. In Folge dessen ist die Developpable dritter Classe die Enveloppe der Verbindungsebenen entsprechender Punkte in drei projectivischen Reihen von allgemeiner Lage im Raum oder von denen zwei die dritte schneiden; die Curve dritter Ordnung ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen in drei projectivischen Büscheln von allgemeiner Lage im Raum oder mit Scheitelkanten, deren zwei die dritte schneiden.

2) Man erläutere die Construction der beiden andern Punkte der Curve dritter Ordnung auf einer Ebene durch S resp. S'.

Man zeige, dass jene Punkte zusammenfallen für jede Berührungsebene der Kegel aus den Büscheln o, p' resp. o', p. Endlich, dass beide mit S resp. S' selbst zusammenfallen für die Berührungsebenen der Kegel längs des Strahles p resp. o', übereinstimmend mit der Discussion der Construction der Curve dritter Ordnung in II, § 21.

3) Im Fall der perspectivischen Lage der collinearen Bündel ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare die Perspectivebene und alle Strahlen derselben gehören als Schnitte entsprechender Ebenen zur Congruenz; bei perspectivisch collinearen Ebenen ist die Enveloppe der Verbindungsebenen entsprechender Strahlen das Perspectivcentrum und alle seine Strahlen gehören zur Congruenz.

4) Man erläutere den Fall der collinearen Bündel und Ebenen, wo der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht und die ihm angehörigen Doppelelemente vereinigt liegen: Fall der Congruenz (1, 1) mit zwei unendlich nahen windschiefen Axen.

5) Man untersuche die Erzeugnisse der singulären Collineationen des § 22 in I und zeige, dass für die mit singulärem Punkt in der einen und singulärer Geraden in der andern Ebene die Congruenz in die Strahlen des Bündels aus dem singulären Punkt und in die sämmtlichen Tangenten eines von ihm ausgehenden und die singuläre Gerade berührenden Kegels zweiter Classe zerfällt, welche die letztere schneiden; und dass die Developpable dritter Classe aus demselben Kegel und dem Ebenenbüschel von der singulären Geraden als Scheitelkante besteht. Man zeige auch, dass dasselbe Resultat durch die Voraussetzung erhalten wird, die Schnittlinie beider Ebenen op' enthalte einen sich selbst entsprechenden Punkt; sowie dass das Erzeugniss collinearer Ebenen mit singulärem Punkt in singulärer Linie (vergl. g), a. a. O.), eine Congruenz aus zwei Bündeln von den singulären Punkten aus und den sämmtlichen Transversalen der singulären Linien, und eine developpable Fläche aus drei Ebenenbüscheln mit den singulären Linien und der Verbindungslinie der singulären Punkte als Scheitelkanten, identisch ist mit

dem aus der Voraussetzung hervorgehenden, dass in der Schnittlinie der Ebenen zwei Paare entsprechender Punkte vereinigt sind.

6) Es sind die Ergebnisse der Voraussetzung specieller Lagen der singulär collinearen Ebenen Σ, Σ' in beiden Fälleu zu untersuchen und diese Betrachtungen auf den Fall reciproker Bündel und seine Erzeugnisse zu übertragen. Man erhält so sämmtliche mögliche Degenerationsformen der Developpabeln dritter Classe, der Curve dritter Ordnung und der bezüglichen Strahlencongruenzen.

7) Es giebt für zwei collineare Bündel einfach unendlich viele Ebenen, welche sie in collinearen Systemen schneiden, deren Hauptdreieck in einen Punkt und eine ihn enthaltende Gerade zusammenfällt: die Schmiegungsebenen der erzeugten Raumcurve dritter Ordnung; für ihre zweifach unendlich vielen Tangentialebenen hat das Hauptdreieck zwei zusammenfallende Seiten und zwei zusammenfallende Ecken. Ebenso sind für zwei collineare Ebenen die Punkte der Rückkehrcurve der zugehörigen Developpabeln von der Besonderheit, dass ihre projicierenden Bündel ein in einen Strahl und eine ihn enthaltende Ebene degeneriertes Hauptdreikant haben; etc.

8) Drei Ebenenbüschel mit Rechtwinkligkeit der Ebenen des ersten zu den entsprechenden des zweiten und dritten erzeugen eine Raumcurve dritter Ordnung; drei projectivisch gleiche Ebenenbüschel desgleichen. (Vergl. § 63, 2.)

9) Eine Developpable dritter Classe kann aus collinearen Ebenen oder aus zwei Kegelschnitten mit gemeinsamer Tangente construiert werden, wenn gegeben sind a) zwei Ebenen und vier Bitangenten; b) drei Ebenen und drei Bitangenten; c) fünf Ebenen und eine Bitangente; d) sechs Ebenen; c) fünf Ebenen und die Erzeugende der einen etc. Und dual.

10) Welches ist die besondere Beschaffenheit der Erzeugnisse von affinen, ähnlichen und congruenten ebenen Systemen? Speciell im Fall der parallelen Lage ihrer Ebenen?

79. Nachdem im Vorigen die Erzeugnisse der Verbindung der entsprechenden Elemente colllinearer Ebenenbündel einzeln untersucht sind, wobei ihre vollständige dualistische Gegenstellung überall hervorgetreten ist, zeigen wir nun ihre wesentliche Zusammengehörigkeit oder Identität; wir weisen nach, dass die Rückkehrkante der developpabeln Fläche dritter Classe eine Curve dritter Ordnung und dass die developpable Fläche einer Curve dritter Ordnung im Allgemeinen eine Developpable dritter Classe ist. Es genügt das eine und wir wollen den Beweis im ersten Sinne führen, empfehlen aber die Construction und Discussion der dual entsprechenden Figur für den zweiten dringend dem Leser. Wir denken drei Ebenen der

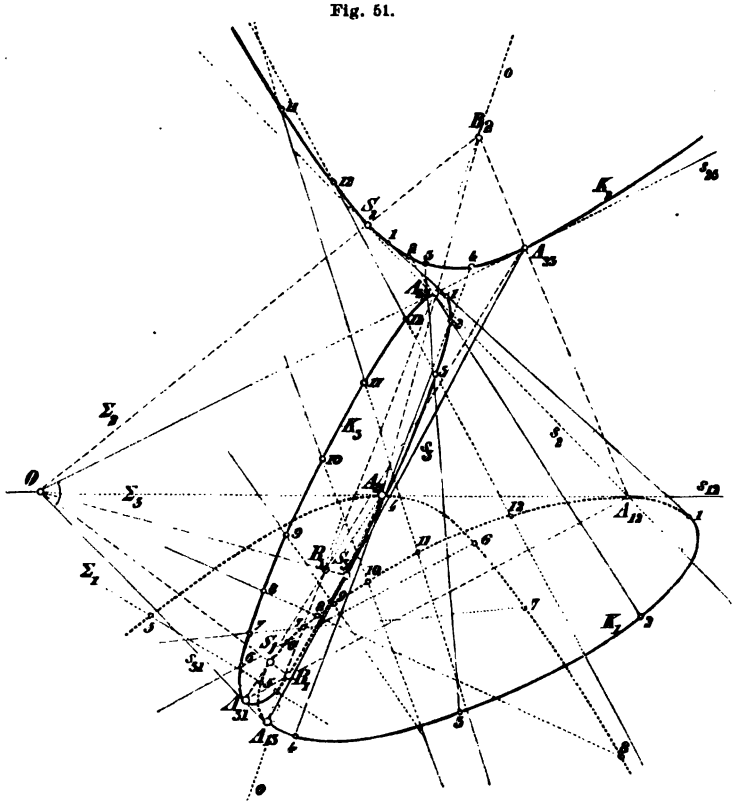
developpabeln Fläche Σ_1, Σ_2, Σ_3 mit den gegenseitigen Schnittlinien s_{12}, s_{23}, s_{31} und dem gemeinschaftlichen Punkt O, der ersten in Σ_1 entsprechend s_1 und in Σ_2 ebenso s_2, die diesen Ebenen angehörigen Erzeugenden der developpabeln Fläche, welche jéner in A_{21}, A_{12}, den Berührungspunkten mit den Kegelschnitten K_2, K_1 der Ebenen Σ_2 und Σ_1, begegnen; wir denken die Berührungspunkte dieser letzteren mit s_2, respective s_1, nämlich die den Ebenen Σ_2, Σ_1 angehörigen Punkte der Rückkehrcurve S_2, S_1, überdiess ihre Berührungspunkte A_{23}, A_{13} mit den Spuren s_{23} und s_{31} von Σ_3 in Σ_2, Σ_1 respective, und nehmen an, es seien diese Kegelschnitte und die Collineation der Ebenen Σ_2, Σ_1 bestimmt. Dann ist $A_{13}A_{23}$ oder s_3, die den Geraden s_{23}, s_{31} in Σ_3 entsprechende Gerade, die zugehörige Erzeugende, und ihr Berührungspunkt S_3 mit dem Spurkegelschnitt der Developpabeln in Σ_3, der zur Ebene Σ_3 gehörige Curvenpunkt, ist dadurch bestimmt, dass jener Kegelschnitt die Geraden s_{23} und s_{31} in A_{32} respective A_{31} berührt. (Fig. 51.)

In der Figur sind die Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 gezeichnet und so viele entsprechende Punkte derselben angegeben worden, dass die developpable Fläche und ihre Rückkehrcurve anschaulich werden können. Wenn wir von s_2, der Erzeugenden in Σ_2 oder der Geraden $A_{12}S_2A_{32}$ ausgehen, so folgt die Erzeugende 1, welche die drei Punkte 1 in K_1, 1 in K_2, 1 in K_3 verbindet, darauf ebenso die Erzeugende 2, die Erzeugenden 3 und 4, sodann s_3 oder $A_{13}A_{23}S_3$ in Σ_3, hierauf die Erzeugende 5, darnach s_1 oder $S_1A_{21}A_{31}$ in Σ_1, und der Reihe nach die Erzeugenden 6, 7, ...12. Die Figur giebt ihre Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit nach leicht erkennbaren Voraussetzungen an.

Die Rückkehrcurve der developpabeln Fläche erscheint als die Enveloppe dieser Geraden und ist daher obwohl nicht eingezeichnet leicht zu verfolgen; von oben nach unten gehend lässt sie sich so charakterisieren: Von den Geraden 11, 12 hinter der Ebene Σ_3 berührt, erreicht sie die Ebene in S_2 und geht in der Richtung der zugehörigen Tangente s_2 von K_2 osculierend durch dieselbe hindurch nach vorn, so dass die Geraden 1, 2, 3, 4 eine Reihe aufeinanderfolgender Tangenten sind; in S_3 ist sie zur Ebene Σ_3 herabgekommen und geht in der Richtung s_3 oder $A_{13}A_{23}S_3$ mit einem Element des Kegelschnitts K_3 osculierend hindurch. Ihre nächste von der Figur

angegebene Tangente 5 zeigt sie schon nach oben umbiegend, die Tangenten 6, 7 markieren ihre Rückbewegung nach rechts, so dass zwischen den Berührungspunkten von 7 und der folgenden Tangente 8 der scheinbare Doppelpunkt des Bildes der Curve liegt; 9 und 10 zeigen den entschiedenen Lauf nach

Fig. 51.



unten und zwischen 10 und 11 ist offenbar die eine Asymptote der Curve zu denken.

Man hat so in jeder der drei Ebenen Σ ein Dreiseit von Tangenten der zugehörigen Spurkegelschnitte von Developpabeln, und erhält durch Anwendung des Brianchon'schen Satzes auf diese Dreiseite den jedesmaligen zugehörigen Curvenpunkt; also in Σ_1 mittelst des Brianchon-Punktes B_1 den Curvenpunkt S_1, in Σ_2 mittelst des Brianchon-Punktes B_2 den Curvenpunkt

S_2 und in Σ_3 mittelst B_3 den Curvenpunkt S_3. Stellen wir nun die sich in B_1, B_2, B_3 respective schneidenden Diagonalen der zugehörigen Sechsseite zusammen, also

in Σ_1 $A_{31}A_{12}$, $A_{21}A_{13}$, OS_1 für B_1,
in Σ_2 $A_{12}A_{23}$, $A_{32}A_{21}$, OS_2 für B_2,
in Σ_3 $A_{23}A_{31}$, $A_{13}A_{32}$, OS_3 für B_3,

so erkennen wir, dass die Punkte B_1, B_2, B_3 zugleich in der Ebene $A_{12}A_{23}A_{31}$ und in der Ebene $A_{21}A_{32}A_{13}$ enthalten sind, dass sie also der Durchschnittslinie dieser Ebenen, sagen wir o, angehören müssen. In Folge dessen liegen die Geraden OS_1, OS_2, OS_3 in der nämlichen Ebene Oo, d. h. die drei Punkte S_1, S_2, S_3 der Rückkehrcurve einer developpabeln Fläche dritter Classe in drei beliebigen Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3 derselben liegen mit dem Schnittpunkt O dieser Ebenen in einer Ebene Ω. Mit andern Worten, weil die OS die Spuren der Schmiegungsebenen Σ_i der Curve in den zugehörigen Punkten S_i, d. h. die Tangenten der Spur der Developpabeln in ihren stationären Punkten sind: Die Tangenten der Spurcurve einer developpabeln Fläche mit einer Ebene Ω in ihren Rückkehrpunkten schneiden sich in einem Punkt O derselben.

Die Gerade o ist die Doppeltangente der Spurcurve vierter Ordnung (§§ 28, 60) und zugleich die Harmonikale des Punktes O in Bezug auf das Dreieck der Rückkehrpunkte $S_1S_2S_3$; ersteres weil die Punkte B_1, B_2, B_3 entsprechende Punkte der Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3 sind und somit ihre Verbindungsgerade zu den Strahlen der Bitangenten-Congruenz der Developpabeln dritter Classe gehört; letzteres, weil sich leicht zeigen lässt, dass die Geraden B_1S_2, B_2S_1, B_3S_3 und wieder B_2S_3, B_3S_2, B_1S_1; B_3S_1, B_1S_3, B_2S_2 sich in einem Punkt schneiden, da z. B. $B_3B_1S_1$ und OS_2B_2 perspectivische Dreiecke mit der Axe OS_2 sind und somit B_3OS_3, B_1S_2, B_2S_1 durch einen Punkt S_3^* gehen; etc.

Weil O in Ω oder $S_1S_2S_3$ schon durch Σ_1, Σ_2, die Schmiegungsebenen in S_1 und S_2 fixiert ist, so müssen die Schmiegungsebenen für alle Punkte der Rückkehrcurve der developpabeln Fläche, welche in der Ebene Ω liegen, durch O gehen, d. h. die Rückkehrcurve einer developpabeln Fläche, für welche nicht mehr als drei ihrer Ebenen durch

einen Punkt gehen, kann auch nur von der dritten Ordnung sein.

Unsere beiden Erzeugnisse collinearer Elementargebilde zweiter Stufe kommen also stets in Verbindung vor: Bei einer Raumcurve dritter Ordnung wird die Congruenz der zweifach schneidenden Geraden von zwei beliebigen Punkten der Curve aus durch collineare Bündel projiciert und zugleich wird die Congruenz der zweifachen Tangenten ihrer developpabeln Fläche von irgend zweien ihrer Schmiegungsebenen in collinearen Punktsystemen geschnitten. Die Tangenten der Curve und Erzeugenden der Developpabeln gehören beiden Congruenzen an.

Jedem Punkt des Raumes wird durch eine Curve dritter Ordnung oder eine Developpable dritter Classe eine Ebene zugeordnet, die ihn selbst enthält, die Ebene der Curvenpunkte in den drei durch ihn gehenden Schmiegungsebenen. Wir werden in § 86 sehen, dass die Reciprocität der Räume in der That diese besondere Form annehmen kann, in welcher man sagt, dass sie ein Nullsystem bilden.

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 vier Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung und $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ die zugehörigen Schmiegungsebenen, so bilden die letztern offenbar ein dem der erstern umgeschriebenes Tetraeder; aber sie bilden auch, weil S_1, S_2, S_3 mit dem Schnittpunkt von $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sagen wir mit S_4', dann S_2, S_3, S_4 mit S_1', S_3, S_4, S_1 mit S_2', endlich S_4, S_1, S_2 mit S_3' in einer Ebene liegen, ein Tetraeder, welches dem der Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 eingeschrieben ist. Wir kommen darauf zurück.

Wir wollen nur, statt auf weitere Einzelheiten einzugehen, noch bemerken, dass die betrachteten Erzeugnisse der Elementargebilde zweiter Stufe theils die Elementenzahl dieser Gebilde selbst, theils die Elementenzahl der Gebilde erster Stufe besitzen; jene die Flächen zweiter Ordnung (Punkte) und die zweiter Classe (Ebenen), sowie die Strahlencongruenzen der vorigen Untersuchung; diese die Curve dritter Ordnung (Punkte und Tangenten) und die Developpable dritter Classe (Ebenen und Erzeugende). Wenn wir nun hinzufügen, dass die ersteren bei ihrer Entstehung mit erzeugenden Gebilden zweiter Stufe perspectivisch sind, wie auch nach § 78 die letzteren mit erzeugenden Gebilden erster Stufe, so sehen wir darin sofort die

Grundlage für eine Theorie der projectivischen Beziehungen zwischen den Elementargebilden zweiter respective erster Stufe und diesen Erzeugnissen; zwischen diesen Erzeugnissen von einfach unendlicher Elementenzahl und den früher betrachteten, den Curven und Kegeln zweiten Grades, den Regelschaaren und den aus ihnen in §§ 45, 46 abgeleiteten Gebilden; und endlich zwischen diesen Erzeugnissen selbst, und eine Theorie der aus der Verbindung solcher projectivischer Gebilde hervorgehenden neuen Erzeugnisse; und wir übersehen, dass diese Untersuchungen ein grosses Gebiet ohne wesentliche Schwierigkeiten eröffnen. Sie führen zu einer Fülle von Erzeugnissen, die zum guten Theil noch nicht oder doch nicht in diesem Wege untersucht sind. Man kann leicht eine Uebersicht derselben bilden; es sind nicht weniger als 57 neue Verbindungen, von denen nur vierzehn lediglich zu Gruppen von endlicher Elementenzahl, alle andern zu neuen Curven in einer Ebene oder im Raume, Kegeln oder developpabeln Flächen überhaupt, krummen Flächen als Orte oder Enveloppen und zu Congruenzen führen; und zwar weil sieben unter ihnen zwei Gebilde in perspectivischer Lage zu einander hervorbringen, 18 Curven, 14 developpable Flächen, 7 Regelflächen und 7 andere krumme Flächen, endlich 4 Congruenzen. Die Fälle der vereinigten Lage fügen weitere Ergebnisse hinzu; wir haben einen sehr speciellen Fall, die Projectivität auf der Fläche zweiten Grades, in § 47 behandelt.

Ueber die Grundlagen der constructiven Behandlung ist nichts hinzuzufügen; die Basis ihrer analytischen Untersuchung liegt darin, dass die Punkte der Raumcurven dritter Ordnung und ihre Schmiegungsebenen ebenso leicht wie die der früher betrachteten Erzeugnisse durch einen Parameter und die Elemente der Flächen zweiten Grades und der erhaltenen Congruenzen ebenso wie die der Elementargebilde durch zwei Parameter ausgedrückt werden können; woraus sich dann die Ausdrucksform ihrer projectivischen Beziehung nach § 63 unmittelbar ergiebt. Endlich ist für die Darstellung der Erzeugnisse nur die Elimination der Parameter erforderlich.

Es ist nicht nöthig und wir hätten nicht Raum, diess hier weiter auszuführen.

1) Man erörtere, in wieweit auch die Degenerationsformen der Curven dritter Ordnung, welche in § 78 bezeichnet sind, noch developpable Flächen dritter Classe besitzen.

2) Für $x_1 x_3 = x_2^2$ und $x_2 x_4 = x_3^2$, die Erzeugnisse der Büschelpaare $x_1 = \mu x_2$, $\mu x_3 = x_2$; $x_2 = \mu x_3$, $\mu x_4 = x_3$, zwei Kegel zweiter Ordnung mit den Spitzen A_4 und A_1 und den Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als Tangentialebenen längs der gemeinsamen Kante $A_1 A_4$, etc. hat man den Parameter-Ausdruck der ihnen gemeinsamen Curve dritter Ordnung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

und erhält für eine Sehne oder Bisekante die Gleichungen

$$x_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) x_2 + \lambda_1 \lambda_2 x_3 = 0, \quad x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) x_3 + \lambda_1 \lambda_2 x_4 = 0,$$

für eine Tangente speciell

$$x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \quad x_2 - 2\lambda x_3 + \lambda^2 x_4 = 0;$$

und für die zugehörige Schmiegungsebene

$$x_1 - 3\lambda x_2 + 3\lambda^2 x_3 - \lambda^3 x_4 = 0.$$

Die analogen Gleichungen in Coordinaten ξ_i sind leicht zu bilden. Die Erörterung projectivischer Beziehungen und der Erzeugnisse bezüglicher Verbindungen ist offenbar.

3) Von der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades, welche einen Rückkehrpunkt besitzt, ist in II, § 20 und in § 25 gezeigt, dass sie durch fünf Punkte oder ihre developpable Fläche durch fünf Ebenen bestimmt ist und man hat daraus (II, § 25, 18) bereits den Schluss gezogen, dass alle Curven dieser Art und ihre developpabeln Flächen unter einander collinear und reciprok sind.

Macht man von jenen fünf Punkten den in der Curve willkürlich gewählten zum Einheitpunkt und die vier übrigen zu Fundamentalpunkten, so ergiebt sich die analytische Darstellung der Curve und ihrer Developpabeln, sowie die der umgeschriebenen und eingeschriebenen Flächen zweiten Grades sehr einfach.

Sei der Rückkehrpunkt der Curve (Fig. 52; vergl. Fig. 53 in II) der Fundamentalpunkt A_1, der Berührungspunkt der stationären Ebene A_2, der Scheitel des doppelt berührenden Kegels zweiten Grades A_3 und der Durchschnittspunkt der Rückkehrtangente mit der stationären Ebene A_4; dann ist durch

$$x_3^2 - x_2 x_4 = 0$$

ein Kegel zweiten Grades von der Spitze A_1 ausgedrückt, der den Einheitpunkt enthält und welcher von den Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$ nach den Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_4$ respective berührt wird, oder für den die Ebene $A_1 A_2 A_4$ die Polarebene von $A_1 A_3$ ist. Ebenso bezeichnet

$$x_4^2 - x_1 x_2 = 0$$

einen Kegel zweiten Grades von der Spitze A_3, welcher von $A_1 A_3 A_4$ und $A_2 A_3 A_4$ respective in $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ berührt wird oder für den $A_1 A_2 A_3$ die Polarebene von $A_3 A_4$ ist. Die Spitze des erstern liegt auf dem Mantel des zweiten und die zugehörige Berührungsebene des letztern berührt den ersten in einer von $A_1 A_3$ verschiedenen Geraden $A_1 A_4$. Die Durchdringungscurve beider Kegel ist somit die gegebene Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt.

Daher gelten für einen beliebigen Punkt dieser Curve die gleichzeitigen Relationen

$$\frac{x_4}{x_2} = \frac{x_3^2}{x_2^2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_4^2}{x_2^2} = \frac{x_3^4}{x_2^4},$$

oder für a als eine beliebige Zahl darf man die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes der Curve setzen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a^4 : 1 : a : a^2.$$

Der Punkt a und der Punkt $-a$ der Curve liegen in einer durch den Fundamentalpunkt A_3 gehenden Geraden oder der Kegel aus A_3 ist ein eigentlicher doppelt projicierender Kegel derselben; solche Punkte sind durch die Ebene $A_1 A_2 A_4$ harmonisch getrennt.

Die Tangentialebene des Kegels A_1 im Punkte a hat nach § 49 die Gleichung

$$2ax_3 - a^2 x_2 - x_4 = 0,$$

und die Tangentialebene von A_3 in demselben Punkte ist dargestellt durch

$$2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0.$$

Die Coexistenz beider Gleichungen bezeichnet die Tangente der Curve im Punkte a; setzt man in ihnen $x_3 = 0$, so erhält man für den Durchschnittspunkt derselben mit der Ebene $A_1 A_2 A_4$ die Bedingungen

$$a^2 x_2 + x_4 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0,$$

in welche nur die geraden Potenzen von a eintreten; d. h. die Tangenten der Curve in Punkten a und $-a$ schneiden sich in der Ebene $A_1 A_2 A_4$. In der That sind die Gleichungen der Tangente in $-a$

$$2ax_3 + a^2 x_2 + x_4 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0.$$

Beide Tangenten liegen in der durch die letzte Gleichung ausgedrückten Ebene und bilden also mit der Schnittlinie mit $A_1 A_2 A_4$ und mit der nach A_3 gehenden Geraden ein harmonisches Büschel.

Eliminiert man zwischen den Gleichungen

$$2ax_3 - a^2 x_2 - x_1 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0$$

die Grösse a, so erhält man eine Gleichung für den Inbegriff aller Tangenten der Raumcurve

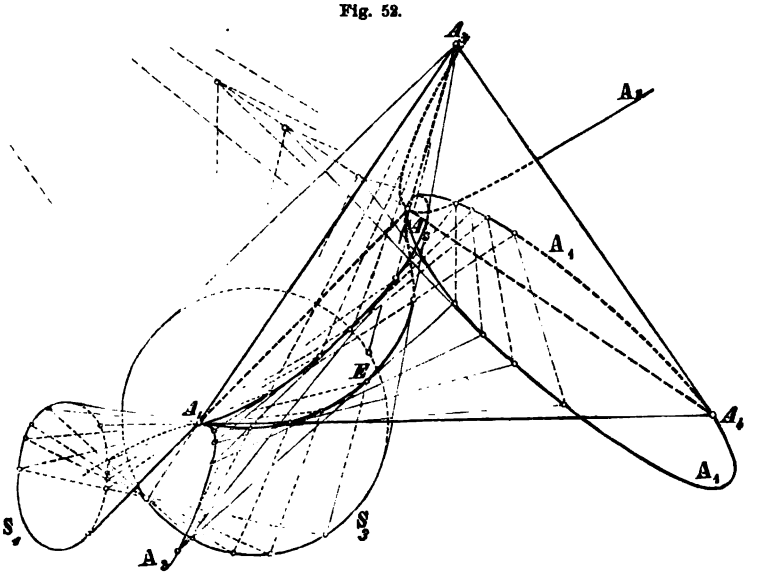
$$\{x_3 \pm \sqrt{x_3^2 - x_2 x_4}\}^2 = x_2 x_4 \pm x_2 \sqrt{x_4^2 - x_1 x_2}$$

oder in rationaler Form nach dreimaliger Ausscheidung von $x_2 = 0$ (vergl. II, § 24, *14b) ($r = 8$)

$$x_2(3x_4^2 + x_1 x_2)^2 - 8x_3^2(x_4^3 + 3x_1 x_2 x_4 - 2x_1 x_3^2) = 0.$$

Sie ist eine Gleichung fünften Grades ($r = 5$, II, § 24, *14c) und zeigt, dass die Fundamentalebenen $x_1 = 0$ (stationäre Ebene), $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ respective die Fläche schneiden 1) in der

Fig. 52.



dreifachzählenden Geraden $A_2 A_3$ und dem Kegelschnitt $\mathbf{A}_1$ (Fig. 52) von der Gleichung

$$9x_2 x_4 - 8x_3^2 = 0,$$

der also durch die Fundamentalpunkte A_2, A_4 geht und in ihnen respective die Geraden $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ berührt; 2) in der zweifach zählenden Geraden $A_1 A_4$ und der durch die Gleichung

$$x_4^3 - 2x_1 x_3^2 = 0$$

dargestellten Curve dritter Ordnung, die also in A_1 mit der Geraden $A_1 A_4$ als Tangente einen Rückkehrpunkt und in A_3 einen Inflexionspunkt mit der Tangente $A_3 A_4$ hat; 3) in der Geraden $A_1 A_4$ und dem doppelt zählenden durch die Gleichung

$$3x_4^2 + x_1 x_2 = 0$$

dargestellten Kegelschnitt (Hyperbel $\mathbf{A}_3$ in Fig. 52), der also in A_1, A_2 respective die Geraden A_1A_4, A_2A_4 berührt; 4) in der Geraden A_2A_3 und der Curve vierter Ordnung von der Gleichung

$$x_1x_2^3 + 16x_3^4 = 0.$$

Diese und die Curve dritter Ordnung in der Ebene $A_1A_3A_4$ enthält die Fig. 52 nicht; die Kegelschnitte $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$ sind punktiert, wo sie von den Flächen des Fundamentaltetraeders $A_1A_2A_3A_4$ und den Kegeln verdeckt sind, übrigens ausgezogen, wie die Raumcurve vierter Ordnung selbst auf dem Mantel des Kreiskegels. $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_3$ bezeichnen die Leitcurven der beiden Kegel A_1 und A_3, deren Durchdringung sie ist.

Verbindet man den Punkt a der Curve mit den beiden ihm unendlich nahe folgenden Punkten, so erhält man die Schmiegungsebene der Curve, die ihm entspricht und nach § 24, 1 ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_3, & x_4, & x_1, & x_2 \\ a, & a^2, & a^4, & 1 \\ da, & 2ada, & 4a^3da, & 0 \\ 0, & 2d^2a, & 12a^2d^2a, & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x_3, & x_4, & x_1, & x_2 \\ a, & a^2, & a^4, & 1 \\ 1, & 2a, & 4a^3, & 0 \\ 0, & 2, & 12a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$x_1 - 3a^4x_2 + 8a^3x_3 - 6a^2x_4 = 0.$$

Für $a = 0$ wird sie zu $x_1 = 0$ und enthält auch noch den dritten nächstfolgenden Punkt.

Die Schmiegungsebene im Punkt $-a$ ist durch

$$x_1 - 3a^4x_2 - 8a^3x_3 - 6a^2x_4 = 0$$

dargestellt und wird von der Schmiegungsebene in a in der Ebene $A_1A_2A_4$ nach einer Tangente des Kegelschnitts $\mathbf{A}_3$ geschnitten.

Soll ein Punkt P oder y_i des Raumes auf jener liegen, so hat er der Bedingung

$$y_1 - 3a^4y_2 + 8a^3y_3 - 6a^2y_4 = 0$$

zu genügen, und da diese eine Gleichung vom vierten Grade in a ist, so gehen durch jeden Punkt des Raumes vier Schmiegungsebenen der Curve. (II, § 24, *14c, $n = 4$.)

Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Wurzeln dieser Gleichung, so gelten die vier Gleichungen ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$x_1 - 3a_i^4x_2 + 8a_i^3x_3 - 6a_i^2x_4 = 0$$

mit der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & a_1^4, & a_1^3, & a_1^2 \\ 1, & a_2^4, & a_2^3, & a_2^2 \\ 1, & a_3^4, & a_3^3, & a_3^2 \\ 1, & a_4^4, & a_4^3, & a_4^2 \end{vmatrix}.$$

Unter derselben Bedingung gehen aber auch die Ebenen

$$x_1 - 3a_i^4 x_2 - 8a_i^3 x_3 - 6a_i^2 x_4 = 0,$$

die Schmiegungsebenen in den Punkten $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$, $-a_4$ durch einen Punkt P^*. Die Gerade durch PP^* geht durch A_3 und P und P^* sind durch A_3 und die Ebene $A_1A_2A_4$ harmonisch getrennt. (Vergl. II, § 25.)

Durch die Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt gehen unendlich viele Flächen zweiten Grades, ein Flächenbüschel, dessen Gleichung die lineare Verbindung der Gleichungen beider Kegelflächen ist

$$(x_4^2 - x_1x_2) + k(x_3^2 - x_2x_4) = 0.$$

Durch jeden Punkt im Raum geht eine derselben; für $k = 0$ und $k = \infty$ erhält man die beiden Kegel.

Ist y der Schnittpunkt der beiden Tangenten der Curve in den Punkten a und $-a$, so gelten gleichzeitig

$$\begin{aligned} a^2y_2 - 2ay_3 - y_4 &= 0, \\ -a^2y_2 - 2ay_3 - y_4 &= 0, \\ -y_1 - a^4y_2 + 2a^2y_4 &= 0, \end{aligned}$$

oder man hat

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = -3a^4 : 1 : 0 : -a^2$$

und dieser Punkt liegt also in einer Fläche des Büschels, wenn man hat $k = -4a^2$, d. h. in der Fläche

$$x_4^2 - x_1x_2 - 4a^2(x_3^2 - x_2x_4) = 0.$$

Es ist evident, dass dieselbe auch die beiden Tangenten der Curve in a und $-a$ selbst enthält.

4) Man interpretiere die vorigen Entwickelungen in den ξ_i und zähle die entsprechenden Eigenschaften der developpabeln Fläche der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt auf.

5) Man erörtere die Beziehung der Gebilde dieser Art auf sich selbst durch projectivische Zuordnung ihrer Elemente und zeige ihre Construction.

6) Man weise nach, dass bei solcher Zuordnung insbesondere gleichartiger Elemente als Doppelelemente keine andern als die bereits bekannten imaginären Elemente vorkommen.

7) Die Verbindungslinien von zwei projectivischen Punktreihen, deren eine auf einem Kegelschnitt, die andere auf einer Raumcurve dritter Ordnung liegt, oder von zwei projectivischen Punktreihen auf zwei Raumcurven dritter Ordnung erzeugen windschiefe Regelflächen fünften respective sechsten Grades. Denn denkt man eine beliebige Gerade h des Raumes als Scheitelkante einer Ebene, so schneidet diese die eine Curve in zwei respective drei Punkten, denen je ein Punkt der andern Curve entspricht,

und dieser liefert mit h verbunden eine andere Ebene in der Art, dass um h zwei Systeme von Ebenen entstehen, so dass jeder Ebene des einen drei und jeder des andern zwei oder auch drei des andern entsprechen; beide Systeme in einer algebraischen Abhängigkeit nach 2) und § 42. Daher fallen fünf respective sechs Ebenen des Büschels um h mit ihren entsprechenden zusammen, d. h. fünf respective sechs Erzeugende der betrachteten Regelfläche werden von h geschnitten.

8) Wann wird die Regelfläche vierten Grades aus zwei projectivischen Kegelschnitten zur developpabeln Fläche der Raumcurve dritter Ordnung? (Vergl. Fig. 51.)

80. Die nähere Untersuchung der projectivischen Elementar-Gebilde dritter Stufe wollen wir mit der der Collineation und ihrer Erzeugnisse beginnen. Wir gehen nicht noch einmal auf ihre Construction ein (§ 3), sondern resumieren dieselbe nur, um die sich selbst entsprechenden Elemente beider Räume daraus zu bestimmen, deren Zahl wir schon kennen (§ 69). Die Punktegruppen A_1, A_1'; A_2, A_2'; A_3, A_3'; A_4, A_4'; E, E' liefern den dem Punkt P entsprechenden Punkt P' durch die Projectivitäten der Ebenenbüschel

$$(A_1A_2.A_3A_4EP),\ (A_1'A_2'.A_3'A_4'E'P');$$
$$(A_2A_3.A_1A_4EP),\ (A_2'A_3'.A_1'A_4'E'P');$$
$$(A_3A_1.A_2A_4EP),\ (A_3'A_1'.A_2'A_4'E'P'),$$

welche drei einfache Hyperboloide hervorbringen, die durch die Geraden

$$A_1A_2,\ A_1'A_2';\ \mathbf{A_4A_4'},\ \mathbf{A_3A_3'},\ (A_1A_2E,\ A_1'A_2'E');$$
$$A_2A_3,\ A_2'A_3';\ \mathbf{A_4A_4'},\ \mathbf{A_1A_1'},\ (A_2A_3E,\ A_2'A_3'E');$$
$$A_3A_1,\ A_3'A_1';\ \mathbf{A_4A_4'},\ \mathbf{A_2A_2'},\ (A_3A_1E,\ A_3'A_1'E')$$

respective bestimmt sind, nämlich immer zwei der einen und drei der andern Regelschaar, und welche eine Gerade $\mathbf{A_4A_4'}$ gemeinsam haben; die Ebenen A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_1P schneiden aus ihnen der Reihe nach Erzeugende heraus, die auch auf den Ebenen $A_1'A_2'P'$, $A_2'A_3'P'$, $A_3'A_1'P'$ liegen. Die vier gemeinsamen Punkte dieser drei Hyperboloide entsprechen sich selbst; wir nennen sie die Hauptpunkte W, X, Y, Z und ihre Verbindungsebenen die Hauptebenen der Räume. (Vergl. p. 467.)

Zu ihrer Ermittelung wird man sich der Hülfsebenen des Büschels $\mathbf{A_4A_4'}$ bedienen; eine solche Hülfsebene $\mathbf{H_i}$ schneidet aus jedem der drei einfachen Hyperboloide eine Gerade $g_{i1}, g_{i2},$

g_{ik} der ersten Schaar, so dass die drei Schnittpunkte derselben Punkte der Durchdringungscurven dritter Ordnung derselben sind; die Vereinigung dieser Punkte constituiert einen Hauptpunkt; man wird also die Veränderung des Dreiecks der g_{ik} bei der Drehung der Hülfsebene resp. seine Umwendung beobachten und damit den entsprechenden gemeinsamen Punkt — sagen wir W — der besagten Curven möglichst genau ermitteln.

Aus der bekannten Lage von W finden wir durch Linealconstruction (vergl. § 69) die Verbindungsebene der drei andern Hauptpunkte XYZ als Ort der Perspectivcentra entsprechender Reihen durch den Punkt W; man wird zu drei Geraden also, etwa WA_1, WA_2, WA_3, auf denen ihre Schnittpunkte A_1^*, A_2^* A_3^* mit den Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ markiert werden, die entsprechenden WA_1', WA_2', WA_3' mit ihren Schnittpunkten $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}$ in den Ebenen $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$ verzeichnen und in den Durchschnittspunkten der Geraden A_1A_1', $A_1^*A_1^{*\prime}$; A_2A_2', $A_2^*A_2^{*\prime}$; A_3A_3', $A_3^*A_3^{*\prime}$ drei Punkte der Ebene XYZ erhalten. Diese Ebene schneidet unsere Hyperboloide in drei Kegelschnitten eines Büschels, dessen einen Grundpunkt in der Geraden $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_4'$ man kennt und die durch je vier andere Punkte bestimmt sind; die drei andern Grundpunkte, bei deren Ermittelung man nach § 69 verfahren kann, bilden die Gruppe XYZ.

Die dual entsprechende Construction führt in analoger Weise zum Ziel. Die projectivischen Punktreihen

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{E}\mathbf{P}),\ (\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'.\mathbf{A}_3'\mathbf{A}_4'\mathbf{E}'\mathbf{P}') \text{ etc.}$$

erzeugen drei einfache Hyperboloide, bestimmt durch die je fünf Geraden der einen und andern Schaar

$$A_3A_4,\ A_3'A_4';\ A_4A_4',\ A_3A_3',\ (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{E},\ \mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'\mathbf{E}');$$
$$A_4A_1,\ A_4'A_1';\ A_4A_4',\ A_1A_1',\ (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{E},\ \mathbf{A}_2'\mathbf{A}_3'\mathbf{E}');$$
$$A_4A_2,\ A_4'A_2';\ A_4A_4',\ A_2A_2',\ (\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{E},\ \mathbf{A}_3'\mathbf{A}_1'\mathbf{E}');$$

die vier gemeinsamen Tangentialebenen derselben sind die Hauptebenen $\mathbf{W}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ und werden ermittelt mit Hülfe der Punkte H_i der Reihe A_4A_4'; durch jeden derselben geht eine Erzeugende der ersten Schaar und die Ebenen des Dreikants derselben sind die gemeinsamen Tangentialebenen der Hyperboloide, die von ihm ausgehen; ihre Vereinigung liefert eine Ebene $\mathbf{W}$ des Quadrupels. Nach Ermittelung derselben kann

der gegenüberliegende Hauptpunkt W durch lineare Construction gefunden werden; nämlich als Schnittpunkt der Perspectivebenen von drei Paaren entsprechender Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten in **W** liegen, als welche man natürlich etwa die Büschel an $\mathbf{WA}_1$, $\mathbf{WA}_2$, $\mathbf{WA}_3$ wählt unter Hinzufügung ihrer nach A_1, A_2, A_3 resp. gehenden Ebenen, etc. Von den drei Berührungskegeln der Hyperboloide aus W, die einer Schaar angehören und deren eine Grundebene, durch $A_4 A_4'$, man kennt, sind dann die drei andern gemeinsamen Tangentialebenen die Hauptebenen **X**, **Y**, **Z**.

Die Hauptpunkte können aus der allgemeinen linearen Substitution bestimmt werden, wenn man beide Räume auf dieselbe fundamentale Gruppe bezieht, als diejenigen Punkte, die mit ihren entsprechenden einerlei Coordinaten haben. Denn die vier Gleichungen (§ 62)

$$\mu x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4$$

geben für $x_i' = x_i$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu, & a_{12} & , a_{13} & , a_{14} \\ a_{21} & , a_{22} - \mu, & a_{23} & , a_{24} \\ a_{31} & , a_{32} & , a_{33} - \mu, & a_{34} \\ a_{41} & , a_{42} & , a_{43} & , a_{44} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

welche vier Werthe von μ liefert, für die jene verträglich sind, und die also zur Bestimmung der Coordinaten je eines sich selbst entsprechenden Punktes führen. Analog führen die Gleichungen in den ξ_i und ξ_i' zu den sich selbst entsprechenden Ebenen.

Sowie die Construction keinen Beweis für die nothwendige Realität eines der Hauptpunkte an die Hand giebt, so kann a) die biquadratische Gleichung für μ vier in Paaren conjugiert imaginäre Wurzeln haben, aus denen nur vier imaginäre Hauptpunkte hervorgehen können; die algebraische Ausdrucksweise fügt die Einsicht hinzu, dass die Verbindungsgeraden der conjugiert imaginären unter ihnen reell sein werden, dass also das Haupttetraeder, obschon weder reelle Ecken noch Flächen, doch zwei reelle Gegenkanten hat. Wäre aber b) eine Wurzel der Gleichung in μ und folglich einer der Hauptpunkte reell, so muss wie eine zweite Wurzel noch ein zweiter Hauptpunkt reell sein; nach der Construction, weil die drei übrigen

Hauptpunkte die Schnittpunkte einer Ebene mit einer Raumcurve dritter Ordnung sind, von denen stets einer reell ist. Wir können also entweder zwei oder c) vier reelle Hauptpunkte erhalten und ebenso für die Hauptebenen. Im ersten Fall sind die beiden andern Hauptpunkte conjugiert imaginär, ihre Verbindungsgerade ist also reell und die beiden von ihr nach den reellen Hauptpunkten gehenden Hauptebenen sind es auch. Im zweiten Fall sind alle Elemente, je vier Punkte und Ebenen und sechs Gerade, reell. Die dem Vorkommen gleicher Wurzeln der biquadratischen Gleichung in μ entsprechenden Fälle übergehen wir vorläufig; in der Form der wichtigsten speciellen Fälle, zu deren Betrachtung wir uns wenden, treten solche von selbst hervor, und auch zu den übrigen führen uns geometrische Betrachtungen.

Die elementaren Formen der Collineation: Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz bieten die erste Gruppe derselben dar und zu ihrer Behandlung reicht das Vorhergehende bereits aus. Denn ihre gemeinsame Besonderheit ist der Umstand, dass die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht (oder die Gegenebenen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}'$ (§ 62, 7) im Unendlichen vereinigt sind) und somit der gegenüberliegende Hauptpunkt W reell und durch lineare Construction bestimmbar ist. Zunächst für affine Räume, welche also bestimmt sind durch zwei entsprechende Tetraeder, sagen wir von den Ecken A_i resp. A_i' und den Gegenflächen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i'$. Nennen wir $\mathfrak{A}_i^*$ die durch A_i gelegte Parallelebene zu $\mathfrak{A}_i$ und ebenso $\mathfrak{A}_i^{*\prime}$ die Parallelebene durch A_i' zu $\mathfrak{A}_i'$, so liefern die Ebenen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i'$ und $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i'$ zwei parallele Durchschnittslinien und deren Verbindungsebene als Perspectivebene der Büschel von den entsprechenden Stellungen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i'$. Diese vier Perspectivebenen schneiden sich nothwendig in dem Punkt W, dem im Endlichen sich selbst entsprechenden Punkt.

Man bildet nun die collinearen Bündel aus W, die man durch vier Strahlenpaare oder Ebenenpaare bestimmt, z. B. durch die Parallelebenenpaare aus W zu den entsprechenden Flächen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_i'$ der Tetraeder, oder durch die Strahlen WA_i, WA_i' und die Paare der Parallelstrahlen zu den von den A_i, A_i' ausgehenden entsprechenden Kanten A_iA_k, $A_i'A_k'$. Das sich selbst entsprechende Dreikant und Dreiflach dieser Bündel

giebt die von W ausgehenden Kanten und Flächen des Haupttetraeders WX, WY, WZ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; X, Y, Z sind die Richtungen der erstern. Wir wissen, dass von diesen Elementen eine Kante sagen wir WX und die gegenüberliegende Fläche WYZ oder $\mathfrak{X}$ reell sein muss, indess die in dieser liegenden beiden andern Kanten und die durch jene gehenden beiden andern Flächen auch conjugiert imaginär sein können — im Zusammenhang mit der Gleichheit oder Ungleichheit des Bewegungssinnes der Räume.

Da die entsprechenden projectivischen Reihen in den Kanten des Haupttetraeders die bezüglichen Ecken zu Doppelpunkten haben, so sind sie in den Kanten WX aus W ähnliche Reihen mit dem endlichen Doppelpunkt W, d. h. für P_x, P_x' als zwei entsprechende Punkte derselben ist WP_x, WP_x' ein constantes Verhältniss ν_x; dasselbe wird durch die Schnittpunkte von WX mit einem Paar entsprechender Ebenen der gegebenen Tetraeder bestimmt. Ebenso auf WY, WZ, wenn sie reell sind, nur mit andern vom Vorigen unabhängigen Verhältnissen $\nu_y = WP_y : WP_y'$ und $\nu_z = WP_z : WP_z'$.

Das Analoge findet auch auf den entsprechenden Kanten der gegebenen Tetraeder statt, da ihre unendlich fernen Punkte sich entsprechen; es ist also für A_iA_k und $A_i'A_k'$ das Verhältniss ihrer Längen zugleich das Verhältniss der von A_i, A_i' aus gemessenen Abstände irgend zweier entsprechenden Punkte. Und da Parallelen zu diesen Kanten im ungestrichenen System Parallelen zu den entsprechenden Kanten im Bildsystem entsprechen, so kann man sagen, dass zu einer gegebenen Raumfigur eine affine gebildet wird, wenn man die Parallelcoordinaten derselben in Bezug auf irgend ein Axensystem nach beliebigen aber constanten Verhältnissen verjüngt und in Bezug auf ein als entsprechend festgesetztes neues Axensystem aufträgt. Man weiss, dass die Construction collinearer Räume nach der Ausdrucksweise der projectivischen Coordinaten ganz ebenso geschieht. (Vergl. § 62, 3.) Im Fall der Abtragung in denselben Axen sind eben diese und die Stellungen ihrer Verbindungsebenen die sich selbst entsprechenden Geraden der entstehenden affinen Figuren.

Denken wir die gegebenen Tetraeder einander ähnlich, also aus proportionalen Kantenlängen oder mit gleichen Winkeln

in gleicher Aufeinanderfolge gebildet, so haben wir die gleichsinnige von der ungleichsinnigen Aehnlichkeit zu unterscheiden; nämlich je nachdem von entsprechenden Ecken A_i, A_i' aus gesehen der entsprechende Umlaufungssinn $A_j A_k A_l$ und $A_j' A_k' A_l'$ der Gegenflächen gleich oder entgegengesetzt ist; denn daran knüpft sich der wesentliche Unterschied der beiden Fälle beim weiteren specialisierenden Uebergang zur Congruenz. Aber nach der Gleichheit entsprechender Winkel können wir zunächst an Stelle eines beliebigen Tetraeders ein trirectangulär gleichschenkliges und das ähnlich verjüngte wählen, wobei die Parallelebenen zu den Flächen der Rechtwinkel-Ecke durch die jedesmalige Gegenecke die Vervollständigung zu entsprechenden Würfeln bilden. Und wir sehen, dass als Bestimmungselemente nur erforderlich sind zwei entsprechende Punkte A, A' und durch sie gehende Gerade b, b' in entsprechenden Ebenen $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, die zugehörigen Normalen n, n', das Verhältniss ν der entsprechenden Distanzen und die Festsetzung von der Gleichheit oder Ungleichheit des Drehungssinnes. Trägt man dann von A', A auf b', b und die Normalen n', n resp. die Einheit der Länge und die Länge ν ab bis B', B und N', N, verzeichnet in $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}$ durch A', A die Normalen c', c auf b', b, um auf der ersten wiederum die Einheit bei C' und auf der zweiten die Länge ν bis C so abzutragen, dass von N' resp. N aus gesehen die 90^0-Drehungen von B' nach C' und von B nach C als von gleichem oder als von entgegengesetztem Sinn erscheinen, so hat man für gleichsinnige resp. ungleichsinnige Aehnlichkeit die zur Construction dienenden entsprechenden trirectangulären gleichschenkligen Tetraeder gebildet. Man erhält aus ihnen den im Endlichen liegenden sich selbst entsprechenden Punkt W wie in dem Fall der Affinität. Verbindet man W durch Gerade mit den entsprechenden Punkten A, A'; B, B'; etc., so sind die Längen $WA : WA' = WB : WB'$ etc. $= \nu : 1$ und die entsprechenden Winkel AWB, $A'WB'$; etc. einander gleich, die entsprechenden Bündel bei W also einander gleich. Man hat diesen Punkt als Situationspunkt der ähnlichen Räume bezeichnet.

Aus den vier Paaren entsprechender Strahlen der von ihm ausgehenden Bündel erhält man nun den reellen sich selbst entsprechenden Strahl x oder WX, den man auch die Situations-

axe genannt hat, und die durch W gehende Normalebene desselben als die reelle Gegenfläche $\mathfrak{X}$ oder WYZ des sich selbst entsprechenden Dreikants der Bündel; aus jenem natürlich wieder durch diese lineare Construction, so dass die Orthogonalität zur Situationsaxe als eine Probe der Genauigkeit erscheint. Die entsprechenden ähnlichen Reihen in x sind von gleichem Sinn im Fall der gleichsinnigen Aehnlichkeit, von entgegengesetztem im Fall der ungleichsinnigen. Man betrachtet nun weiter die entsprechenden Ebenenbüschel xA, xA'; xB, xB' etc., welche die Situationsaxe zur Scheitelkante haben und bemerkt, dass dieselben in jedem Fall gleichwinklige Büschel mit gleichem Sinn sind. Mit Hülfe ihrer Spurenbüschel in der Normalebene $\mathfrak{X}$ erhält man die Spuren ihrer sich selbst entsprechenden Ebenen in dieser; dieselben gehen nach den Kreispunkten von $\mathfrak{X}$ oder die durch die Situationsaxe gehenden sich selbst entsprechenden Ebenen ähnlicher Systeme sind die zugehörigen Ebenen von absoluter Stellung. Jene sind die fehlenden zwei Hauptpunkte des allgemeinen Falles. Man kann nun unter Festhaltung der einen etwa der ungestrichenen Figur die andere so um x drehen, dass die entsprechenden Strahlen aus W in ihr in gleichem resp. ungleichem Sinn zur Deckung kommen wie in § 70; dann wird jeder durch W gehende Strahl sich selbst entsprechend und die entsprechenden Strecken derselben liegen in gleichem resp. in entgegengesetztem Sinn, je nachdem die ähnlichen Systeme gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. W ist nun in dem ersten Fall der äussere und im andern Fall der innere Aehnlichkeitspunkt der Systeme für ihre ähnliche Lage. Man kann ebenso in beiden Fällen Drehung um x bis zur Deckung der entsprechenden Strecken in $\mathfrak{X}$ im umgekehrten Sinn von vorher ausführen und dadurch die Ebenen des Büschels um x sich selbst entsprechend machen; aber die in ihnen liegenden entsprechenden Figuren wären ungleichsinnig und nicht perspectivisch.

Denken wir endlich die betrachteten Systeme als congruent, so bleibt die Unterscheidung nach der Gleichheit und Ungleichheit des Sinnes bestehen wie vorher und wie immer; zwei collineare Räume sind auch allgemein nach §§ 21, 62 entweder in allen entsprechenden Dreikanten, Tetraedern etc. gleich- oder ungleichsinnig. Der Fall der gleichsinnig con-

gruenten Räume erhält aber eine besondere Bedeutung dadurch, dass beide Figuren als zwei Lagen einer bewegten unveränderlichen Figur betrachtet werden können oder wie man sagt als zwei Lagen eines starren Systems.

Wir betrachten die Congruenz mit ungleichem Sinn zuerst. Von den entsprechenden Punkten A, A' in den entsprechenden Geraden b, b' auf den entsprechenden Ebenen $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$, die zur Bestimmung ausreichen, gelangen wir wie vorher zu den entsprechenden trirectangulären gleichschenkligen Tetraedern und Würfeln und zu dem im Endlichen sich selbst entsprechenden Punkt W, der natürlich von den entsprechenden Punkten A, A' etc. gleich entfernt ist. Die Strahlen WA, WA' von ihm nach entsprechenden Punkten bilden zwei gleiche Bündel, deren sich selbst entsprechender Strahl x und zu ihm normale sich selbst entsprechende Ebene $\mathbf{X}$ die sich selbst entsprechende Gerade und Ebene der ungleichsinnig congruenten Räume bilden. Die entsprechenden Reihen in x sind entgegengesetzt gleich und W ist ihr Mittelpunkt und die entsprechenden Figuren in $\mathbf{X}$ bilden gleichsinnig congruente Figuren. Es bedarf im Allgemeinen nur einer Drehung um x, um das eine der Systeme in zu dem andern centrische Lage zu bringen; durch die supplementare Drehung wird es zu dem andern in Bezug auf die Ebene $\mathbf{X}$ orthogonal-symmetrisch.

Ist endlich die Congruenz gleichsinnig, so dass die entsprechenden Reihen auf der Geraden x gleich und von gleichem Sinn werden müssen, so erhellt, dass beide Doppelpunkte W und X derselben in ihrem unendlich fernen Punkt X vereinigt sein werden; die Construction von W liefert in der That als Schnittlinien der Perspectivebenen, die sie benutzt, parallele Gerade. Wir schliessen daraus, dass zwei dieser Perspectivebenen genügen, und dass man zunächst nur die Richtung der Geraden WX gefunden hat, aber auch, dass die sich selbst entsprechende Normalebene zu WX durch W jetzt mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt, und dass nach wie vor die absoluten Richtungen dieser Normalebenen die beiden letzten Hauptpunkte und die WX selbst enthaltenden Ebenen von absoluter Stellung die letzten Hauptebenen sind. Von den Kanten des Haupttetraeders sind demnach nur zwei reell, nämlich die in's Endliche gehende

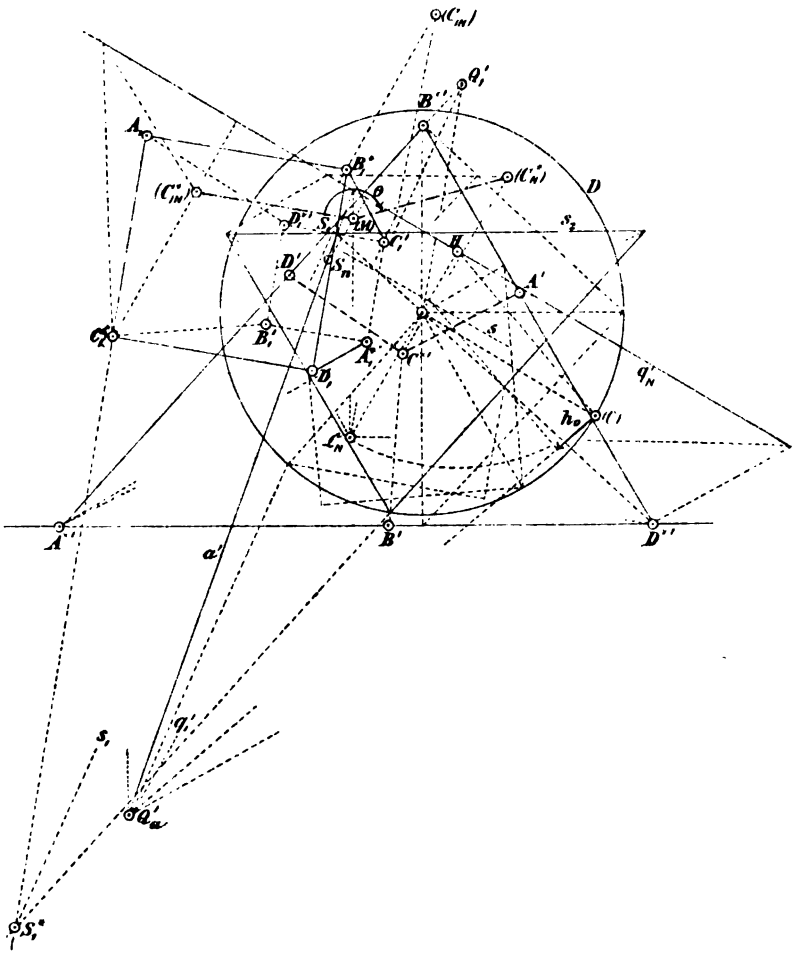
Gerade WX und die Stellung ihrer Normalebenen, und jene ist zu bestimmen.

Dazu erinnern wir, dass die Normalebenen der Richtung WX, welche durch entsprechende Punkte gehen, entsprechende Ebenen und die Parallelen zu ihr durch solche Punkte entsprechende Gerade sind; wir legen zwei solche Normalebenen $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ durch A, A' und denken die in ihnen liegenden entsprechenden gleichsinnig congruenten Figuren, zu deren Bestimmung ein einziges weiteres Paar P, P' genügt, das wir als Schnitt entsprechender Parallelen zu x mit $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ erhalten. Uebertragen wir durch solche Parallelen aus A, P sodann diese Elemente von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{N}'$ in A^*, P^*, so erhalten wir als Schnitt der senkrecht Halbierenden von $A'A^*$ und $P'P^*$ in $\mathfrak{N}'$ einen Punkt der Geraden WX selbst, als der Axe, durch Drehung um welche das System in $\mathfrak{N}'$ in parallele Lage zu dem entsprechenden System in $\mathfrak{N}$ gebracht werden kann. Ist θ der kleinste Winkel dieser Drehung und h_θ der in der zu ihnen normalen Richtung x gemessene Abstand der Ebenen $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$, so erhellt nun, dass das System der gestrichenen Elemente durch die successive Ausführung der Drehung θ um die Axe WX und der Verschiebung h_θ längs derselben mit dem System der ungestrichenen Elemente zur Deckung gebracht werden kann; oder umgekehrt, wenn beide Bewegungen im umgekehrten Sinn vollzogen werden. Denken wir uns aber beide Bewegungen statt nacheinander gleichzeitig und beide mit constanter Geschwindigkeit ausgeführt, so haben wir die Schraubung h_θ, θ um die Axe WX, durch welche jene Ueberführung vollzogen wird; die Normalform der Bewegung des starren Systems aus der Anfangslage in die Endlage. Die Axe dieser Schraubung hat man die Centralaxe a der Bewegung genannt.

In Fig. 53 ist die vollständige Construction von a, θ und h_θ ausgeführt (wir haben sie schon im Schlussüberblick von II, p. 529f. entwickelt) in Centralprojection und unter den ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglichen Vereinfachungen. Die Anschauung ist durch entsprechende Würfel gegeben, eine Fläche des einen ist die Bildebene, und eine Ecke des andern, die keiner Ecke von dieser entspricht, ist das Centrum der Projection; überdiess ist die Länge der Würfelkante gleich der

Distanz. Der Ecke C (Centrum) sind in dem Würfel des ersten Raumes die Ecken A^*, B^*, D^* benachbart und die Gegenecken von diesen und von C sind durch A, B, D, C^* bezeichnet; die Bilder von A^*, B^*, D^* bilden ein Dreieck, das den Hauptpunkt

Fig. 53.



zum Höhenschnitt und die Distanz zum geometrischen Mittel der Höhenabschnitte hat; die drei parallelen Gegenflächen der in C zusammenstossenden haben die Entfernung d von denselben und man erhält daher aus den zugehörigen Tafelneigungen

die Spuren und dann als ihre Schnittlinien die in der Gegenecke C^* zusammenstossenden Kanten C^*A, C^*B, C^*D. Der Würfel des zweiten Raumes hat die Fläche $A_1B_1^*D_1C_1^*$ in der Tafel, die Bilder der von ihren Ecken ausgehenden dritten Kanten haben den Hauptpunkt zum Fluchtpunkt und die Bilder der zugehörigen Nachbarecken $D_1^*C_1$, $A_1^*A_1$ liegen in den Mitten der bezüglichen Bildlängen. Die Ebenen CA^*DB^* und $C_1A_1^*D_1B_1^*$ und ihre Parallelen C^*AD^*B, $C_1^*A_1D_1^*B_1$ schneiden sich in zwei parallelen Geraden (Fluchtpunkt Q_1'), deren Ebene man durch die Verbindungslinie der Durchstosspunkte als Spur s_1 und ihre Parallele durch den gemeinsamen Fluchtpunkt als Fluchtlinie q_1' darstellt; die Ebenen C^*AB^*D und $C_1^*A_1B_1^*D_1$ (die Tafel) schneiden sich in der Spur s_2 von jener und ihre Parallelen, die projicierende CA^*BD^* und $C_1A_1^*B_1D_1^*$, in der in $A^{*\prime}D^{*\prime}$ projicierten Geraden, so dass die Fluchtlinie q_2' der Ebene beider Schnittlinien die zur Spur von C^*AB^*D symmetrische in Bezug auf $A^{*\prime}D^{*\prime}$ ist. Damit ist als Schnittpunkt der Fluchtlinien q_1', q_2' der Fluchtpunkt der Centralaxe Q_a' bestimmt und mittelst (C) und H fügen wir die Fluchtlinie q_N' der zu ihr normalen projicierenden Ebene sofort hinzu. Ihr Abstand von der zu ihr parallelen durch die Würfelecke C_1 ist die Verschiebungsgrösse h_0 und wir erhalten sie aus der Spur s dieser Parallelebene. Endlich wird der Punkt M der Centralaxe in der Normalebene Cq_N' und diese selbst sowie der Drehungswinkel θ erhalten, indem wir die Eckenpaare C, C_1 und C^*, C_1^* aus Q_a' auf jene Ebene projicieren und die Umlegungen der Projectionen verzeichnen — in $\mathfrak{C}_N$, (C_{1N}); (C_N^*), (C_{1N}^*). Die halbierenden Perpendikel für $\mathfrak{C}_N$, (C_{1N}) und für $(C_N^*)(C_{1N}^*)$ schneiden sich in (M) und $\angle\, \mathfrak{C}_N(M)(C_{1N})$ ist θ; $Q_a'M'$, oder $Q_a'S_n$ ist die Centralaxe. Man sieht, dass im Grunde nur die Ecken C, C^* und wieder C_1, C_1^* wesentlich gebraucht werden.

1) Je zwei entsprechende Gerade g, g' der collinearen Räume erzeugen, als Reihen resp. Ebenenbüschel betrachtet, Regelschaaren, welche die Hauptebenen berühren resp. durch die Hauptpunkte gehen, weil ihre Durchstosspunkte in jenen je in einem Strahl derselben liegen und ihre projicierenden Ebenen aus diesen je durch einen Strahl gehen. Liegen sie in einer Hauptebene, so geht die erste Regelschaar über in das Tangentensystem des dem Hauptdreieck desselben eingeschriebenen und sie berührenden Kegel-

schnittes; gehen sie durch einen Hauptpunkt, so bildet die zweite Regelschaar die Erzeugenden des Kegels vom zweiten Grade, der sie enthält und dem zugehörigen Hauptdreikant umgeschrieben ist. Man beschreibe in jedem Fall die zweite Regelschaar.

Die Strahlen aller dieser Regelschaaren bilden zusammen die Gesammtheit der dreifach unendlich vielen Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare und Schnittgeraden entsprechender Ebenenpaare der beiden Räume, von der wir weiterhin handeln.

2) Zwei entsprechende Punkte P, P' der collinearen Räume erzeugen durch die Bündel ihrer entsprechenden Strahlen und Ebenen eine Raumcurve dritter Ordnung durch sie und die Hauptpunkte, weil die Strahlenpaare nach den Hauptpunkten zu ihren entsprechenden und sich schneidenden Strahlen gehören; und eine Strahlencongruenz (1, 3), die die sechs Kanten des Haupttetraeders enthält. Man beschreibe ihre Erzeugnisse für die wesentlichen speciellen Lagen der entsprechenden Punkte.

3) Zwei entsprechende Ebenen Π, Π' der collinearen Räume erzeugen durch ihre entsprechenden Geraden und Punkte eine Developpable dritter Classe, die sie und die Hauptebenen berührt und eine Strahlencongruenz (3, 1) durch die Kanten des Haupttetraeders. Man beschreibe ihre Erzeugnisse für die wesentlichen speciellen Lagen der entsprechenden Ebenen, insbesondere für die Ebenen $\mathbf{Q}', \mathbf{R}$, die der unendlich fernen Ebene $\mathbf{QR}'$ entsprechen. Welche Beziehungen entspringen für die Curve in 2) und die Developpable hier aus der Lage der Punkte dort in den Ebenen hier? Und welche specielleren Lagen sind noch hervorzuheben?

4) Die senkrecht halbierenden Ebenen der Strecken zwischen entsprechenden Punkten A, A' etc. von ungleichsinnig congruenten Räumen gehen durch den Hauptpunkt W derselben.

5) Die Hyperboloide, welche aus den gleichen entsprechenden Ebenenbüscheln ähnlicher oder congruenter Räume entstehen, sind specielle, wie wir sie in II, 36, 13 und oben in § 63, 2 untersucht haben. Sie und ihre Durchdringungscurven enthalten die Hauptpunkte des Systems, also insbesondere die Kreispunkte der Normalstellung. Im Fall der gleichsinnigen Congruenz ist die Axe WX gemeinsame Asymptote jener Curven dritter Ordnung.

6) Die Hyperboloide, welche aus den gleichen oder ähnlichen entsprechenden Punktreihen affiner, ähnlicher und congruenter Räume entstehen, sind hyperbolische Paraboloide; sind für zwei der entsprechend gleichen Reihen der Congruenz $A, B, \ldots$ und $A', B', \ldots$ entsprechende Punkte, so sind die Geraden $AA', BB', \ldots$ einer Ebene parallel; die Mitten der bezeichneten Strecken liegen in einer Geraden, so dass die durch sie gehende Normalebene zu der durch die Richtungen von $AB \ldots$ und $A'B' \ldots$ bestimmten Stellung die einander nächsten entsprechenden Punkte M, M' der Reihen enthält; die Mitte zwischen ihnen ist der Scheitel des bezüglichen

Paraboloids und die Gerade von ihm nach dem gemeinsamen Punkt der halbierenden Normalebenen der Geraden AA', BB', ... seine Axe.

Man erläutere die Beziehung der vorher bezeichneten Paraboloide zu den Hauptelementen der Systeme.

7) Weil bei ähnlichen und congruenten Räumen den Kreisen und Kugeln des einen Kreise und Kugeln des andern entsprechen, so entsprechen den absoluten Richtungen des einen diejenigen des andern und somit zwei unter ihnen sich selbst.

8) Man kann die Beziehungen der affinen, ähnlichen und congruenten Räume von den allgemeinen linearen Substitutionen in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten aus (§ 62) verfolgen.

81. Wir fanden den Charakter der allgemeinen Collineation der Räume ausgeprägt in dem Vorhandensein von vier Ebenen und Punkten mit vereinigten collinearen Systemen, also mit drei sich selbst entsprechenden Punkten und Geraden, resp. Ebenen und Geraden, und von sechs Geraden mit vereinigten projectivischen Büscheln und Reihen, also mit zwei sich selbst entsprechenden Ebenen und Punkten. Wir gelangen zu speciellen Fällen derselben durch die Voraussetzung, dass es sich selbst entsprechende Gerade mit mehr als zwei und sich selbst entsprechende Ebenen oder Punkte mit mehr als drei sich selbst entsprechenden Elementen gebe; also nach der Definition der Projectivität Gerade und Ebenen oder Punkte mit lauter sich selbst entsprechenden Elementen. Wir gehen diese Fälle nach einander durch.

Sei zuerst eine Punkt für Punkt sich selbst entsprechende Gerade r vorhanden, also ohne dass auch die durch sie gehenden Ebenen selbst entsprechend sind. Dann bilden diese Ebenen zwei projectivische Büschel und zwei unter ihnen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ fallen mit ihren entsprechenden zusammen. Nach § 3 sind die in ihnen liegenden collinearen Systeme centrisch collinear, mit Centren $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, die auch sich selbst entsprechen; die Verbindungslinie b derselben entspricht daher sich selbst und enthält zwei projectivische Reihen, für welche $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ die Doppelpunkte sind, während alle ihre Ebenen $\mathbf{B}$ sich selbst entsprechen müssen, weil sie in r einen sich selbst entsprechenden Punkt und in b eine sich selbst entsprechende Gerade enthalten. Die vereinigten collinearen Systeme dieser Ebenen haben die Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und den Schnittpunkt mit r zu Hauptpunkten und ihre Verbindungsgeraden zu Hauptgeraden. Will

man zu einer Geraden g die entsprechende g' construieren, so wird man die Schnittpunkte von g mit den Ebenen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ betrachten und in den centrischen Collineationen $\mathfrak{C}_1, r$ resp. $\mathfrak{C}_2, r$ die entsprechenden zu ihnen aufsuchen, die die Gerade g' bestimmen. Zu einem Punkte P findet man den ihm entsprechenden Punkt P' in der durch ihn gehenden sich selbst entsprechenden Hauptebene Pb aus dem bezüglichen Dreieck und einem darin bekannten Paar oder die Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare schneiden b; zu einer Ebene Π die entsprechende Π' an dem auf ihr liegenden sich selbst entsprechenden Punkt Πr aus dem bezüglichen Hauptdreiflach und einem bekannten Paar der Bündel; in beiden Fällen also durch zwei F.-Constructionen im Sinn von §§ 3, 16. Die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare schneiden r. Ein demgemäss gewähltes Paar entsprechender Punkte P, P' oder Ebenen Π, Π' ausser den sich selbst entsprechenden Elementen, den Punkten in r und $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und den Ebenen durch b und $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, wird zur Bestimmung hinreichen. Die sich selbst entsprechenden Geraden sind die Strahlen der Büschel um $\mathfrak{C}_1$ in $\mathbf{F}_1$ und um $\mathfrak{C}_2$ in $\mathbf{F}_2$. Zwei entsprechende Gerade als Reihen erzeugen eine Regelschaar, von der je eine Gerade in $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ liegen, also r schneiden, während alle b treffen; als Ebenenbüschel erzeugen sie eine Regelschaar, von der je eine Gerade durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ geht, indess sie alle r schneiden. Die Raumcurven dritter Ordnung, welche aus den collinearen Bündeln P, P' entspringen, enthalten sämmtlich die Gerade r und als Rest entsteht je ein Kegelschnitt in der Ebene $PP'b$ durch P, P', $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und den Schnittpunkt seiner Ebene mit r. Ihre Bisekanten sind die Strahlen durch diesen Punkt, die also durch Singularität hinzugetreten sind; die Strahlen in der Ebene des Kegelschnittes und die Strahlen, welche einen Punkt des Kegelschnittes mit einem Punkte von r verbinden; Congruenzen $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$ resp. wie in § 78.

Die Developpable dritter Classe aus entsprechenden Ebenen Π, Π' zerfällt in das Ebenenbüschel b und einen Kegel zweiter Classe aus dem Schnitt $\Pi\Pi' r$, welcher Π, Π', $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und die Verbindungsebene des Scheitels mit der Geraden b berührt. Bitangenten desselben sind daher die Geraden in jener Ebene, die Geraden durch den Scheitel und die Tan-

genten des Kegels in den Ebenen aus b, welche r schneiden. Man gelangt zu dieser speciellen Collineation mit zwei Axen, von denen die eine als Reihe, die andere als Ebenenbüschel auftritt, von der allgemeinen aus, indem man voraussetzt, dass die Verbindungsgerade der gegebenen entsprechenden Punkte A, A' eine Kante des Haupttetraeders $WXYZ$ z. B. WX schneide; dann sind W und X die Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und WX ist die Büschelaxe b des vorigen; dagegen sind die Ebenen $\mathbf{W}$ und $\mathbf{X}$ die Doppelebenen $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ und XZ ist die Reihenaxe r von vorhin. Die angegebenen Constructionen und Resultate entspringen nach den allgemeinen Constructionsregeln hieraus.

Man kann aber die Gerade AA' als zwei Kanten des Haupttetraeders schneidend voraussetzen und zwar entweder als zwei zu einander windschiefe oder als zwei sich schneidende d. h. als selbst durch einen Hauptpunkt gehend.

Wenn sie zwei gegenüberliegende Kanten schneidet, etwa WX und YZ, so entsprechen nothwendig alle durch dieselben gehenden Ebenen und daher auch alle in YZ und WX liegenden Punkte sich selbst; diese beiden windschiefen sich Punkt für Punkt und Ebene für Ebene selbst entsprechenden Geraden oder Axen und das auf einer sie schneidenden Geraden gelegene Punktepaar A, A' oder auch das sich in derselben schneidende Ebenenpaar $WXAA'$, $YZAA'$ bestimmen die Collineation. Ist ein Punkt P gegeben, so liegt sein entsprechender in der von ihm ausgehenden Transversale zu den beiden Axen und wird darin durch eine F.-Construction bestimmt. Betrachtet man nämlich etwa die Büschel an der Kante WZ, so hat man

$$(WZ.XYAP) \barwedge (WZ.XYA'P')$$

oder der Winkel der Ebenen $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ wird durch die nach A, P gehenden Ebenen in demselben Doppelverhältniss getheilt, wie durch die nach A', P' gehenden, also auch durch die von A und A' sowie durch die von P und P'; d. h. für A_1 und A_2 als die Schnittpunkte von AA' mit WX und YZ resp. und P_1 und P_2 als die von PP' mit denselben Geraden ist auch

$$(A_1A_2AA') \barwedge (P_1P_2PP').$$

Es ist evident, dass hierbei die Punkte W, X und Y, Z beliebige auf den Axen gewählte Punkte sein können; die Con-

struction liegt vollständig in der letztgeschriebenen Doppelverhältnissgleichheit und dieselbe gilt ebenso für die entsprechenden Ebenen. Wenn der Punkt P eine Gerade g durchläuft, so beschreibt P' die entsprechende Gerade g'; weil die Verbindungsgerade PP' stets beide Axen schneidet, so sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von g und g' die Geraden einer Regelschaar, von welcher g, g' und die Axen Transversalen sind. Und man erhält dieselbe Regelschaar, wenn man g, g' als entsprechende Ebenenbüschel betrachtet. Man hat diese Collineation der Räume als die geschaarte Collineation bezeichnet. Die collinearen Bündel aus zwei entsprechenden Punkten und in zwei entsprechenden Ebenen erzeugen eine Curve dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, das Axenpaar mit ihrer Transversale, die zugleich eine Developpable dritter Classe mit zwei Doppelebenen ist. Bisekanten und Bitangenten werden identisch; ihre Congruenz zerfällt in fünf Theile, zwei ebene Systeme, zwei durch die Singularität hinzukommende Bündel und die Congruenz der Transversalen zu den Axen.

Wenn endlich die Gerade AA' durch eine Ecke des Haupttetraeders geht, so entsprechen alle Strahlen und Ebenen des zugehörigen Bündels und alle Strahlen und Punkte der gegenüberliegenden Hauptebenen sich selbst, weil vier Strahlen dort und vier Punkte hier mit ihren entsprechenden zusammenfallen. (Vergl. § 3.) In Folge dessen liegen alle entsprechenden Punkte- und Strahlen-Paare in Strahlen und resp. Ebenen aus jenem Hauptpunkt und schneiden sich alle entsprechenden Ebenen- und Strahlen-Paare in Strahlen und Punkten auf dieser Hauptebene und man nennt die collinearen Systeme centrisch collinear oder perspectivisch. Entsprechende Reihen und entsprechende Büschel sind perspectivisch und erzeugen an Stelle der Regelschaaren Strahlbüschel aus dem Hauptpunkt resp. in der Hauptebene; entsprechende Bündel und Ebenen desgleichen die ganze Hauptebene und das ganze Bündel am Centrum; die Strahlen in jener und durch diese sind die zugehörigen Congruenzen und die Gesammtheit aller dieser Congruenzen ist nur die Wiederholung der einen.

Centrisch collineare Räume werden daher durch Hauptpunkt (Centrum), Hauptebene (Collineationsebene) und ein Paar

entsprechender Elemente (in einer Geraden durch jenen oder durch eine Gerade auf dieser, oder endlich in einer Ebene durch jenen aus einem Punkt in dieser), oder statt dessen durch das constante Doppelverhältniss (Charakteristik Δ) bestimmt, welches diese mit den Hauptelementen bilden.

In allen Fällen ist die Betrachtung der Ebenen $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{R}$ von Werth, welche der unendlich fernen Ebene correspondieren, je nachdem man sie als $\mathbf{Q}$ zum ungestrichenen oder als $\mathbf{R}'$ zum gestrichenen System rechnet. Im Fall der centrischen Collineation sind sie der Collineationsebene parallel und theilen die Entfernung zwischen Centrum und Collineationsebene resp. zwischen Collineationsebene und Centrum nach dem der Charakteristik gleichen Verhältniss. (Vergl. I, § 38.) Bei der geschaarten Collineation müssen sie, da die Punkte der Axen sich selbst entsprechen, die Richtungen derselben enthalten und nach der Constanz des Doppelverhältnisses $(P_1\, P_2\, P\, P')$ wegen $(R_1\, R_2\, R\, R'_\infty)$ und $(Q_1\, Q_2\, Q_\infty\, Q')$ als Ausdrücke derselben ihre Transversalen in den Verhältnissen $R_1 R : R_2 R$ und $Q_2 Q' : Q_1 Q'$ theilen. Für den Werth -1 der Charakteristik vereinigen sie sich in beiden Fällen und wir erhalten die centrische und die geschaarte Involution der Räume, vertauschbares Entsprechen aller entsprechenden Elemente; die Vereinigung findet statt dort in der Mitte zwischen Centrum und Collineationsebene, hier in der Mitte zwischen beiden Axen.

In dem allgemeineren Fall der axialen Collineation sind die Ebenen $\mathbf{Q}'$ und $\mathbf{R}$ nothwendig parallel zur Reihe r, weil auch der unendlich ferne Punkt derselben sich selbst entspricht; aber nicht mehr zu einander. Um sie zu erhalten, wird man zu den unendlich fernen Geraden q_1, r_1' und q_2, r_2' der Ebene $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ in den zugehörigen Collineationen mit den Centren $\mathfrak{C}_1$ oder W und $\mathfrak{C}_2$ oder X in der Axe r die entsprechenden q_1', r_1 und q_2', r_2 construieren und in den Verbindungsebenen $q_1' q_2'$ und $r_1 r_2$ die gesuchten Ebenen $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{R}$ erhalten.

Es ist nicht schwer für alles das ebenso wie für den allgemeinen Fall den algebraischen Ausdruck aufzustellen. Wir werden nur die Fälle der centrischen Collineation und der geschaarten Involution behandeln und wollen uns zu ihrer Untersuchung der Coordinatenmethode in der besondern Form der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten bedienen.

Setzen wir zwei collineare Räume in centrischer Lage voraus und denken das Centrum als den Anfangspunkt der Coordinaten, so gelten für alle x, y, z die Gleichungen (§ 62, 7)

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x}{z} = \frac{a_{21} + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z}{a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z},$$

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z} = \frac{a_{31} + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z}{a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z},$$

weil entsprechende Punkte mit dem Centrum in gerader Linie liegen; Gleichungen welche offenbar fordern, dass man habe

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0,$$

$a_{22} = a_{44} = a_{33}$ setzen wir $= a$, $a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$.

Man erhält dann als Gleichungen der centrischen Collineation

$$x' = \frac{ax}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z},$$

$$y' = \frac{ay}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z},$$

$$z' = \frac{az}{a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z}.$$

Sie zeigen, dass jede das Centrum enthaltende Ebene

$$\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = 0$$

mit ihrer entsprechenden zusammenfällt; dass für die sich selbst entsprechenden Punkte wegen $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ die Gleichungen gelten

$$ax = x(a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z),$$

$$ay = y(a_{11} + \cdots), \quad az = z(a_{11} + \cdots),$$

die für $x = y = z = 0$, d. h. das Centrum, und für

$$a_{11} - a + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z = 0,$$

d. h. eine feste Ebene, die Collineationsebene, befriedigt sind.

In der durch das Verschwinden des gemeinsamen Nenners der Werthe der gestrichenen Coordinaten

$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z = 0$$

dargestellten Ebene erkennen wir die Gegenebene **R** im ungestrichenen System. Die Auflösung derselben Gleichungen für die ungestrichenen Variabeln führt ebenso auf die Gleichung der Gegenebene **Q'** im gestrichenen oder Bild-

raum. Die Charakteristik der centrischen Collineation Δ ist das Verhältniss $a_{11} : a$, und für $a_{11} = -a$ hat man also die centrische Involution der collinearen Räume, mit dem charakteristischen Zusammenfallen der beiden Gegenebenen.

Der Lage des Centrums in der Collineationsebene oder $\Delta = +1$ entspricht somit die Relation $a_{11} = a$; dann ist die andere Gegenebene zu **R** symmetrisch für das Centrum und somit von der Gleichung

$$-a + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z = 0,$$

wie denn in der That die directe Auflösung der Grundgleichungen giebt

$$x = \frac{a_{11}x'}{a - a_{12}x - a_{13}y - a_{14}z}, \text{ etc.}$$

Machen wir in diesem Fall die Collineationsebene zur Coordinatenebene $y = 0$, also $a_{12} = 0$, $a_{14} = 0$, so folgt aus

$$x' = \frac{ax}{a + a_{13}y}, \quad y' = \frac{ay}{a + a_{13}y}, \quad z' = \frac{az}{a + a_{13}y},$$

$$x = \frac{ax'}{a - a_{13}y'}, \quad y = \frac{ay'}{a - a_{13}y'}, \quad z = \frac{az'}{a - a_{13}y'};$$

während im allgemeinen Falle

$$x' = \frac{ax}{a_{11} + a_{13}y}, \text{ etc. und } x = \frac{a_{11}x'}{a - a_{13}y'}, \text{ etc.}$$

sich ergiebt. Das erstere zeigt die symmetrische Lage der Gegenebenen an. Der Ebene $\xi'x' + \eta'y' + \zeta'z' + 1 = 0$ entspricht nun die Ebene

$$\xi'x + \frac{a\eta + a_{13}}{a}y + \zeta z + 1 = 0.$$

Die allgemeinen Gleichungen lehren aber sofort, dass die Involution der collinearen Räume noch in einer von der centrischen Lage völlig verschiedenen Weise möglich ist. Die Gleichungen

$$x' = \frac{a_{21} + a_{22}x + \cdots}{a_{11} + a_{12}x + \cdots}, \quad y' = \frac{a_{31} + a_{32}x + \cdots}{a_{11} + a_{12}x + \cdots},$$

$$z' = \frac{a_{41} + a_{42}x + \cdots}{a_{11} + a_{12}x + \cdots}$$

liefern die Ebene

$$a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z = 0$$

als die eine Gegenebene, im Fall der Involution also als Vereinigung der Gegenebenen. Indem wir diese Ebene zur Ebene $z = 0$ machen, werden die Gleichungen

$$z(x' - a_{24}) = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y,\ z(y' - a_{34}) = a_{31} + a_{32}x + a_{33}y,$$
$$zz' = a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z.$$

Wir vereinfachen sie weiter durch Parallelverschiebung der Coordinatenaxen nach dem Punkt $(a_{24}, a_{34}, 0)$ zu

$$zx' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y,\quad zy' = a_{31} + a_{32}x + a_{33}y,$$
$$zz' = a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z$$

und erhalten für vereinigte Coordinatensysteme und den Fall der Involution aus denselben durch Vertauschung auch

$$z'x = a_{21} + a_{22}x' + a_{23}y',\quad z'y = a_{31} + a_{32}x' + a_{33}y',$$
$$z'z = a_{41} + a_{42}x' + a_{43}y' + a_{44}z'.$$

Multiplicieren wir die beiden ersten Gleichungen dieser Gruppe mit z und ersetzen sodann in ihnen die zx', zy', zz' durch ihre Werthe aus der ersten Gruppe, so erhalten wir zwei Gleichungen, welche für alle Werthe von x, y, z im Falle der Involution richtig sein müssen, nämlich

$$(a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z)x = a_{21}z + a_{22}(a_{21} + a_{22}x + a_{23}y)$$
$$+ a_{23}(a_{31} + a_{32}x + a_{33}y),$$
$$(a_{41} + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z)y = a_{31}z + a_{32}(a_{21} + a_{22}x + a_{23}y)$$
$$+ a_{33}(a_{31} + a_{32}x + a_{33}y);$$

und daher durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten auf beiden Seiten derselben die folgenden Bedingungen der Involution

$$a_{41} = a_{22}^2 + a_{23}a_{32} = a_{23}a_{32} + a_{33}^2,$$
$$a_{21} = a_{31} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0,$$
$$a_{23}(a_{22} + a_{33}) = 0,\quad a_{32}(a_{22} + a_{33}) = 0.$$

Der ersten und den zwei letzten derselben wird nun erstens genügt für $a_{33} = a_{22}$, $a_{23} = 0$, $a_{32} = 0$, was für die sich selbst entsprechenden Elemente die Gleichungen

$$zx = a_{22}x,\quad zy = a_{22}y,\quad z^2 = a_{22}^2$$

liefert, in denen man die Ebene $z = a_{22}$ und den Punkt $x = y = 0$, $z = -a_{22}$ erkennt, das Centrum und die Colli-

neationsebene der Involution, also den vorbesprochenen Fall. Es wird denselben aber auch zweitens genügt durch die Festsetzung $a_{33} = -a_{22}$, womit die Gleichungen der Involution werden

$$zx' = a_{22}x + a_{23}y,\ zy' = a_{32}x - a_{22}y,\ zz' = a_{22}^2 + a_{23}a_{32},$$

setzen wir zur Abkürzung $= b^2$, also die Gleichungen der sich selbst entsprechenden Elemente

$$x(z - a_{22}) = a_{23}y,\ y(z + a_{22}) = a_{32}x,\ z^2 = b^2 \text{ d. h. } z = \pm b$$

werden; drei Gleichungen, von denen die letzte das Product der beiden ersten ist, und welche die beiden der gegebenen parallelen und von ihr auf entgegengesetzten Seiten gleich entfernten die Axe z schneidenden Geraden

$$z = \pm b;\quad \frac{x}{y} = \frac{a_{23}}{b - a_{22}},\ \frac{x}{y} = \frac{b + a_{22}}{a_{32}}$$

die sich selbst entsprechenden Geraden, die Axen der Involution repräsentieren, die mit b zugleich reell oder imaginär sind.

Nehmen wir aber, um den Fall der nicht reellen Doppelgeraden auch zu umfassen, die stets reellen Halbierungslinien ihrer Winkel in der Gegenebene, das Rechtwinkelpaar der sie dann vertretenden elliptischen Involution, zu Axen der neuen Coordinaten X, Y, so gehen die Gleichungen unserer involutorischen Collineation, weil für die neuen Coordinaten

$$x + y = \lambda Y,\ x - y = \mu X,\ x' + y' = \lambda Y',\ x' - y' = \mu X'$$

ist und die dritte ungeändert bleibt, in die Form über

$$\lambda z Y' = a_{22}\mu X,\ \mu z X' = a_{22}\lambda Y,\ zz' = a_{22}^2,$$

in der sie den Fall der reellen und den der nicht reellen Doppelgeraden gleichmässig umfassen; oder kürzer

$$zY' = mX,\ zX' = nY,\ zz' = mn.$$

Die beiden ersten Gleichungen repräsentieren zwei hyperbolische Paraboloide, die die Axe z enthalten und deren andere Regelschaaren der Ebene XY parallel sind; sie haben zwei reelle oder nicht reelle Gerade derselben gemein.

Ist die eine der Axen unendlich fern oder eine Stellung, so sind die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte P, P' und Schnittlinien entsprechender Ebenen Π, Π' Transversalen der Axe im Endlichen, deren Richtungen in jener Stellung

liegen; die Distanz PP' wird immer im Punkte der endlichen Axe halbiert, der Winkel $\Pi\Pi'$ durch die Ebene nach derselben und ihre Normalebene, wenn die Stellung die zur Richtung der endlichen Axe normale ist. Das Entsprechen der Elemente ist das der Rotationssymetrie, die wir im Schlussüberblick zu I, p. 355 schon nachwiesen.

1) Die collinearen Systeme der Ebenen $A_i A_j A_k$ oder $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_i'$ liegen in einander und haben die Punkte A_i, A_j, A_k zu sich selbst entsprechenden Punkten und die geraden Linien $A_i A_j$, $A_j A_k$, $A_k A_i$ zu sich selbst entsprechenden Geraden. Im Fall c) im Text S. 559 sind diese sämmtlich reell; in den Fällen a) und b) ist auf den reellen Ebenen eine Ecke z. B. A_1 und die Gegenseite $A_2 A_4$ reell, indess die Ecken A_3, A_4 selbst conjugiert imaginär sind; auf den imaginären Ebenen der Fälle a) und b) ist der reelle Träger die reelle Seite und die Gegenecke ist imaginär. Entsprechende gerade Reihen in diesen sich selbst entsprechenden Ebenen erzeugen Kegelschnitte, die den bezüglichen sich selbst entsprechenden Dreiseiten eingeschrieben sind, also aus fünf reellen, oder aus drei reellen und zwei conjugiert imaginären Tangenten, etc.

2) Setzen wir im Fall der geschaarten Collineation eine der Axen als unendlich fern voraus, so entsteht aus ihr eine Beziehung, die als geschaarte Affinität bezeichnet werden darf, da die unendlich ferne Ebene zu den sich selbst entsprechenden Ebenen gehört und somit jeder Richtung eine Richtung oder jedem Bündel von Parallelen ein Bündel von Parallelen und jeder Stellung eine Stellung, also jedem Büschel von Parallelebenen wieder ein solches entspricht. Die entsprechenden Richtungen und Stellungen sind in centrischer Collineation für die Richtung der Axe im Endlichen als Centrum, die unendlich ferne als Axe und die Charakteristik Δ. Ihre Regelschaaren sind hyperbolische Paraboloide, die diese Richtung und Stellung gemein haben. Man durchbilde die Constructionen entsprechender Elemente nach Anleitung des Textes.

3) Man bestimme das geschaart affine Bild einer Kugel unter der Annahme, dass einer ihrer Durchmesser die Axe im Endlichen, eine beliebige Stellung die andere Axe und die Charakteristik Δ beliebig gegeben sei.

Dasselbe ist ein Ellipsoid mit dem gedachten Durchmesser der Kugel als Durchmesser, der gedachten Stellung als Stellung von Kreisschnittebenen und der Normalebene zu ihr durch jene als der Hauptebene der reellen Nabelpunkte; seine Tangentialebenen in diesen berühren auch die Kugel. (Vergl. II, § 44, S. 347.)

4) Man mache die analogen Entwickelungen für die axiale Collineation unter der Voraussetzung, a) dass die als Reihe sich selbst entsprechende Axe und b) dass die als Büschel sich selbst entsprechende Axe unendlich fern sei. Für den Fall der centrischen

Collineation wissen wir, dass perspectivische Affinität und Aehnlichkeit der unendlich fernen Lage des Centrums resp. der Collineationsebene entsprechen; insbesondere Volumengleichheit dem Fall $\Delta = +1$ in der ersten Voraussetzung und Symmetrie in beiden Fällen für $\Delta = -1$.

5) Jede Fläche zweiter Ordnung entspricht centrisch involutorisch sich selbst für einen beliebigen Punkt des Raumes als Centrum und die Polarebene desselben als Collineationsebene. Ihr Schnitt mit der in der Mitte zwischen Pol- und Polarebene parallel der letztern gelegenen Ebenen bestimmt ihre Art. (Vergl. I, p. 150.)

6) Eine Fläche zweiter Ordnung entspricht geschaart involutorisch sich selbst für jede zwei als Polaren in Bezug auf sie einander entsprechende Gerade des Raumes als Axen. (Vergl. II, p. 310.)

7) Jede Ebene durch eine der Involutionsaxen im geschaart involutorischen System enthält ein involutorisch collineares ebenes System mit ihr als Axe und dem Durchstosspunkt der andern Involutionsaxe als Centrum; jeder Punkt einer Involutionsaxe ist Scheitel eines involutorischen Strahlbündels, dessen Collineationsebene durch die andere Axe geht.

8) Man erläutere den Begriff der Symmetrie in Bezug auf eine Gerade im Raum und zeige denselben als Specialfall der geschaarten Involution auf. (Vergl. II, § 39, 11.) In Bezug auf welche Geraden ist eine Fläche zweiten Grades symmetrisch?

9) Durch jeden Punkt des Raumes geht und in jeder Ebene des Raumes liegt ein sich selbst entsprechender Strahl in der centrischen wie in der geschaarten Involution der Räume. Diese Strahlen bilden eine Congruenz erster Ordnung und erster Classe, bei der centrischen ist dieselbe zerlegt in eine (0, 1) und eine (1, 0). Im allgemeinen Fall giebt es solcher Geraden nur sechs.

Die Axen geschaart involutorischer Räume sind im Fall der Nichtrealität rein imaginäre Gerade der Art wie die in § 11 untersuchten.

Man kann die Entwickelung des § 11 dahin aussprechen, dass man sagt, zwei imaginäre Punkte und zwei durch beide gehende Ebenen bestimmen eine Congruenz erster Ordnung und Classe; jeder Strahl derselben ist Träger einer Involution von Punkten und von Ebenen mit einem bestimmten Sinn; alle diese Reihen sind zu allen diesen Büscheln nach Lage und Sinn perspectivisch, d. h. die imaginären Punkte und Ebenen, die sie darstellen, liegen ineinander. Die Vereinigung dieser Elemente ist die imaginäre Gerade zweiter Art.

10) Die Ueberführung ähnlicher Systeme in centrische Lage ist stets möglich, weil sie nur die Vereinigung ihrer unendlich fernen Schnitte fordert.

11) Dem Orthogonalsystem O auf der unendlich fernen Ebene oder dem absoluten Kreis entsprechen im gestrichenen und im ungestrichenen System resp. ein Polarsystem auf der Ebene Ω' und

eines auf der Ebene **R**. Weil nach Herstellung der perspectivischen Lage der beiden Räume der absolute Kreis und das Orthogonalsystem mit der Directrix des Polarsystems in **Q'** und diesem sowie der Directrix und dem Polarsystem auf der Ebene **R** bei paralleler Lage derselben mit **Q'** auf demselben Kegel zweiten Grades und perspectivisch liegen müssen, so fordert die Herstellung dieser Lage Perspectivität der Kegelschnitte in **Q'** und **R** bei paralleler Lage ihrer Ebenen; sie ist daher (vergl. 3) im Allgemeinen nicht möglich.

Die reellen Elemente der bezeichneten Polarsysteme geben zu nützlichen Ueberlegungen Anlass; also die Mittelpunkte und die Axen. Seien x_∞, y_∞ die Richtungen der Axen im Originalsystem und x'_∞, y'_∞ die im Bildsystem, Punkte der Stellungen von **Q'** und **R** resp. also von entsprechenden Geraden, die auch die zugehörigen Asymptotenrichtungen M_1, M_2 und W_1', W_2' enthalten und den absoluten Kreis **O** in den Punkten J_1, J_2 und J_1', J_3' schneiden; dazu z_∞ und z'_∞ die Richtungen der auf den Ebenen **Q'**, **R** in den Mittelpunkten errichteten Normalen; dann sind die Pole jener Stellungen **R** und **Q'** im absoluten Kreis **O** und in **R** resp. **Q'**, als Normalenrichtung hier und Mittelpunkt dort, entsprechende Punkte. Die Asymptotenwinkel sind also gleich; die Axenrichtungen hier correspondieren den Axenrichtungen dort, aber der Hauptaxenrichtung hier die Nebenaxenrichtung dort und umgekehrt.

12) In Bezug auf jene entsprechenden rechtwinkligen Axentripel sind die Coordinaten x, y, z und x', y', z' entsprechender Punkte durch die Gleichungen verbunden

$$zz' = aa' = bb'; \; xz' = ax', \; yz' = by'.$$

Der Ebene

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

entspricht daher die Ebene

$$\xi a x' + \eta b y' + \zeta a a' + z' = 0.$$

Sie hat mit dem imaginären Kegelschnitt

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = -1$$

eine Sehne gemein, deren Quadrat das Vierfache ist von

$$-\frac{(a'^2\eta^2 + b'^2\xi^2)(\xi_2 + \eta^2 + \zeta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^2};$$

sodass es mit dem Quadrat des Sinus des Winkels zwischen der gegebenen Ebene und der Gegenebene des Originalraumes den nur vom Verhältniss von ξ zu η abhängigen Ausdruck giebt

$$-\frac{a'^2\eta^2 + b'\xi^2}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Die Linien mit gleichen entsprechenden Längen im Originalraum auf allen Ebenen, die eine bestimmte Richtung seiner Gegenebene enthalten, liegen daher in zwei von derselben äquidistanten und zu ihr parallelen Ebenen. Es entspringen hieraus Ebenen von reellen Geraden mit gleichen entsprechenden Längen einerseits zwischen zwei Ebenen in den Abständen a' und b' auf der einen und wieder auf der andern Seite der Verschwindungsebene; jede enthält zwei symmetrisch zu den Nachbarebenen gelegene Parallelensysteme solcher Geraden, die in den Grenzlagen in eines zusammenfallen, das die Richtung der einen oder andern Axe hat. Solche Ebenen können im Allgemeinen nicht auf einander fallen und die perspectivische Lage der Räume ist unmöglich.

82. Wir fahren in der Untersuchung des allgemeinen Falles fort, zu dem die letzten Beispiele zurückführten. Das Erzeugniss der Verbindung entsprechender Elemente, Punkte oder Ebenen, von zwei collinearen Räumen ist ein dreifach unendliches System von Strahlen, wie man sagt ein tetraedraler Complex (§ 30, 2).

Wenn dem Punkt P der Punkt P' entspricht, oder die Ebene Π' der Ebene Π, so sind die Geraden PP', $\Pi\Pi'$ Strahlen des Complexes; betrachten wir $\Pi\Pi'$ als eine Gerade des Originalraumes, so liegt die ihr entsprechende Gerade des Bildraumes nothwendig in Π' und schneidet jene in einem Punkt, dessen als einem Punkt des Bildraumes entsprechender im Originalraum in derselben Geraden liegt, so dass diese zugleich Verbindungslinie entsprechender Punkte beider Räume ist. Wir sagen: Die collinearen Räume erzeugen durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte denselben Complex wie durch die Schnittlinien ihrer entsprechenden Ebenen; oder der Complex ist sich selbst reciprok.

Nach § 40, 4 sind zwei entsprechende Ebenenbüschel oder Strahlenbüschel einander gleich, wenn den Elementen von absoluter Richtung resp. Stellung im einen die Elemente von absoluter Richtung oder Stellung im andern entsprechen. Dem absoluten Kreis in der unendlich fernen Ebene als dem Bildraum angehörig betrachtet entspricht ein Kegelschnitt J oder vielmehr sein Polarsystem in der Ebene $\mathfrak{E}$ und beiden gemeinsam umgeschrieben entspringt eine developpable Fläche vierter Classe von reeller Gleichung. Die Construction der von einem

beliebigen Punkt aus an sie gehenden Tangentialebenen, d. h. der gemeinsamen Tangentialebenen der von diesem über dem absoluten Kreis und dem entsprechenden Kegelschnitt in R gebildeten Kegel, führt auf die Ergebnisse von § 71 zurück. Die Schnittlinien der Tangentialebenen jener developpabeln Fläche unter einander sind die Geraden des Originalraumes, deren entsprechende im Bildraum mit ihnen gleiche entsprechende Ebenenbüschel tragen; es gehen somit deren — nach der Dualität zur Raumcurve vierter Ordnung erster Art — durch einen Punkt sechs, und liegen in einer Ebene zwei; von jenen sind zwei reell und vier imaginär. Die besprochene Developpable ist die Brennfläche dieser Congruenz (6, 2) von Strahlen. Aus jenen gleichen entsprechenden Ebenenbüscheln entstehen die orthogonalen Hyperboloide aus Complexstrahlen nach § 81 und II, § 36, 13. Man sieht, wie sich diese Ergebnisse in den Fällen der Affinität theils specialisieren, theils erhalten.

Der Stellung der Ebene $\mathfrak{R}$ von zwei collinearen Räumen entspricht wieder eine Stellung und diese sind die einzigen unendlich fernen Geraden, die einander entsprechen. Die Geraden mit entsprechend gleichen Reihen sind Transversalen derselben; die Geraden des ungestrichenen Raumes von dieser Art durch einen Punkt liegen in der durch ihn gehenden Parallelebene zu $\mathfrak{R}$ und da das System in dieser zu dem der entsprechenden Ebene affin ist, so bilden jene Geraden in ihnen zwei Parallelenbüschel (§ 70, S. 478), deren durch jenen Punkt und seinen entsprechenden gehende Strahlen die gesuchten sind. Wir wissen, dass in einer beliebigen Ebene und ihrer entsprechenden, als in collinearen Ebenen, zwei stets reelle Paare entsprechender gleicher Reihen liegen (I, § 14), symmetrisch parallel zu den bezüglichen Gegenaxen. Die Gesammtheit solcher Strahlen der collinearen Räume bildet also eine Congruenz (2, 2).

Wir haben offenbar im Vorigen die Construction dieser Elemente für den allgemeinen Fall. Weil für affine Räume jeder Stellung eine Stellung entspricht, so bilden für sie die Geraden mit gleichen entsprechenden Reihen in jeder Ebene zwei Parallelenbüschel, insgesammt einen Complex, nämlich die Sekanten eines gewissen Kegelschnittes in der unendlich fernen Ebene.

Wenn unter den Paaren entsprechender Ebenen eines mit congruenten Systemen wäre, oder wenn unter den entsprechenden Bündeln zwei congruente sich befänden, so würde durch eine solche Lagenveränderung des einen Raumes, bei der diese zur Deckung aller entsprechenden Elementenpaare gelangen, die centrisch collineare Lage der Räume hergestellt werden. Dieselbe ist also im Allgemeinen nicht möglich.

Ein Ebenenbüschel s bringt mit seinem entsprechenden im andern Raume s' eine Regelschaar von Complexstrahlen hervor, von welcher durch jeden Hauptpunkt ein Strahl geht. Ebenso eine Punktreihe mit ihrer entsprechenden eine Regelschaar, von welcher in jeder Hauptebene ein Strahl liegt.

Zwei Ebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ des ersten Büschels und ihre entsprechenden $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ des zweiten und wieder zwei Punkte A, B der ersten Reihe und ihre entsprechenden A', B' in der zweiten liefern zwei Strahlen des Complexes $\mathbf{AA}'$, $\mathbf{BB}'$ und resp. AA', BB' als diesen Flächen angehörig (§ 29, vergl. II, p. 369), zehn Punkten resp. zehn Tangentialebenen derselben äquivalent.

Daher sind die Ebenenbüschel, welche irgend zwei Complexstrahlen mit den Hauptebenen verbinden und wiederum die Punktreihen auf ihnen in der Hauptebene immer projectivisch.

Ein Bündel S des einen Raumes erzeugt mit dem ihm entsprechenden Bündel S' des andern Raumes eine Curve dritter Ordnung und durch den Schnitt entsprechender Ebenen, d. h. als Theil unseres Complexes, das System ihrer zweifach schneidenden Sekanten; es ist offenbar, dass jener Curve die Hauptpunkte beider Räume angehören müssen; sie wird daher durch drei beliebige dieser ihrer Bisekanten bestimmt. Analog erzeugt eine Ebene Σ mit ihrer entsprechenden Ebene Σ' eine Developpable dritter Classe mit dem System ihrer Doppeltangenten aus der Verbindung entsprechender Punkte, d. i. als Theil unseres Complexes (§ 78); sie berührt die Hauptebenen und drei dieser Complexstrahlen bestimmen sie. Alle Strahlen in den Hauptebenen und alle Strahlen durch die Hauptpunkte gehören zum Complex. Die Complexstrahlen aus einem Punkt des Raumes bilden den projicierenden Kegel der ihm entsprechenden d. h. aus seinem und dem entsprechenden Bündel erzeugten Curve dritter Ordnung, und die Complexstrahlen in einer Ebene den Schnitt derselben mit der zugehörigen de-

veloppabeln Fläche, also einen Kegel zweiter Ordnung und eine Curve zweiter Classe respective. Die Curven aus zwei entsprechenden Punktepaaren liegen auf demselben Hyperboloid und die Developpabeln aus zwei Paaren von entsprechenden Ebenen umhüllen dasselbe Hyperboloid aus Complexstrahlen (§ 78). Die Fundamentalsätze über das Doppelverhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnittes (I, § 24) und von vier Erzeugenden eines Kegels vom zweiten Grade (I, § 68) geben wiederum den Satz, dass alle Strahlen des Complexes mit den Hauptebenen Reihen von demselben Doppelverhältniss bestimmen und ebenso mit den Hauptpunkten Ebenenbüschel von einerlei Doppelverhältniss, und nach § 25, 3 oben wissen wir, dass diese Doppelverhältnisse einander gleich sind. Man sieht leicht, dass bei bekannten Hauptpunkten das Doppelverhältniss allein hinreicht, alle Strahlen des Complexes linear zu construieren (II, § 25, 1); und dass unter der gleichen Voraussetzung ein Strahl des Complexes denselben bestimmt. Wir betrachten die bezüglichen Constructionen bei den Beispielen unter einem andern Gesichtspunkt.

Man construiert aus dem gegebenen alle andern Strahlen des Complexes, die Complexkegel zweiten Grades aus allen Punkten und die Complexkegelschnitte in allen Ebenen des Raumes. Für die Punkte in den Hauptebenen und für die Ebenen durch die Hauptpunkte zerfällt jener wie dieser in zwei Strahlbüschel; jene nennt man (§ 30, 3) die singulären Punkte, diese die singulären Ebenen des Complexes. Wenn die collinearen Räume eine gerade Reihe oder ein Ebenenbüschel entsprechend gemein haben, so sind alle Punkte von jener Hauptpunkte und alle Ebenen von diesem Hauptebenen und ihre Elemente singulär, wie es § 81 ausführlich zeigt.

Im allgemeinen Fall entspricht derselbe Complex zweifach unendlich vielen Collineationen mit demselben Haupttetraeder. Ist p der zur Bestimmung ausser dem Haupttetraeder erforderliche Complexstrahl und P ein Punkt desselben, der jenem nicht angehört, so kann als entsprechender Punkt P', dessen Wahl die Collineation bestimmt, jeder andere Punkt des Complexkegels aus P mit der Geraden p gewählt werden. Dual gehen die Ebenen, welche einer gegebenen Ebene des unge-

strichenen Raumes entsprechen, durch die in jener liegenden Complexstrahlen. Unter den so zum Originalraum hinzutretenden zweifach unendlich vielen collinearen Räumen mit demselben Haupttetraeder, die mit jenen denselben Complex erzeugen, giebt es einfach unendlich viele Paare, die auch unter einander jenen nämlichen Complex hervorbringen; man findet leicht, dass es diejenigen sind, deren zu P entsprechende Punkte mit diesem auf demselben Complexstrahl liegen, resp. deren zu Π entsprechende Ebenen mit dieser durch denselben Complexstrahl gehen.

Wenn man die collinearen Räume auf das Tetraeder der Hauptpunkte und Hauptebenen bezieht, so dass die Gleichungen der Collineation sind (§ 62, 3)

$$\mu x_i' = a_i x_i, \quad \mu \xi_k = a_k \xi_k',$$

so hat man für die Coordinaten der Complexstrahlen

$p_{12} = (a_2 - a_1) x_1 x_2$, $p_{23} = (a_3 - a_2) x_2 x_3$, $p_{31} = (a_1 - a_3) x_3 x_1$,
$p_{14} = (a_4 - a_1) x_1 x_4$, $p_{24} = (a_4 - a_2) x_2 x_4$, $p_{34} = (a_4 - a_3) x_3 x_4$,

und für das Doppelverhältniss $(S_1 S_2 S_3 S_4)$ oder $(\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4)$ erhält man den von den x_i unabhängigen Ausdruck (vergl. § 37, 3)

$$\frac{(a_3 - a_1)}{(a_3 - a_2)} : \frac{(a_4 - a_1)}{(a_4 - a_2)} = -\frac{p_{31}}{p_{23}} : \frac{p_{14}}{p_{24}}.$$

Man bildet nach § 30 leicht die Gleichungen der Complexkegel und Curven für bestimmte Punkte resp. Ebenen; ebenso die Gleichungen für die Constanten x_i und die zwischen den beidemal zugehörigen x_i' selbst in Bestätigung des Vorigen.

Dagegen entsprechen demselben Punkt x_i des Raumes, je nachdem man ihn zum ersten oder zweiten System rechnet, die Punkte

$$a_i x_i, \quad x_i : a_i$$

im zweiten und ersten System, der Verbindungstrahl derselben hat die Coordinaten

$$p_{ik} = x_i x_k \frac{(a_i^2 - a_k^2)}{a_i a_k}$$

und liefert das Doppelverhältniss

$$-\frac{p_{31}}{p_{24}} : \frac{p_{14}}{p_{24}} = \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_2^2 - a_3^2} : \frac{a_1^2 - a_4^2}{a_2^2 - a_4^2},$$

welches vom vorigen verschieden ist, so lange man nicht hat entweder

$$a_1 = a_2 \quad \text{oder} \quad a_3 = a_4,$$

d. h. so lange das Doppelverhältniss nicht in die Einheit übergeht, oder so lange nicht die Complexe in specielle lineare zerfallen, für welche zwei Gegenkanten des Tetraeders als Leitlinien dienen, d. i. die aus den die eine oder andere dieser Geraden schneidenden Strahlen bestehen.

Die Annahme $a_1 = a_2$ macht $p_{12} = 0$, d. h. die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte schneiden die F.-Gerade $A_3 A_4$ (§ 25 Schluss); ist überdiess $a_3 = a_4$, so schneiden diese Geraden auch $A_1 A_2$: axiale resp. geschaarte Collineation. Wäre gleichzeitig $a_1 = a_2 = a_3$, so gehen sie durch A_4 und man hat centrische Collineation.

Eine interessante Form des Auftretens dieser Complexe bietet die Betrachtung von zwei Flächen zweiten Grades dar. Wenn wir jedem Punkt des Raumes seine beiden Polarebenen zuordnen, so constituieren wir dadurch zwei collineare Ebenenräume, und die Schnittlinien jener Polarebenen, die den Punkten des Raumes in beiden Fällen zugleich conjugierten Geraden, bilden somit einen tetraedralen Complex; seine Hauptpunkte und Hauptebenen sind das gemeinsame Quadrupel der beiden Flächen zweiten Grades. Derselbe bleibt unverändert für alle die Paare von Flächen, die dem durch die beiden gegebenen bestimmten Büschel von Flächen zweiter Ordnung und der durch sie definierten Schaar von Flächen zweiter Classe angehören. Für einen gemeinsamen Punkt der Flächen ist die doppelt-conjugierte Gerade die Schnittlinie ihrer entsprechenden Tangentialebenen, also die zugehörige Tangente der Durchdringung, und für eine gemeinsame Tangentialebene ist sie ebenso die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte, die zugehörige Erzeugende der gemeinsamen Developpabeln. Die Tangenten der Durchdringungscurve und die Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln dieser Flächen gehören zum Complex.

Wenn insbesondere die eine der Flächen die mit der andern concentrische Nullkugel oder der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis ist, oder wenn ihre Cartesischen Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

sind, so erhält man als Coordinaten der Pole der Ebene ξ', η', ζ' die

$$\begin{matrix} a^2\xi', & b^2\eta', & c^2\zeta', & -1 \\ \xi', & \eta', & \zeta', & 0; \end{matrix}$$

somit als Coordinaten der ihr doppelt conjugierten Geraden

$$p_{12} = \xi'\eta'(a^2 - b^2), \quad p_{23} = \eta'\zeta'(b^2 - c^2), \quad p_{31} = \zeta'\xi'(c^2 - a^2),$$
$$p_{14} = \xi', \quad p_{24} = \eta', \quad p_{34} = \zeta';$$

also das Doppelverhältniss (1234) des Complexes

$$-\frac{\zeta'\xi'(c^2 - a^2)}{\eta'\zeta'(b^2 - c^2)} : \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}.$$

Die Hauptebenen des Complexes sind die Hauptebenen der Fläche verbunden mit der unendlich fernen Ebene, das Doppelverhältniss ist in Folge dessen in ein einfaches Verhältniss übergegangen. Nun ist der Pol einer Ebene in Bezug auf den imaginären Kugelkreis die Richtung ihrer Normalen und die doppelt conjugierte Gerade einer Ebene in unserem Fall also die auf sie gefällte Normale von ihrem Pol in Bezug auf die Fläche zweiten Grades; zugleich senkrecht zu ihrer Polargeraden in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung, weil diese ja in jener Polarebene liegt.

Eine solche Gerade und die Hauptebenen bestimmen unzählig viele zugehörige Flächen zweiter Ordnung, weil zu jedem Punkt der Geraden als Flächenpunkt die durch ihn gehende Normalebene derselben als Tangentialebene genommen werden kann und damit acht Punkte der Fläche sammt ihren Tangentialebenen bestimmt sind. Durch jeden Punkt gehen unendlich viele Flächen mit demselben Complex.

Der Complex bleibt für die ganze Flächenschaar der Confocalen unverändert, deren Plücker-Cartesische Gleichungen sind

$$(a^2 + \lambda)\xi^2 + (b^2 + \lambda)\eta^2 + (c^2 + \lambda)\zeta^2 = l,$$
$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = l.$$

1) Man wiederhole und erläutere die Entwickelungen von §§ 78, 79 in diesem Zusammenhange und in ihren Beziehungen zum Tetraeder der sich selbst entsprechenden Elemente.

2) Der Complexkegel aus dem Einheitpunkt — in der That einem beliebigen Punkt des Raumes — hat für den ersten Complex des Textes die Gleichung

$$(a_3 - a_1)(a_2 - a_4)(x_1x_3 + x_2x_1) + (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(x_1x_2 + x_3x_4)$$
$$+ (a_2 - a_3)(a_1 - a_4)(x_2x_2 + x_1x_4) = 0,$$

welche wirklich für $a_1 = a_2$ in das Ebenenpaar

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0$$

übergeht. Für den zweiten Complex hat man nur statt der a_i die a_i^2 zu setzen.

3) Man bestimme das Doppelverhältniss des Complexes der doppelt conjugierten Geraden der Punkte respective Ebenen des Raumes in Bezug auf die Flächen zweiten Grades

$$x_1^2 + \cdots = 0, \quad a_1 x_1^2 + \cdots = 0.$$

Man erläutere die Besonderheiten dieser Complexe für den Fall der ähnlichen und affinen Räume.

4) Wie degeneriert der tetraedrale Complex bei centrischer Collineation? Und wie kommt im Fall der geschaarten Involution die in § 81 angegebene Degeneration zu Stande?

Hierin ist die specielle Natur der centrisch collinearen und der involutorisch collinearen Räume besonders deutlich ausgesprochen. (Vergl. § 86, Schluss.) Ebenso für den Fall der ähnlichen, concentrischen und ähnlich liegenden Flächen zweiter Ordnung.

5) Welches sind die Besonderheiten harmonischer Complexe oder solcher vom Doppelverhältniss -1? (Vergl. I, § 25, 1.) Welche Flächen zweiten Grades liefern solche Normalencomplexe? Die Flächen mit $a^2 + b^2 = 2c^2$ respective $b^2 + c^2 = 2a^2$ oder $c^2 + a^2 = 2b^2$.

6) Man construiert die Geraden in gegebener Ebene, die mit einem festen Tetraeder das gegebene Doppelverhältniss (1 2 3 4) bilden, indem man die Schnittlinien s_1, s_2, s_3, s_4 dieser Ebene mit den Flächen $\mathbf{A}_1, \ldots$ des Tetraders verzeichnet und z. B. mittelst $(s_1 . s_1, s_2, s_3, s_4) \barwedge (1\,2\,3\,4)$ den Berührungspunkt des Complexkegelschnittes dieser Ebene mit s_1 bestimmt. (Vergl. I, § 25, 1.) Jede andere Tangente dieses Kegelschnittes ist eine der gewünschten Geraden. Die Geraden von demselben Doppelverhältniss (1 2 3 4) aus einem Punkt erhält man aus den von ihm nach den Tetraederecken gehenden Geraden t_1, t_2, t_3, t_4, indem man mittelst $(t_1 . t_1, t_2, t_3, t_4) \barwedge (1\,2\,3\,4)$ die Tangentialebene des Complexkegels längs t_1 ermittelt, natürlich durch ihre Spur auf einer der Tetraederflächen und also gleichfalls nach I, § 25, 1.

Sind dann $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ zwei solche Gerade mit demselben Doppelverhältniss, die nicht in einer Ebene liegen, und bezeichnen wir durch $S_i^{(1)}$ und $S_i^{(2)}$ ihre je vier Durchstosspunkte, mit $\Sigma_i^{(1)}$, $\Sigma_i^{(2)}$ ihre je vier projicierenden Ebenen mit dem Tetraeder, so dass $(S_1^{(1)} S_2^{(1)} S_3^{(1)} S_4^{(1)}) \barwedge (S_1^{(2)} S_2^{(2)} S_3^{(2)} S_4^{(2)}) \barwedge (\Sigma_1^{(1)} \Sigma_2^{(1)} \Sigma_3^{(1)} \Sigma_4^{(1)}) \barwedge (\Sigma_1^{(2)} \Sigma_2^{(2)} \Sigma_3^{(2)} \Sigma_4^{(2)})$ ist, so sind die vier Verbindungsgeraden $S_i^{(1)} S_i^{(2)}$ Strahlen der zweiten Regelschaar eines Hyperboloides, welche mit den $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ und mit allen andern Mantellinien der ersten Schaar das gegebene feste Doppelverhältniss bestimmen. Und die vier Schnittlinien $\Sigma_i^{(1)} \Sigma_i^{(2)}$ sind Strahlen der zweiten

Regelschaar eines zweiten Hyperboloids, welche mit den $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ und mit allen andern Mantellinien der ersten Schaar gleichfalls dieses Doppelverhältniss bilden. (II, § 36.) Von diesen beiden Hyperboloiden berührt das eine die Flächen des Tetraeders, während das andere die Ecken desselben enthält und sie durchdringen sich ausser in den p noch in zwei Mantellinien der zweiten Schaar nach II, § 38, 10. Man sieht, dass sie die Lösungen der Aufgabe bilden, Hyperboloide durch vier Punkte oder an vier Ebenen zu legen, so dass die Doppelverhältnisse derselben mit den Mantellinien einer Schaar bestimmte Werthe haben; der analogen zu den Aufgaben über Kegelschnitte und Kegel zweiten Grades: Construction aus vier Punkten oder Tangenten, resp. vier Mantellinien oder Tangentialebenen und dem Doppelverhältniss, dass diesen in der Curve resp. im Kegel zukommt. (I, § 24 f.) Natürlich gehören zu jedem bestimmten Zahlwerth des Doppelverhältnisses sechs verschiedene Complexe nach I, § 16, 9, insbesondere zu -1 drei harmonische Complexe; etc. Die zugehörigen Hyperboloide können unter weiteren gemeinsamen Bedingungen construiert werden.

7) Sind $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ drei Gerade des Complexes mit demselben reellen Haupttetraeder und für dasselbe Doppelverhältniss (1234), so entspringen ihnen Hyperboloide (12) und (23) durch die Hauptpunkte und wiederum solche Hyperboloide an die Hauptebenen; die ersteren haben ausser der Geraden $p^{(2)}$ eine die Hauptpunkte enthaltende Raumcurve dritter Ordnung gemein, von demselben Doppelverhältniss für jene Punkte, und die letzteren ausser derselben Geraden eine gemeinsam umgeschriebene Developpable dritter Classe mit dem besagten Doppelverhältniss der Hauptebenen. (§ 78, 1.) Vier solche Gerade $p^{(i)}$ liefern vier Curven dritter Ordnung und vier Developpable dritter Classe, die die Hauptpunkte resp. die Hauptebenen gemein haben. Durch die vier Hauptpunkte gehen drei Systeme harmonischer Curven dritter Ordnung und die vier Hauptebenen werden von drei Systemen harmonischer Developpabeln dritter Classe berührt. Es ist nicht schwer, ihre besonderen Constructionsverhältnisse zu erkennen.

8) Nach Analogie der singulären Projectivitäten der Gebilde zweiter Stufe (I, § 23, oben §§ 77, 78) kann man solche der Elementargebilde dritter Stufe aufstellen; nämlich zwei Collineationen:

a) mit singulärem Punkt im einen und singulärer Ebene im andern Raum, wo jenem alle Punkte des zweiten und dieser alle Ebenen des ersten Raumes entsprechen, während den Punkten in dieser die Punkte bestimmter ihnen projectivisch zugeordneter Ebenen durch jenen entsprechen,

b) mit singulären Geraden, denen je alle Geraden des andern Raumes correspondieren. Welche Besonderheit hat das Erzeugniss ihrer Verbindung in beiden Fällen?

9) Es giebt drei singuläre Reciprocitäten, nämlich in jedem

Raum a) mit einem singulären Punkt, b) mit einer singulären Ebene, c) mit einer singulären Geraden. Man erläutere die Anwendung der vorhergehenden Entwickelungen auf dieselben.

83. Wir schreiten weiter zur Untersuchung der Reciprocität der Räume.

Zwei reciproke Räume liegen wie zwei collineare stets ineinander und erzeugen somit immer einen Ort von Punkten, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen und eine Enveloppe dieser Ebenen, und es ist zu erwarten, dass solcher Elemente zweifach unendlich viele oder dass diese Erzeugnisse Flächen zweiten Grades sein werden, nachdem bereits in Gebilden zweiter Stufe Curven als solche erhalten worden sind. Die analytische Ausdrucksform bestätigt diess sofort. Beziehen wir beide Räume auf dieselbe Gruppe fundamentaler Elemente, so dass gleiche Coordinatenverhältnisse auch das nämliche Element bedeuten, gehen wir also von der allgemeinen linearen Substitution aus (§ 62)

$$m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4,$$
$$r\xi_k = \alpha_{1k}x_1' + \alpha_{2k}x_2' + \alpha_{3k}x_3' + \alpha_{3k}x_4',$$

so erhalten wir als Ausdruck für den Ort der Punkte, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, die Gleichung

$$\alpha_{11}x_1^2 + \cdots + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\,x_1x_2 + \cdots\cdots = 0,$$

eine durch die Reciprocität bestimmte Fläche zweiter Ordnung, die wir die Polfläche nennen wollen; und als Gleichung der Enveloppe jener Ebenen

$$A_{11}\xi_1^2 + \cdots + (A_{12} + A_{21})\,\xi_1\xi_2 + \cdots\cdots = 0$$

für A_{ik} als die dem Element α_{ik} entsprechende Unterdeterminante der Substitutionsdeterminante, oder auch

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14}, & \xi_1 \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24}, & \xi_2 \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34}, & \xi_3 \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44}, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und entwickelt unter alleiniger Angabe der Leitglieder, aus denen die übrigen durch cyclische Indicesverschiebung hervorgehen,

$$\xi_1^2\{\alpha_{22}(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}\alpha_{43})+\alpha_{32}(\alpha_{24}\alpha_{43}-\alpha_{44}\alpha_{23})+\alpha_{42}(\alpha_{23}\alpha_{34}-\alpha_{33}\alpha_{24})\}$$
$$+\ldots-\xi_1\xi_2\{(\alpha_{12}+\alpha_{21})(\alpha_{33}\alpha_{14}-\alpha_{34}\alpha_{13})+\alpha_{32}(\alpha_{14}\alpha_{43}-\alpha_{44}\alpha_{13})$$
$$+\alpha_{12}(\alpha_{13}\alpha_{34}-\alpha_{33}\alpha_{14})+\alpha_{34}(\alpha_{24}\alpha_{13}-\alpha_{14}\alpha_{23})+\alpha_{41}(\alpha_{23}\alpha_{34}-\alpha_{33}\alpha_{24})\}$$
$$\ldots-\xi_2\xi_1\{(\alpha_{21}+\alpha_{12})(\alpha_{14}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{34})+\alpha_{32}(\alpha_{41}\alpha_{13}-\alpha_{14}\alpha_{43})$$
$$+\alpha_{12}(\alpha_{13}\alpha_{34}-\alpha_{33}\alpha_{14})+\alpha_{14}(\alpha_{22}\alpha_{34}-\alpha_{24}\alpha_{32})+\alpha_{34}(\alpha_{24}\alpha_{13}-\alpha_{14}\alpha_{23})\}$$
$$-\cdot=0;$$

eine gleichfalls durch die Reciprocität bestimmte Fläche zweiter Classe, die die Polarfläche heissen mag. Wir erhalten sie ebenso geometrisch construierend; denn für eine beliebige Ebene des Raumes als dem ersten oder ungestrichenen System angehörig ergiebt sich ein zu ihr projectivisches Bündel im zweiten oder gestrichenen Raum, und wenn wir dieses mit jener schneiden respective jene aus dem Scheitel von diesem projicieren, so erhalten wir eine Curve zweiter Ordnung und eine Curve zweiter Classe dort und entsprechende Kegel hier; die erste Curve als Ort der Punkte der Ebene, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, oder als ihren Schnitt mit der Polfläche, die letzte Kegelfläche als Enveloppe dieser Ebenen aus einem Punkt d. i. als bezüglichen Tangentenkegel der Polarfläche. Von dem Fall ihrer Vereinigung sprechen wir nachher, wie auch von dem ihrer Unbestimmtheit, denn diese Fälle entsprechen und charakterisieren besondere Arten der Reciprocität; für jetzt bleiben wir beim allgemeinen Fall und haben offenbar die gegenseitigen Beziehungen dieser beiden Flächen und die Verwendung derselben zur Untersuchung der reciproken Räume zu erörtern.

Man sieht sofort, dass aus den früher für den bezüglichen Satz für Gebilde zweiter Stufe angeführten Gründen sich auch hier ergiebt: Wenn ein Punkt des Raumes als dem ersten System angehörig in der ihm entsprechenden Ebene im zweiten System liegt, so liegt er auch als zum zweiten System gerechnet in seiner entsprechenden Ebene im ersten; d. h. die Pol- und die Polarfläche sind einzig bestimmt.

Nach dem Vorbilde von § 72 erwarten wir, dass die Charakteristik der Beziehungen beider Flächen zu einander sich an diejenigen Elementenpaare anschliessen wird, welche einander involutorisch entsprechen. Ueber die Existenz und Zahl solcher Paare erhalten wir durch folgende Ueberlegung

Aufschluss: Dem Punkt y_i entspricht im gestrichenen Raum die Ebene

$$x_1'(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{14}y_4) + x_2'(\alpha_{21}y_1 + \cdots) + x_3'(\alpha_{31}y_1 + \cdots) + x_4'(\alpha_{41}y_1 + \cdots) = 0,$$

im ungestrichenen Raum aber die davon im Allgemeinen verschiedene Ebene

$$x_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \alpha_{41}y_4) + x_2(\alpha_{12}y_1 + \cdots) + x_3(\alpha_{13}y_1 + \cdots) + x_4(\alpha_{14}y_1 + \cdots) = 0$$

und beide werden nur dann identisch, wenn man hat

$$\begin{aligned}
k(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{14}y_4) &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \alpha_{41}y_4,\\
k(\alpha_{21}y_1 + \cdots) &= \alpha_{12}y_1 + \cdots,\\
k(\alpha_{31}y_1 + \cdots) &= \alpha_{13}y_1 + \cdots,\\
k(\alpha_{41}y_1 + \cdots) &= \alpha_{14}y_1 + \cdots.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können aber nur für vier bestimmte Werthe von k befriedigt werden, nämlich wenn man hat

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11}(k-1), & k\alpha_{12} - \alpha_{21}, & k\alpha_{13} - \alpha_{31}, & k\alpha_{14} - \alpha_{41}\\
k\alpha_{21} - \alpha_{12}, & \alpha_{22}(k-1), & k\alpha_{23} - \alpha_{32}, & k\alpha_{24} - \alpha_{42}\\
k\alpha_{31} - \alpha_{13}, & k\alpha_{32} - \alpha_{23}, & \alpha_{33}(k-1), & k\alpha_{34} - \alpha_{43}\\
k\alpha_{41} - \alpha_{14}, & k\alpha_{42} - \alpha_{24}, & k\alpha_{43} - \alpha_{34}, & \alpha_{44}(k-1)
\end{vmatrix} = 0,$$

d. h. für die vier Wurzelwerthe einer durch die Substitution der Reciprocität bestimmten biquadratischen Gleichung.

Diese Wurzeln liefern vier Gruppen der Werthe y_i, welche die so auf ihre entsprechenden Ebenen bezogenen Punkte bestimmen, und man erkennt überdiess, dass diese Punkte zugleich in den ihnen entsprechenden Ebenen enthalten sind; jene sind nothwendig die Ecken und diese anliegende Flächen desselben Tetraeders.

Denn für k_1 als eine der Wurzeln hat man

$$k_1(\alpha_{i1}y_1 + \cdots) = \alpha_{1i}y_1 + \cdots$$

und daher für die dem Punkt y_i entsprechende Ebene

$$x_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots) + x_2(\alpha_{21}y_1 + \cdots) + x_3(\alpha_{31}y_1 + \cdots) + x_4(\alpha_{41}y_1 + \cdots) = 0$$

mit Einsetzung von y_i für x_i den Werth n, wenn y_i nicht in der entsprechenden Ebene liegt, andrerseits nach Multiplication mit k_1 ebenso $k_1 n$ als n; also entweder $k_1 = 1$ oder n gleich Null. Ersteres ist aber keine Wurzel der Gleichung im Fall

der Gebilde dritter Stufe, indess sie es ist im Fall der Gebilde zweiter Stufe. Der Punkt (vergl. § 86 Anm.) A_i liegt also in $\mathbf{A}_i'$.

Denken wir $A_iA_kA_l$, so entspricht ihr $\mathbf{A}_i'\mathbf{A}_k'\mathbf{A}_l'$ und muss in ihr liegen, also einer der drei Punkte sein; d. h. beide bilden dasselbe Tetraeder.

Wir denken diess Tetraeder als das Fundamentaltetraeder der projectivischen Coordinaten und wollen festsetzen, dass den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 der Reihe nach die Flächen $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ oder $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$ correspondieren sollen, weil nur so auch die Kanten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 sich selbst und die A_1A_3, A_2A_4 einander involutorisch entsprechen. Daraus folgt auch die stete Realität von A_1A_3, A_2A_4. Nach diesen Festsetzungen muss in der Substitution der Reciprocität

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{41} = 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{32} = 0,$$
$$\alpha_{23} = \alpha_{33} = \alpha_{43} = 0, \quad \alpha_{14} = \alpha_{34} = \alpha_{44} = 0$$

sein und man erhält für die beiden Substitutionen die einfachen Gleichungen (§ 62, 6)

$$m\xi_1' = \alpha_{13}x_3, \; m\xi_2' = \alpha_{24}x_4, \; m\xi_3' = \alpha_{31}x_1, \; m\xi_4' = \alpha_{42}x_2;$$
$$r\xi_1 = \alpha_{31}x_3', \; r\xi_2 = \alpha_{42}x_4', \; r\xi_3 = \alpha_{13}x_1', \; r\xi_4 = \alpha_{24}x_2'.$$

Die Polfläche wird nun durch

$$(\alpha_{13} + \alpha_{31})\, x_1x_3 + (\alpha_{24} + \alpha_{42})\, x_2x_4 = 0$$

und die Polarfläche durch

$$\alpha_{24}\alpha_{42}(\alpha_{13} + \alpha_{31})\, \xi_1\xi_3 + \alpha_{13}\alpha_{31}(\alpha_{24} + \alpha_{42})\, \xi_2\xi_4 = 0$$

oder

$$= \alpha_{21}\alpha_{42}(\alpha_{13}\alpha_{31})\, x_2x_4 + \alpha_{13}\alpha_{31}(\alpha_{21} + \alpha_{42})\, x_1x_3 = 0$$

dargestellt; beide Flächen enthalten das Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ als ihre gemeinsame Curve und Developpable und haben in den Ecken A_1, ... desselben die Tangentialebenen $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ mit einander gemein.

Wieder dient die Betrachtung der einander doppelt conjugierten Elemente zu genauerer Erläuterung. Einem Punkt P oder y_i entsprechen alle Punkte einer Geraden p^*, der Schnittlinie seiner beiden entsprechenden Ebenen $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, doppelt; die Gleichungen der letzteren sind

$$\alpha_{13}y_3x_1 + \alpha_{24}y_4x_2 + \alpha_{31}y_1x_3 + \alpha_{42}y_2x_4 = 0,$$
$$\alpha_{31}y_3x_1 + \alpha_{42}y_4x_2 + \alpha_{13}y_1x_3 + \alpha_{24}y_2x_4 = 0;$$

und die Coordinaten der dem Punkt y_i doppelt conjugierten Geraden sind also

$$\pi_{12} = y_3 y_4(\alpha_{13}\alpha_{42} - \alpha_{31}\alpha_{24}), \quad \pi_{23} = y_1 y_4(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{31}\alpha_{42}),$$
$$\pi_{31} = y_1 y_3(\alpha_{31}^2 - \alpha_{13}^2), \quad \pi_{14} = y_2 y_3(\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{31}\alpha_{42}),$$
$$\pi_{24} = y_2 y_4(\alpha_{24}^2 - \alpha_{42}^2), \quad \pi_{34} = y_1 y_2(\alpha_{31}\alpha_{21} - \alpha_{13}\alpha_{42}).$$

Nach § 37, 3 erhält man also das Doppelverhältniss (1 2 3 4) für diesen Strahl als von dem Punkte y_i unabhängig, nämlich

$$= -\frac{(\alpha_{31}^2 - \alpha_{13}^2)\,(\alpha_{24}^2 - \alpha_{42}^2)}{(\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{31}\alpha_{42})^2},$$

durch die Substitution der Reciprocität allein bestimmt. Die doppelt conjugierten Geraden aller Punkte des Raumes bilden einen tetraedralen Complex in Bezug auf das Tetraeder der involutorischen Elemente. Den Punkten $(y_i + \lambda z_i)$ einer geraden Reihe entsprechen die Erzeugenden einer Regelschaar durch die Fundamentalpunkte

$$(\alpha_{12}\alpha_{42} - \alpha_{31}\alpha_{24})\{x_1x_2(y_3z_4 - y_4z_3) + x_3x_4(y_2z_1 - y_1z_2)\}$$
$$+ (\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{13}\alpha_{24})\{x_2x_3(y_1z_4 - y_1z_1) + x_1x_4(y_2z_3 - y_3z_2)\}$$
$$+(\alpha_{31}^2 - \alpha_{13}^2)(y_1z_3 - y_3z_1)x_1x_3 + (\alpha_{42}^2 - \alpha_{24}^2)(y_2z_4 - y_4z_2)x_2x_4 = 0,$$

welche zum Kegel wird, wenn $y_i z_i$ selbst ein Strahl des Complexes ist; und dualistisch entsprechend. Drei solche Kegel bestimmen die Fundamentalpunkte.

Durch Subtraction der Gleichungen beider Ebenen $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ folgt aber weiter, weil durch $x_i = y_i$ erfüllt,

$$(y_3x_1 - y_1x_3)(\alpha_{13} - \alpha_{31}) + (y_4x_2 - y_2x_4)(\alpha_{24} - \alpha_{42}) = 0,$$

die Gleichung einer Ebene $\mathbf{P}^0$ oder p^*P durch die Schnittlinie der beiden vorigen Ebenen, welche die Schnittlinie der beiden Ebenen YA_2A_4 oder $y_3x_1 - y_1x_3 = 0$ und YA_1A_3 oder $y_4x_2 - y_2x_4 = 0$, d. h. die von Y ausgehende Transversale t_y der beiden zum Vierseit $A_1A_2A_3A_4$ nicht gehörigen Kanten des Tetraeders der $\mathbf{A}_i$ enthält.

Addiert man dieselben Gleichungen, so hat man

$$(y_3x_1 + y_1x_3)(\alpha_{13} + \alpha_{31}) + (y_4x_2 + y_2x_4)(\alpha_{24} + \alpha_{42}) = 0,$$

welches offenbar die Gleichung der Polarebene $\mathbf{P}_y$ von y_i in Bezug auf die Polfläche der Reciprocität ist. Man sieht, dass diese Ebene zur vorigen harmonisch con-

jugiert ist in Bezug auf die beiden dem Punkt Y entsprechenden Ebenen.

Für einen Punkt der Polfläche muss, weil beide ihm entsprechende Ebenen durch ihn gehen und mit seiner Polarebene d. h. der bezüglichen Tangentialebene ein Büschel bilden müssen, die Gerade p^* eine der durch ihn gehenden Tangenten der Polfläche sein; ebenso für eine Tangentialebene der Polarfläche die Verbindungslinie der beiden ihr entsprechenden Punkte eine der in ihr liegenden Tangenten der Polarfläche.

Der Schnittpunkt P_1 von p^* mit t_y ist durch die Verhältnisse seiner Coordinaten

$$x_1 : x_2 = -(\alpha_{24} + \alpha_{42})\, y_4 : (\alpha_{13} + \alpha_{31})\, y_3,$$
$$x_1 : x_3 = y_1 : y_3, \quad x_2 : x_4 = y_2 : y_4,$$

bestimmt; er bildet mit P zusammen ein Paar projectivischer Reihen, deren Doppelpunkte in den Gegenkanten des Tetraeders liegen.

Dualistisch entsprechend erhalten wir für eine Ebene η_i die Gleichungen der entsprechenden Punkte

$$\frac{\eta_3}{\alpha_{31}}\xi_1 + \frac{\eta_4}{\alpha_{42}}\xi_2 + \frac{\eta_1}{\alpha_{13}}\xi_3 + \frac{\eta_2}{\alpha_{24}}\xi_4 = 0,$$
$$\frac{\eta_3}{\alpha_{13}}\xi_1 + \frac{\eta_4}{\alpha_{24}}\xi_2 + \frac{\eta_1}{\alpha_{31}}\xi_3 + \frac{\eta_2}{\alpha_{42}}\xi_4 = 0,$$

die denselben Complex durch Verbindung liefern.

Durch Subtraction entsteht wieder die Gleichung

$$\left(\eta_3\xi_1 - \eta_1\xi_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_{31}} - \frac{1}{\alpha_{13}}\right) + \left(\eta_4\xi_2 - \eta_2\xi_4\right)\left(\frac{1}{\alpha_{42}} - \frac{1}{\alpha_{24}}\right) = 0,$$

die Gleichung des Punktes ihrer Verbindungslinie π^*, welcher der in der Ebene η_i liegenden Transversale der Kanten A_1A_3, A_2A_4 angehört. Die Addition giebt

$$\left(\eta_3\xi_1 + \eta_1\xi_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_{31}} + \frac{1}{\alpha_{13}}\right) + \left(\eta_4\xi_2 + \eta_2\xi_4\right)\left(\frac{1}{\alpha_{42}} + \frac{1}{\alpha_{24}}\right) = 0,$$

die Gleichung des Pols der Ebene η_i in Bezug auf die Polarfläche, des vierten harmonischen zugleich zu den drei vorigen Punkten.

Nehmen wir als Ebene η_i die Ebene P^0 oder Pp^*, oder setzen wir

$$\eta_1 = y_3(\alpha_{13} - \alpha_{31}), \quad \eta_2 = y_4(\alpha_{24} - \alpha_{42}),$$
$$\eta_3 = -y_1(\alpha_{13} - \alpha_{31}), \quad \eta_4 = -y_2(\alpha_{24} - \alpha_{42}),$$

so wird die in ihr liegende Transversale der Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ mit t_y identisch und der Schnitt P_1^* mit der zugehörigen doppelt conjugierten Geraden π^* hat die Coordinaten

$$\frac{y_1}{\alpha_{13}\alpha_{31}}(\alpha_{13}-\alpha_{31})^2,\ \frac{y_2}{\alpha_{24}\alpha_{42}}(\alpha_{24}-\alpha_{42})^2,\ \frac{y_3}{\alpha_{13}\alpha_{31}}(\alpha_{13}-\alpha_{31})^2,$$

$$\frac{y_4}{\alpha_{24}\alpha_{42}}(\alpha_{24}-\alpha_{42})^2.$$

Er bildet mit P_1 ein Paar einer Involution, welche ihre Doppelpunkte in $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ hat.

Es ist klar, dass man vom Punkte P aus durch die gegebenen Bestimmungselemente der Reciprocität die gerade Linie p^*, und durch die Ebene Pp^* ebenso die gerade Linie π^* erhält, dadurch aber die Transversale t_y, und dass vier solche Gerade jene Gegenkanten als ihre gemeinsamen Transversalen bestimmen; endlich dass diess auch durch zwei der Transversalen t_y mittelst der vorerwähnten Involution geschehen kann; zugleich erhält man immer die Polarebene von P in Bezug zur Polfläche und den Pol von Pp^* in Bezug zur Polarfläche; für den letztern hat man die zu den Ecken des Tetraeders führenden Coordinatenverhältnisse

$$x_1 : x_3 = -y_1 : y_3,\quad x_2 : x_4 = -y_2 : y_4,$$

$$x_1 : x_2 = y_1\left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{31}}-\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}}\right) : y_2\left(\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{42}}-\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{21}}\right).$$

1) Man stelle die Untersuchungen des § 72 in den allgemeinen Zusammenhang der reciproken Räume und ergänze dadurch das Vorige.

2) Man untersuche die Bewegung der doppelt conjugierten Geraden p^*, welche der Bewegung des Punktes P in einem Kegelschnitt entspricht.

3) Man specialisiere die einer Geraden entsprechende Regelschaar für den Fall, wo die Gerade durch eine Ecke des involutorischen Tetraeders geht oder in einer Fläche desselben liegt.

4) Die Bedingung für die involutorische Correspondenz von zwei Geraden ist aufzustellen und das Paar solcher Geraden daraus zu deduzieren.

5) Ist P, Q' ein Punkt der Polfläche und $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}$ das Paar der ihm im einen und andern Sinn entsprechenden also die Polarfläche berührenden Ebenen, so wird durch die erstere die zweite bestimmt, weil sie die andere durch die in $\mathbf{P}'$ liegende Tangente der Polfläche in P an die Polarfläche gehende Tangentialebene ist.

Sei nun RS' ein beliebiger anderer Punkt der Polfläche, so reicht das Vorige hin, um die ihm in beiderlei Sinn zugeordneten Ebenen $\mathbf{R}'$, $\mathbf{S}$ zu construieren. Legt man durch die Gerade PR, $Q'S'$ die beiden möglichen Tangentialebenen $\mathbf{T}_1\mathbf{U}_1'$, $\mathbf{T}_2\mathbf{U}_2'$ an die Polarfläche, welche in den durch PQ' gehenden Geraden g_1, g_1' und in g_2, g_2' die Ebenen $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}'$ schneiden, so dass auf diesen Geraden noch je ein Punkt der Polfläche nämlich respective U_1, T_1', U_2, T_2' gelegen ist. Nun ist die Ebene der drei Punkte RS', T_1', T_2' die Ebene $\mathbf{R}'$ und die von RS', U_1, U_2 die Ebene $\mathbf{S}$.

Man bilde die Construction der Punkte, die einer Tangentialebene der Polarfläche im einen und im andern Sinn entsprechen.

6) Natürlich können durch Zusammensetzung aus dem Vorigen die einem beliebigen Punkt des Raumes in beiderlei Sinn entsprechenden Ebenen und umgekehrt bestimmt werden; ersteres durch drei vom Punkt ausgehende Tangentialebenen der Polarfläche und deren entsprechende Punktepaare, oder durch Ebenen, die die Polfläche schneiden und deren entsprechende Punkte daher durch diese bestimmbar sind.

7) Man bestimme die Transversalen der Gegenkanten A_1A_3, A_2A_4 aus den allgemeinen Gleichungen der Substitution.

8) Welche Fälle hinsichtlich der Realität der involutorisch entsprechenden Elemente sind möglich?

84. Wenn in den Substitutionsgleichungen die Relation $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ überall erfüllt ist, so wird die Polfläche mit der Polarfläche identisch, die Determinante (p. 589) der letztern ist einfach die Gleichung der erstern in den ξ_i; einem Punkt entspricht in beiderlei Sinn seine Polarebene in Bezug auf diese Fläche, einer Ebene ihr Pol in Bezug auf dieselbe Fläche

$$\alpha_{11}x_1^2 + \cdots + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \cdots\cdots = 0,$$

die allgemeine Reciprocität ist in Polarreciprocität in Bezug auf diese Fläche zweiten Grades übergegangen, die man ihre Directrix nennen kann. Alle Elementenpaare entsprechen sich nun involutorisch, die Lehre von den doppelt conjugierten Geraden der Punkte und Ebenen des Raumes wird gegenstandslos, da nun alle Geraden in ihren Polarebenen respective durch ihre Pole solche Gerade sind. Man nennt diese Verbindung von zwei reciproken Räumen ein räumliches Polarsystem und bezeichnet die Directrixfläche etwa auch als die Ordnungsfläche desselben.

Wir können zeigen, dass zwei reciproke Räume immer in diese involutorische Lage der Polarreciprocität übergeführt oder zu einem Polarsystem vereinigt werden können. Es ist

dazu erforderlich, dass ein Tetraeder sich in dem Sinn selbst conjugiert sei, dass jede seiner Ecken der Gegenfläche entspricht; denn wenn ein solches Tetraeder existiert, so kann es zum Fundamentaltetraeder gewählt werden, und seine vorausgesetzte Eigenschaft bedingt dann (§ 62, 3), dass die Substitution der Reciprocität die einfache Form hat

$$m\xi_i' = \alpha_{ii}x_i, \quad \varrho\,\xi_k = \alpha_{kk}x_k'.$$

Dann ist aber $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, weil beide gleich Null sind, dem Punkt x_i entspricht die Ebene von den vorstehenden Coordinaten, d. h. von der Gleichung

$$\alpha_{11}x_1x_1' + \alpha_{22}x_2x_2' + \alpha_{33}x_3x_3' + \alpha_{44}x_4x_4' = 0$$

mit x_i' als den Variabeln; und für die Directrixfläche, wo der Pol x_i der Polarebene selbst angehört, hat man also

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \alpha_{44}x_4^2 = 0, \quad \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}\xi_1^2 + \cdots = 0.$$

Man sieht, wenn ein Tetraeder der bezeichneten Art bekannt ist, so bestimmen ein Punkt E und seine Polarebene $\mathbf{E}$ die Substitution, also die Reciprocität. Man beweist auch auf Grund von § 73 geometrisch, dass die Existenz eines Polartetraeders das involutorische Entsprechen von E und $\mathbf{E}$ und aller Paare nach sich zieht. Von der Lage des gegebenen Elementenpaares gegen das Poltetraeder hängt in sehr einfacher Art die Realität der Directrixfläche ab, denn sie schneidet auf den Kanten des Tetraeders die Doppelpunkte der zugehörigen Involutionen A_i, A_k; E_{ik}, $\mathbf{E}_{ik}$ aus und bestimmt mit den Gegenkanten die Doppelebenen einer analogen Involution als Tangentialebenen. Mit Hilfe derselben Involutionen construiert man in der involutorischen Lage oder im Polarsystem am einfachsten das entsprechende Element zu einem gegebenen, unabhängig also von der Realität der Directrixfläche. (Siehe unten.)

Man sagt daher, ein Polarsystem sei durch ein Poltetraeder und ein demselben nicht angehöriges Elementenpaar bestimmt.

Die Ueberführung zweier reciproken Räume in die involutorische Lage des Polarsystems geschieht in strenger Analogie zu § 73 durch folgende Betrachtung. Aus den Bestimmungselementen der reciproken Räume construieren wir die der unendlich fernen Ebene des Raumes entsprechenden Punkte, den im ersten Raume M und den im zweiten M', die

Gegen- oder Mittelpunkte derselben. Dann entsprechen den unendlich fernen Punkten und Geraden des Raumes Ebenen und Gerade durch M und M' respective in beiden Räumen, und das projicierende Bündel der unendlich fernen Elemente aus dem Mittelpunkte im einen Raum ist dem Bündel der diesen Elementen entsprechenden durch den Mittelpunkt des andern reciprok. Denken wir das letztere als Orthogonalsystem geordnet, so dass seine zu einander rechtwinkligen Strahlen und Ebenen als einander zugeordnet betrachtet werden, so bilden die entsprechenden Elementenpaare des ersteren ein Polarsystem und es giebt in demselben nach § 76 ein orthogonales sich selbst entsprechendes Tripel, d. h. drei zu einander rechtwinklige Strahlen, von denen jeder der Verbindungsebene der beiden andern entspricht. Mit den entsprechenden auch orthogonalen Elementen zu diesen im Bündel des andern Mittelpunktes haben wir die Elemente von zwei Tetraedern bestimmt, welche in vierfacher Weise zu einem Poltetraeder vereinigt werden können; ihre den M, M' gegenüberliegenden Flächen liegen in einander in der unendlich fernen Ebene und werden durch keinerlei Bewegung getrennt; den dort liegenden Ecken und Kanten des einen entsprechen die durch den andern Mittelpunkt gehenden Flächen und Kanten des andern und da diese orthogonale Tripel bilden, so können sie durch Verschiebung und Drehung des einen auf viererlei Art so aufeinander gelegt werden, dass die entsprechenden Kanten einander gegenüberliegen. Man hat die absolut grössten aller entsprechenden congruenten Tetraeder der Räume bestimmt und in Deckung vereinigt; in genauer Analogie zu dem Vorgang des § 73, wo auch unter allen entsprechenden congruenten Dreiecken der reciproken Ebenen die absolut grössten vereinigt wurden; und schliesslich zur involutorischen Vereinigung projectivischer Büschel durch die verkehrte Zusammenlegung der entsprechenden rechten Winkel. Nach dem Vorigen ist dann die involutorische Lage der beiden reciproken Räume hergestellt. Dann ist M der Mittelpunkt des Polarsystems und seiner Directrixfläche und das orthogonale Tripel das ihrer Hauptaxen und Hauptebenen. Da jene entsprechenden orthogonalen Tripel nach § 73 stets reell sind, so ist auch die Verbindung der Räume zum Polarsystem

stets reell ausführbar. Die Arten der Zusammenlegung unterscheiden sich durch Art und Realität der Ordnungsfläche. Denken wir die Axen zugleich als Axen rechtwinkliger Cartesischer und Plücker'scher Coordinaten und nehmen wir an, dass bei der ursprünglichen oder ersten Zusammenlegung der Punkt E und das Spurendreieck der Ebene $\mathfrak{E}$ in demselben Octanten liegen, so wie dass dieser Octant der der positiven Axen x, y, z sei oder die Coordinaten x', y', z' sämmtlich positiv und diejenigen von $\mathfrak{E}$, also ξ', η', ζ' sämmtlich negativ sind, so entsprechen die drei andern Zusammenlegungen durch 180^0-Drehungen von E um die Axen x, y, z resp. für E den Coordinatengruppen $(x', -y', -z')$, $(-x', y', -z')$ und $(-x', -y', z')$. Mit den Kürzungen $\alpha_{22} : \alpha_{11} = a$, $\alpha_{33} : \alpha_{11} = b$, $\alpha_{44} : \alpha_{11} = c$ liefert der Uebergang zu den elementaren Coordinaten die Substitutionsformeln der Reciprocität

$\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$; also $a = \xi' : x'$, $b = \eta' : y'$, $c = \zeta' : z'$

und die Gleichungen der Directrix

$$1 + ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad abc + bc\xi^2 + ca\eta^2 + ab\zeta^2 = 0.$$

Nach dem Vorigen sind aber für die erste Zusammenlegung a, b, c zugleich negativ, für die zweite, dritte und vierte nur jeweilen a, b oder c resp., sodass also den vier entstandenen Polarsystemen die Directrixen (in Punktcoordinaten)

$$1 = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad 1 = ax^2 - by^2 - cz^2,$$
$$1 = -ax^2 + by^2 - cz^2, \quad 1 = -ax^2 - by^2 + cz^2$$

entsprechen; resp. ein Ellipsoid und drei zweifache Hyperboloide mit den Axen x, y, z resp. als schneidenden Hauptaxen. Lag aber bei der ersten Zusammenlegung E nicht in demselben Octanten mit dem Spurendreieck von $\mathfrak{E}$, sondern z. B. in einem der drei benachbarten, sodass seine Coordinaten etwa waren $-x', y', z'$, so werden sie durch dieselben 180^0-Drehungen der Reihe nach $-x', -y', -z'$; $x', y', -z'$; $x', -y', z'$ und die Zeichen der a, b, c sind in der ersten Zusammenlegung $+, -, -$ und werden der Reihe nach $+++$, $---$ und $-+-$ oder die Gleichungen der Directrixen der entstandenen Polarsysteme sind resp.

$$1 = -ax^2 + by^2 + cz^2, \quad 1 = -ax^2 - by^2 - cz^2,$$
$$1 = ax^2 + by^2 - cz^2, \quad 1 = ax^2 - by^2 + cz^2,$$

die erste, dritte und vierte einfache Hyperboloide der Reihe

nach mit der Axe x, z, y als nicht schneidender Hauptaxe; die zweite eine Fläche zweiten Grades ohne reelle Punkte und also Tangentialebenen, die daher (§ 77, 1) als imaginäres Ellipsoid zu bezeichnen ist. Man sieht, dass das reelle und das imaginäre Ellipsoid durch drei positive und drei negative Halbaxenquadrate charakterisiert sind, das zweifache und das einfache Hyperboloid mit derselben dort schneidenden hier nicht schneidenden Hauptaxe jeweilig ebenfalls durch entgegengesetzte Zeichen aller drei Halbaxenquadrate bei gleichen numerischen Werthen derselben; es sind in Paaren conjugierte Flächen zweiten Grades in genauer Analogie zu § 73. In jedem Paar derselben kann die eine der Flächen als die Stellvertreterin der andern angesehen werden, wie a. a. O., weil gleichgelegene Halbdurchmesser $y : x = m$, $z : x = n$ in solchen Flächen für die Potenzen ihrer Involutionen oder die Quadrate ihrer Längen stets numerisch gleiche Werthe von entgegengesetzten Zeichen liefern; natürlich wird man nur im Fall des imaginären Ellipsoids von dieser Stellvertretung Gebrauch machen müssen, z. B. nach dem in der Entstehung liegenden Satz: Die Polarebenen desselben Punktes in Bezug auf zwei conjugierte Flächen zweiten Grades von denselben Hauptaxen sind zu einander parallel und äquidistant vom Centrum; die Pole derselben Ebene in Bezug auf conjugierte Flächen zweiten Grades von denselben Hauptaxen liegen in demselben Durchmesser und äquidistant vom Centrum (Antipolarebene, resp. Antipol nach üblicher Bezeichnung); die conjugierten derselben Geraden sind parallel und in derselben Diametralebene äquidistant vom Centrum. Solche Flächen haben die Systeme der conjugierten Durchmesser und Diametralebenen gemein und somit als ihre Directrixen auch dieselben Asymptotenkegel.

In jeder Hauptebene erhält man construierend den zugehörigen Hauptschnitt als Directrix desjenigen Polarsystems, welches die zugehörigen Axen zu seinen Axen hat und für das die Spur der Ebene $\mathbf{E}$ und der Fusspunkt der Normale der Hauptebene durch E ein Paar sind.

Aber wir erörtern diese Constructionen besser an dem allgemeinen Fall, wo ein Polartetraeder mit den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 und den Gegenflächen $\mathbf{A}_1$, ... und ein Paar E, $\mathbf{E}$ (von unabhängiger Lage) gegeben ist. Mit den Bezeichnungen

und Constructionen unserer Coordinatentheorie in § 16 sind dann die Polarsysteme der Querschnitte der Ebenen $\mathbf{A}_1, \ldots$ mit der Directrixfläche durch die A_2, A_3, A_4, etc. als Polardreieck und den Punkt $E_1, \ldots$ mit der Geraden $\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{34}\mathbf{E}_{42}$ als Paar bestimmt. Zu einem Punkt P erhält man die Polarebene $\mathbf{P}$, indem man zu dem Durchstosspunkt $P_1, \ldots$ der Geraden $A_1 P, \ldots$ mit den Ebenen $\mathbf{A}_1, \ldots$ die entsprechenden Geraden mit ihren Polarsystemen construiert, natürlich die Spuren der Ebene $\mathbf{P}$ in den Flächen des Polartetraeders. Die Umkehrung der Constructionsfolge führt ebenso von der Polarebene zum Pol. Die zugehörigen Polarsysteme in der Ebene und im Bündel, welche in perspectivischer Lage sind, werden dabei mit bestimmt (vergl. § 73), damit auch der Querschnitt der Directrixfläche in jener nebst seinem Tangentenkegel. Man erhält zu einer Geraden g die conjugierte g^* im Polarsystem, indem man zu zweien ihrer Durchstosspunkte in den Ebenen des Polartetraeders durch Verbindung ihrer entsprechenden Geraden in den zugehörigen Polarsystemen mit den resp. Gegenecken die Polarebenen ermittelt, nämlich als die Schnittlinie derselben. Die zu g^* gehörige Involution harmonischer Pole ist identisch mit der dieser Geraden in dem Polarsystem einer dieser Ebenen zukommenden und liefert als perspectivisch zu ihr die Involution harmonischer Polarebenen für g; ihre Doppelpunkte sind die Schnittpunkte der Directrixfläche mit g^* und liefern durch Verbindung mit g ihre Tangentialebenen aus dieser. Ausgehend von den projicierenden Ebenen von g aus zwei Ecken des Polartetraeders führt die dualistisch entsprechende Construction zu den gleichen Ergebnissen.

Die Specialisierung für die Hauptaxen und ein Paar geschieht gemäss dem Uebergang von der Construction projectivischer Coordinaten zu derjenigen der Cartesisch-Plücker'schen.

Aber wir haben in II, § 39 diesen Betrachtungen genügende Vorbereitung gegeben, um sie hier kürzen zu dürfen.

Wir bemerken noch die einfache Verbindung der Erzeugung der reellen Fläche zweiten Grades aus reciproken Bündeln (§ 77) mit dem Polarsysteme, dessen Directrix sie ist. Analog der Construction der Polare zum Pol im Kegelschnitt als die ihn nicht enthaltende Diagonale eines eingeschriebenen Vierecks, von welchem der Pol ein Diagonalpunkt ist oder

als Verbindungsgerade des Schnittes der entsprechenden Strahlen zu den nach dem Pol gehenden in zwei erzeugenden Büscheln mit dem Schnitt der gemeinsamen Strahlen mit der Verbindungsgeraden der zweiten Punkte jener Strahlen nach dem Pol im Kegelschnitt — erhält man zunächst aus den erzeugenden projectivischen Ebenenbüscheln einer Regelfläche zweiten Grades zu einem gegebenen Pol eine Gerade jener Polarebene in der Schnittlinie derjenigen Ebenen jener Büschel, die den nach dem Pol gehenden projectivisch entsprechen und dann wie vorher die Polarebene selbst als vierte harmonische zu der nach dem Pol gehenden in Bezug auf jene Ebenen der erzeugenden Büschel. Und die allen reellen Flächen zweiten Grades entsprechende Construction aus reciproken Bündeln giebt die Polarebene zu einem gegebenen Pol als durch den Schnitt derjenigen Ebenen der Bündel, die ihren nach dem Pol gehenden Strahlen entsprechen, gelegte vierte harmonische der Ebene nach dem Pol in Bezug auf jene Ebenen der Bündel. Die dual entsprechenden Constructionen führen mittelst der Erzeugung der Kegelschnitte und Regelflächen zweiten Grades aus projectivischen Reihen und von der aller reellen Flächen zweiten Grades aus reciproken Ebenen (§ 77) von einer Geraden resp. einer Ebene zu ihrem Pol. Aber auch bei jenen Erzeugungen ist die Ermittelung des Pols und bei diesen die der Polarebene leicht ausführbar.

1) Man denke zwei reciproke Räume durch ihre Mittelpunkte M und M', die entsprechenden orthogonalen Tripel p, q, r aus M und p', q', r' in der unendlich fernen Ebene oder Π', $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{R}'$ an M', nebst einem Elementenpaar E, $\mathbf{E}'$ bestimmt und charakterisiere durch Construction die Ueberführungen in die involutorische Lage und die entsprechenden Directrixflächen.

2) Man erläutere die Lehre von den conjugierten Durchmessern und Diametralebenen als unabhängig von der Realität der Ordnungsfläche im Polarsystem.

3) Wenn man zu vier nicht in derselben Ebene liegenden Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 in einem Polarsystem die entsprechenden Ebenen $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$, $\mathbf{A}_4'$ nimmt, so sind die Verbindungslinien entsprechender Ecken A_i und $\mathbf{A}_j'$ $\mathbf{A}_k'$ $\mathbf{A}_l'$ und die Schnittlinien entsprechender Flächen $\mathbf{A}_i'$ und $A_j A_k A_l$ beider Tetraeder je vier Gerade einer Regelschaar eines einfachen Hyperboloids. (Vergl. § 76.)

4) Ein räumliches Polarsystem bestimmt auf jeder Ebene und an jedem Punkt ein Polarsystem im Gebilde zweiter Stufe; denn

es ordnet den Punkten und Geraden der Ebene die Ebenen und Geraden des polaren Bündels und damit jenen die Spuren von diesen in der Ebene, diesen Elementen des Bündels aber die projicierenden Linien und Ebenen der ihnen entsprechenden Elemente der Ebene zu. (II, § 39, 17f.)

5) Zwei räumliche Polarsysteme bestimmen auf jeder Ebene und an jedem Punkt ineinanderliegende Polarsysteme im Gebilde zweiter Stufe, von denen die ersteren nothwendig ein Paar reelle Gerade s_{ik} und die letztern ein Paar reelle Strahlen t_{ik} mit einerlei Involutionen harmonischer Pole respective Polarebenen enthalten.

6) Im Fall des reellen Ellipsoids sind die Involutionen harmonischer Pole auf den in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines Polartetraeders hyperbolisch und auf den drei Gegenkanten derselben elliptisch; speciell auf drei conjugierten Durchmessern und in den Stellungen ihrer conjugierten Diametralebenen. Im Polarsystem mit imaginär ellipsoidaler Directrix haben alle Geraden elliptische Involutionen, sowohl harmonischer Pole als Polarebenen. Auch in dem Fall der zweifachen Hyperboloide sind sie auf drei Kanten elliptisch und auf den Gegenkanten derselben hyperbolisch, aber jene sind im Besonderen zwei Durchmesser und die Stellung ihrer Diametralebene. Im Fall der einfachen Hyperboloide sind die Involutionen auf zwei Gegenkanten elliptisch und auf den beiden andern Paaren der Gegenkanten hyperbolisch, insbesondere auf einem Durchmesser und der Stellung der conjugierten Diametralebene elliptisch.

Die Gleichartigkeit der Involutionen der Gegenkanten charakterisiert die hyperbolischen, ihre Ungleichartigkeit die elliptischen Flächen zweiten Grades und man kann darnach die Polarsysteme selbst als elliptische und hyperbolische unterscheiden.

7) Wenn ein Punkt x_i'' zu einem andern x_i' conjugiert ist in der Involution harmonischer Pole auf ihrer Verbindungsgeraden oder wenn jeder der beiden auf der Polarebene des andern liegt, so sind ihre Coordinaten mit den Coefficienten der Gleichung der Fläche zweiten Grades durch die Gleichung $P = 0$ des §.57 verbunden und nach der linearen Form derselben ist die Kenntniss von neun Paaren conjugierter Punkte hinreichend zur Bestimmung der Fläche oder des Polarsystems. Fallen die Punkte eines Paares zusammen, so ist ein Punkt der Fläche selbst gegeben; etc. Ebenso bestimmen neun Paare conjugierter Ebenen, insbesondere neun Tangentialebenen die Fläche. (II, § 46 p. 369f.)

Die Involution harmonischer Pole in einer Geraden ist zwei solchen linearen Bedingungen äquivalent, die Zusammengehörigkeit eines Punktes und einer Ebene als Pol und Polarebene zählt für drei und die von zwei Geraden als polar conjugiert für vier, mit ihren Involutionen also für acht Bedingungen, ein Polartetraeder für sechs; das zugehörige Polarsystem in der Ebene oder im Bündel ist fünf Bedingungen, die Polarsysteme in zwei conjugierten Ebenen

wegen der Gemeinsamkeit der Involution in ihrer Schnittlinie sind neun Bedingungen äquivalent. Eine Reihe verschiedener Bestimmungsweisen des Polarsystems und der Flächen zweiten Grades ergeben sich hieraus. Die fundamentale aus Polartetraeder und Paar von Pol und Polarebene erscheint in der besonderen Form aus Mittelpunkt und Polartetraeder, in der sie zahlreiche metrische Beziehungen liefert.

8) Liegt der Mittelpunkt unendlich fern, so wird die Fläche zum Paraboloid (vergl. oben § 73, 8 und II, § 40 b, e und 7); man hat ein vereinigt liegendes Paar, also Punkt und zugehörige Tangentialebene. Man bestimme für gegebene Mittelpunktsrichtung die Involutionen in den Kanten des Tetraeders und seine Querschnitte mit der Fläche.

85. Zwei räumliche Polarsysteme sind stets in demselben Raum enthalten und führen daher zu gemeinsamen Elementen. Sie bestimmen zu jedem Punkt P zwei Polarebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und damit als ihre Schnittlinie eine ihm doppelt conjugierte Gerade P_{12}, deren conjugierte durch P gehen; ebenso zu jeder Ebene $\mathbf{E}$ zwei Pole E_1, E_2 und in ihrer Verbindungslinie ihre doppelt conjugierte Gerade, deren conjugierte in jener liegen. Damit wird zwischen den Ebenen $\mathbf{P}$ des Raumes und ebenso zwischen den Punkten desselben Collineation hergestellt, jene Geraden bilden den zugehörigen Complex und es treten vier Hauptpunkte und Hauptebenen auf, die das gemeinsame Polartetraeder der Polarsysteme bilden. Man erhält für seine Elemente genau die Construction von II, § 45, aber aus den Bestimmungsstücken der Polarsysteme und unabhängig von der Realiät ihrer Directrixflächen. Zwei Gegenkanten desselben sind stets reell. Jede Gerade trägt zwei Involutionen harmonischer Pole und Polarebenen und es liegen also in ihr und gehen durch sie zwei Punkte und Ebenen, welche einander in beiden Polarsystemen conjugiert sind. In jeder Ebene entstehen, als dem ersten und dem zweiten angehörig, zwei Polarsysteme mit gemeinsamen Elementen nach § 75 und an jedem Punkt zwei Polarbündel mit solchen.

Betrachten wir in den Polarsystemen einer Ebene die beiden nothwendig reellen s_{ik}, zwei Gerade aus einer Ecke des gemeinsamen Polardreiecks, deren jede in beiden Polarsystemen dieselbe Involution harmonischer Pole trägt, sodass die Doppelpunkte derselben gemeinsame Punkte der zugehörigen Directrixcurven sein müssen. Es kann die Forderung gestellt und er-

füllt werden, ein drittes Polarsystem oder eine Fläche zweiten Grades so zu bestimmen, dass sie mit den beiden gegebenen auf allen Ebenen die nämlichen s_{ik}, also die nämlichen Punkte der Durchdringungscurve habe; ist A ein Punkt der fraglichen Fläche, so wird in jeder durch A geführten Ebene ihr Querschnitt und also sie selbst als Ort der Querschnitte bestimmt als ein Kegelschnitt durch A mit zwei gegebenen Polinvolutionen in den Geraden s_{ik} der Ebene. Somit geht durch jeden Punkt des Raumes eine Fläche des so entstehenden Systems, durch ihn und die gegebenen Flächen der Polarsysteme bestimmt. In jeder Ebene gehören die gemeinsamen Punkte der zugehörigen Directrixen d. i. ihrer Schnitte mit den Directrixflächen der gegebenen Polarsysteme auch der Directrixfläche des neuen Polarsystems an; alle so erhaltenen Flächen zweiten Grades bilden ein Büschel (§ 34), ihre Querschnitte mit einer Ebene ein Kegelschnittbüschel und ihre Schnittpunktepaare mit einer Geraden eine Involution; eine Ebene wird von drei Flächen des Büschels und eine Gerade von zweien berührt. Man sagt nun auch, dass die zugehörigen Polarsysteme ein Büschel bilden, abgesehen nicht nur von der Realität der gemeinsamen Curve ihrer Directrixflächen, sondern auch von der Realität der Directrixen selbst bei den bestimmenden Polarsystemen. Das Büschel besitzt ein gemeinsames Polartetraeder.

Nach § 82 und § 39, 8 gehen die Polarebenen derselben Punkte in allen Polarsystemen eines Büschels durch dieselbe Gerade oder bilden selbst ein Büschel (§ 57), dem Punkt ist eine Gerade im Flächenbüschel conjugiert; wir haben in II, § 45, 11 f. und oben § 57, 3 f. die Consequenzen davon betrachtet. Insbesondere muss jede Gerade aus einem Eckpunkt des gemeinsamen Polartetraeders nach einem gemeinsamen Punkt der Flächen des Büschels oder nach einem Punkt seiner Grundcurve noch einen zweiten Punkt dieser Curve enthalten oder eine Gerade s_{ik} in jeder ihrer Ebenen sein; d. i. jeder Eckpunkt des gemeinsamen Polartetraeders ist Scheitel eines doppelt projicierenden Kegels der Grundcurve oder das Büschel von Flächen zweiten Grades enthält vier Kegel oder vier Flächen mit Doppelpunkt. (§ 57, II, § 45.)

Nach den Formen und dem Zerfallen der Grundcurve sind die Flächenbüschel zweiten Grades verschieden. (Vergl. II, § 45, 5 f.)

Zu den dual entsprechenden Ergebnissen führt die Betrachtung der Strahlen t_{ik} mit denselben Involutionen harmonischer Polarebenen in beiden Polarsystemen, die von jedem Punkt ausgehen, in Verbindung mit einer beliebigen Ebene; man verlangt das Polarsystem, welches an jedem Punkt dieselben Strahlen t_{ik} besitzt und dessen Directrix diese Ebene berührt. Diese Directrix und damit das Polarsystem ist bestimmt, weil für jeden Punkt der Ebene ihr Berührungskegel zweiten Grades durch fünf Tangentialebenen bestimmt ist, zu der besagten Ebene selbst die beiden Doppelebenenpaare jener Polarinvolutionen der t_{ik} des Punktes. (Vergl. I, p. 232.) An jede Ebene geht eine durch sie und die gegebenen Polarsysteme bestimmte Fläche des Systems, die gemeinsamen Bedingungen sind also acht linearen Bedingungen äquivalent, die Directrixflächen bilden eine Schaar von Flächen zweiten Grades und man bezeichnet auch die zugehörigen Polarsysteme als eine Schaar. Die Tangentialebenen aller Directrixen aus einem Punkt des Raumes sind die vier Tangentialebenen einer developpabelen Fläche vierter Classe, welche ihnen allen gemeinsam umgeschrieben ist. Das gemeinsame Polartetraeder der bestimmenden Systeme ist auch das aller übrigen Polarsysteme der Schaar. Die doppeltconjugierte Gerade einer Ebene in den bestimmenden Polarsystemen enthält auch für alle übrigen der Schaar die Pole der Ebene; insbesondere die Mittelpunkte liegen in einer Geraden, einem Strahl des Complexes, der mit dem Polartetraeder alle andern Strahlen derselben bestimmt etc. Die Tangentenkegel der Directrixen aus einem Punkt bilden eine Schaar von Kegeln zweiten Grades und ihre Tangentialebenen aus einer Geraden eine Involution, zwei Flächen der Schaar berühren die Gerade (nach den Doppelebenen dieser Involution) und drei ihrer Flächen gehen durch einen Punkt mit den Diagonalebenen des Vierflachs der gemeinsamen Tangentialebenen der Kegelschaar des Punktes als Tangentialebenen. Durch die Schnittlinie einer Ebene der gemeinsam umgeschriebenen Developpabeln der Schaar mit einer Ebene des gemeinsamen Polartetraeders geht stets noch eine zweite Ebene derselben Developpabeln, oder der Querschnitt dieser Developpabeln mit einer Fläche des Polartetraeders ist eine Doppelcurve in ihr, also weil von der vierten Classe ein doppelt

zählender Kegelschnitt; die Flächenschaar enthält vier Flächen mit Doppeltangentialebene oder vier Kegelschnitte (II, § 47 oben § 57). Die Schaar ist durch eine ihrer Flächen und einen dieser Kegelschnitte oder auch durch zwei ihrer Doppelkegelschnitte bestimmt; jede ihrer Flächen dann aus einer ihrer Tangentialebenen. (II, § 47, 5.)

Wenn der absolute Kreis die eine dieser Doppelcurven ist, so erhält man zu jeder Fläche zweiten Grades wie auch zu jedem Kegelschnitt die Schaar der confocalen Flächen zweiten Grades. Ihre Grundeigenschaften ergeben sich aus der Entstehung. Weil die unendlich ferne Ebene eine Fläche des gemeinsamen Polartetraeders ist, so sind alle Flächen der Schaar concentrisch und weil die in ihr gelegenen Ecken ein Polardreieck des absoluten Kreises bilden, so haben sie dieselben Axen und Hauptebenen. Die Tangentenkegel der confocalen Flächen aus einem Punkt bilden eine Schaar von confocalen Kegeln zweiten Grades, weil der Kegel der Geraden von absoluter Richtung aus dem Punkt zu ihnen gehört und sie somit die nämlichen Focalstrahlen besitzen müssen. Die Tangentialebenen der zwei eine Gerade berührenden Flächen durch diese sind rechtwinklig zu einander als Doppelebenen der zugehörigen Involution, in welcher die Ebenen von absoluter Stellung durch diese Gerade ein Paar sind. Die drei Flächen des Systems durch einen Punkt sind zu einander rechtwinklig, weil die Stellungen ihrer Tangentialebenen ein Polardreieck in Bezug auf den absoluten Kreis bilden müssen; die Normale einer der drei Flächen in ihrem Schnittpunkt ist daher die Schnittlinie der Tangentialebenen der beiden andern. Für jede Ebene ist ihre Normale vom Pol in einer Fläche des Systems zugleich der Ort ihrer Pole in allen andern, sodass für jene drei zu einander rechtwinkligen Ebenen die zugehörigen Normalen zugleich die im System ihnen conjugierten Geraden sind; sie sind auch die Axen der Tangentenkegel der Flächen des Systems von diesem Scheitel. Nach dem Vorigen sind die drei durch einen Punkt gehenden Flächen der confocalen Schaar ein Ellipsoid, ein zweifaches und ein einfaches Hyperboloid. Für die Punkte der Hauptebenen erhält man ausser der bezüglichen Doppelcurve der gemeinsamen Developpabeln, die sie als Doppelebene zur Fläche der Schaar macht, nur

zwei confocale Flächen und für die Punkte der Hauptaxen ausser den benachbarten Hauptebenen nur eine. Die drei confocalen Flächen durch das gemeinsame Centrum sind eben die Hauptebenen.

Man hat die Doppelcurven der gemeinsamen Developpabeln des confocalen Systems die Focalkegelschnitte des Systems und jeder seiner Flächen genannt; nach dem Vorigen bestimmt jeder derselben das System, nach II, § 47, 25 sind nur zwei von ihnen reell, in zweien der Hauptebenen liegend hat jeder die Brennpunkte des andern zu Scheiteln: Ellipse und Hyperbel im Fall des Systems der confocalen centrischen Flächen, zwei Parabeln im Fall der confocalen Paraboloide.

Wir betonen diesen Fall der Confocalen noch unter den Beispielen.

Drei Polarsysteme, die nicht einem Büschel angehören, liefern zu jedem Punkt einen gemeinsam conjugierten, den Schnittpunkt ihrer Polarebenen; durchläuft jener eine Gerade, so dieser eine Raumcurve dritter Ordnung, von der die Polargeraden zu jener in den Directrixen Bisekanten sind etc. Ihre Directrixen haben acht gemeinsame Punkte und acht gemeinsame Tangentialebenen, die zu allen Flächen eines linearen Systems zweiter Stufe gehören. (Vergl. § 88.)

1) Die um den Mittelpunkt eines Polarsystems beschriebene Kugel bestimmt mit seiner Directrix einen sphärischen Kegelschnitt als Durchdringungscurve (II, § 45, Tafel XII und oben § 76). Man charakterisiere die Kreisschnittebenen der Directrix.

Eine Berührungsebene des doppelt projicierenden Kegels schneidet die Ordnungsfläche in einem Kegelschnitt, welcher die Berührungserzeugende am Kegel zur Axe hat — weil die Tangente am Endpunkt derselben in der zu ihr normalen Berührungsebene der Kugel liegt. Diese Axe ist von constanter Länge.

2) Ein Polartetraeder und ein Punkt mit seiner conjugierten Geraden bestimmen ein Flächenbüschel zweiten Grades; jede Ebene durch die Gerade bestimmt als Polarebene des gegebenen Punktes mit dem Tetraeder eine Fläche desselben. Ebenso wird durch ein Polartetraeder und eine Ebene ihrer conjugierten Geraden eine Flächenschaar bestimmt, nämlich durch jeden Punkt der Geraden als Pol der Ebene eine ihrer Flächen.

3) Man erläutere die Arten der Flächenschaaren zweiten Grades nach den Singularitäten und Degenerationen der zugehörigen gemeinsamen Developpabeln. (Vergl. II, § 45, 5f.).

4) Auf welche Ergebnisse führt die Annahme, dass eine Reihe von Polarsystemen in jeder Ebene dieselben Punkte T_{ik} (§ 75) d. h. mit einerlei Polarinvolutionen habe und dual die andere, dass sie an jedem Punkte dieselben Ebenen S_{ik} mit einerlei Polarinvolutionen besitze?

5) Man charakterisiere ein räumliches Polarsystem, für dessen Ordnungsfläche die eine ihrer Hauptaxen die Länge Null hat, insbesondere auch die Art, wie ein solches mit einem allgemeinen Polarsystem zusammen Flächen zweiten Grades bestimmt.

6) Confocale Flächen schneiden sich unter rechten Winkeln; die Umrisse confocaler Flächen aus beliebigem Centrum schneiden sich rechtwinklig.

7) Die Normalen der Flächen eines confocalen Systems, welche zu den durch eine gegebene Gerade gehenden Tangentialebenen derselben gehören, bilden die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids; denn sie sind der Normalebene der Geraden parallel und schneiden die Polargeraden derselben in Bezug auf die Flächen des Systems oder diese bilden die andere Regelschaar des Paraboloids. Dasselbe trifft die gegebene Gerade in ihren Berührungspunkten mit Flächen des confocalen Systems.

Wenn die gegebene Gerade Normale ist für eine der confocalen Flächen, so liegen die fraglichen Normalen in einer Ebene und umhüllen eine Parabel, deren Directrix durch den Fusspunkt der gegebenen Normale geht.

8) Man construiere das System confocaler Paraboloide aus den Brennpunkten seiner parabolischen Hauptschnitte in der gemeinsamen Axe mittelst der zugehörigen Scheitel. Liegt der Scheitel zwischen den Brennpunkten, so erhält man ein hyperbolisches, sonst immer ein elliptisches Paraboloid.

9) Denken wir einen Punkt in einer der Focalcurven der Fläche zweiten Grades, so gehen durch ihn zwei Tangenten der Fläche, die den imaginären Kreis im Unendlichen schneiden, und die Tangentialebenen der Fläche in ihren Berührungspunkten berühren ebenso diesen Kreis; der Punkt ist also anzusehen als eine Kugel vom Radius Null, welche die Fläche zweiten Grades in zwei Punkten berührt. Stellen wir durch U die Function der Coordinaten vor, welche durch ihr Verschwinden eine solche Kugel oder den aus ihrem Centrum (Focalpunkt) nach dem imaginären Kugelkreis gehenden Kegel repräsentiert und durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ lineare Functionen der Coordinaten, so drückt die Gleichung $U = \mathbf{AB}$ die vorgedachte Beziehung aus, eine Fläche zweiten Grades, die mit $U = 0$ eine doppelte Berührung hat, in den Punkten nämlich, in welchen die Schnittlinie der Ebenen $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ diese schneidet. Denn für alle Flächen $U = \lambda \mathbf{AB}$ hat jeder Punkt dieser Geraden

einerlei Polarebene, weil für $U_1 = 0$ als seine Polarebene in Bezug auf $U = 0$ die Polarebene in Bezug auf jene, welche

$$U_1 = \lambda(\mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1)$$

darstellt, mit $U_1 = 0$ zusammenfällt. Die Schnittlinie der gemeinsamen Tangentialebenen entspricht der Geraden $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ oder der Berührungssehne oder Directrix des Focalpunktes in Bezug auf die Kugel als Polare und da dieselbe den Radius Null hat, so ist sie die im Focalpunkt auf der Verbindungsebene desselben mit der Directrix errichtete Normale.

10) Denken wir zwei Nachbarpunkte der Focalcurve, und die aus ihnen die Fläche zweiten Grades doppelt berührenden Kugeln vom Radius Null, so geht die Ebene ihres Schnittkreises durch die Berührungspunkte normal zu ihrer Centrallinie, der Tangente des Focalkegelschnitts, so dass diese normal ist zur Ebene vom Focalpunkt nach seiner Directrix, und dass die Tangente des Focalkegelschnitts die Polare der zugehörigen Directrix in Bezug auf die Fläche zweiten Grades oder ihres Fusspunktes in Bezug auf den bezüglichen Hauptschnitt derselben ist. Die den Punkten eines Focalkegelschnitts entsprechenden Directrixen bilden einen zur Ebene desselben normalen Cylinder, dessen Basis die reciproke Polare des Focalkegelschnitts in Bezug auf den Hauptschnitt in derselben Ebene ist.

11) Die Polarebene eines Punktes der Directrix geht (9) durch den entsprechenden Focalpunkt rechtwinklig zur Verbindungslinie beider, also durch die betreffende Tangente des Focalkegelschnitts. Der Pol einer Ebene, die einen Focalkegelschnitt berührt, liegt im Durchschnittspunkt der im Berührungspunkt auf ihr errichteten Normale mit der zugehörigen Directrix. An jedem Focalpunkt wird somit durch die Fläche zweiten Grades ein Polarsystem im Bündel bestimmt, in welchem alle Rechtwinkelpaare in der Normalebene der zugehörigen Tangente des Focalkegelschnitts einander conjugiert sind, so dass diese mit jenen eine unendliche Menge orthogonaler Tripel conjugierter Elemente bildet, statt des einen, welches jedem Punkte des Raumes zukommt. Hieraus folgt II, § 47, 29 und: Für den zur Tangente normalen Schnitt der Fläche ist der Focalpunkt ein Brennpunkt und die Scheitel des Focalkegelschnitts insbesondere sind Brennpunkte der bezüglichen Hauptschnitte.

12) Man leitet aus dem Vorigen eine Reihe von Constructionen ab, welche Erwähnung verdienen: a) Der Polarebene Π' eines beliebigen Punktes P im Raum. Man legt durch P nach drei Tangenten eines Focalkegelschnitts Ebenen und bestimmt die Schnittpunkte ihrer Normalen in den Berührungspunkten mit den zugehörigen Directrixen; es sind drei Punkte von Π'. b) Des Poles P' zu einer beliebigen Ebene Π. Man legt durch ihre Schnitt-

punkte mit drei Directrixen die Normalebenen zu den Focalstrahlen derselben — ihr Schnittpunkt ist der Pol P'.

13) Die Ebene Π schneidet den Focalkegelschnitt in zwei Punkten, und die Normalebenen zu ihr durch die bezüglichen Focaltangenten sind offenbar die Normalebenen der von jenen Punkten nach den Schnitten ihrer Directrixen mit Π gehenden Geraden, so dass ihre Schnittlinie durch P' gehen muss. Wenn also vom Pol P' auf die Polarebene Π eine Normale gefällt wird, so ist der Durchstosspunkt der letztern in einer Hauptebene der Pol von der Spur der erstern in derselben Hauptebene in Bezug auf den entsprechenden Focalkegelschnitt. Da für denselben die zugehörigen Hauptaxen und die unendlich entfernte Gerade ein Polardreieck bilden, so genügt ein solches Paar zur Bestimmung des ebenen Polarsystems und also auch seiner Ordnungscurve, des Focalkegelschnitts. Oder die Focalkegelschnitte einer Fläche zweiter Ordnung werden in den Hauptebenen derselben construiert vermittelst einer Tangentialebene der Fläche und ihrer Normale — in vollständiger Analogie zu der Bestimmungsweise der Brennpunkte in I, § 36.

14) Dreht man eine gemeinsame Tangente zweier ungleichartigen confocalen Flächen zweiten Grades um ihren Berührungspunkt P_1 in der einen unendlich wenig im Berührungskegel der andern, so steht die Ebene beider auf der Tangentialebene in P_1 normal; d. h. die in P_1 zusammenstossenden Elemente der Curve der Berührungspunkte in der ersten Fläche liegen in einer Normalebene derselben oder sind Elemente einer geodätischen Linie in ihr. (II, § 11.) — Auch der Berührungspunkt P_2 mit der zweiten Fläche beschreibt eine solche.

15) Man zeige, welche Bedeutung die Grundcurve eines Flächenbüschels für die zwei bestimmenden Polarsysteme hat — also ihre Punkte, Tangenten, Schmiegungsebenen und doppelt projicierenden Kegel nach den Erzeugenden als Träger von Involutionen und ihren Tangentialebenen; insbesondere auch die Doppelcurven ihrer Developpabeln.

86. Die Reciprocität zweier Räume kann aber noch in einer andern Weise involutorisch sein als für $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ oder in Bezug auf eine Directrixfläche zweiten Grades. Wir haben als den Ort der Punkte, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, die Polfläche

$$\alpha_{11} x_1^2 + \cdots + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) x_1 x_2 + \cdots\cdots = 0$$

kennen gelernt und gesehen, dass nur vier Punkte derselben ihren Ebenen vertauschbar entsprechen. Mit der Voraussetzung $\alpha_{ii} = 0$, $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ wird dieser Bedingungsgleichung identisch

genügt, d. h. alle Punkte liegen in ihren entsprechenden Ebenen, und man überzeugt sich leicht, dass dann auch die Gleichung der Polarfläche identisch erfüllt ist. Die Ansicht der entsprechenden Substitutionsgleichungen

$$\begin{aligned}
m\xi_1' &= \quad\quad\quad\quad \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4,\\
m\xi_2' &= -\alpha_{12}x_1 \quad\quad + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4,\\
m\xi_3' &= -\alpha_{13}x_1 - \alpha_{23}x_2 \quad\quad + \alpha_{34}x_4,\\
m\xi_4' &= -\alpha_{14}x_1 - \alpha_{24}x_2 - \alpha_{34}x_3 \quad\quad ;\\
r\xi_1 &= \quad\quad\quad\quad -\alpha_{12}x_2' - \alpha_{13}x_3' - \alpha_{14}x_4',\\
r\xi_2 &= \quad \alpha_{12}x_1' \quad\quad - \alpha_{23}x_3' - \alpha_{24}x_4',\\
r\xi_3 &= \quad \alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' \quad\quad - \alpha_{34}x_4',\\
r\xi_4 &= \quad \alpha_{14}x_1' + \alpha_{24}x_2' + \alpha_{34}x_3'
\end{aligned}$$

zeigt, dass die entsprechende Reciprocität involutorisch ist, dass sich ihre Elemente sämmtlich vertauschbar entsprechen. Und eine Substitution dieser Art ist im Raum möglich, weil die Determinanten der rechten Seiten der Substitutionsgleichungen beider Art nicht verschwinden*), so dass die vier Punkte $\xi_i' = 0$ und ebenso die vier Punkte $\xi_i = 0$ nicht in einer Ebene liegen und demnach ein Fundamentaltetraeder zur Bestimmung der Elemente des betreffenden Raumes liefern.

Man sagt von diesem Falle der involutorischen Reciprocität, die Räume bilden ein Nullsystem.

Wir übertragen die allgemeinen Gleichungen derselben in Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten und erhalten

$$\xi' = \frac{-\alpha_{12} + \alpha_{23}y + \alpha_{24}z}{\alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z}, \quad \eta' = \frac{-\alpha_{13} - \alpha_{23}x + \alpha_{34}z}{\alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z},$$

$$\zeta' = \frac{-\alpha_{14} - \alpha_{24}x - \alpha_{34}y}{\alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{14}z}$$

*) Die entsprechenden Determinanten für Gebilde zweiter Stufe verschwinden, — wie überhaupt alle Determinanten dieser Art von ungeradem Grade — und eine involutorische Reciprocität mit durchweg ineinanderliegenden Elementenpaaren ist daher in diesen nicht möglich. Man vergleiche die Untersuchung der collinearen Involution, wo auch und zwar mit der analogen Bedingungsgleichung (Determ. = Null oder nicht) im Raum neben der centrischen die geschaarte und in der Ebene die centrische Involution allein entsprang.

(Der Satz: zwei Systeme einem dritten reciprok sind collinear — bedingt im Grunde genommen diese Wiederholung.)

für die Coordinaten der dem Punkt (x, y, z) entsprechenden Ebene. Dieselbe ist unendlich fern für

$$\alpha_{23}y + \alpha_{24}z = \alpha_{12}, \quad -\alpha_{23}x + \alpha_{34}z = \alpha_{13}, \quad -\alpha_{24}x - \alpha_{34}y = \alpha_{14},$$

d. h. für den unendlich fernen Punkt — den Mittelpunkt des Systems — von den Coordinaten

$$x : z = \alpha_{34} : \alpha_{23}, \quad y : z = -\alpha_{24} : \alpha_{23}.$$

Derselbe liegt in der Axe z, wenn wir gleichzeitig annehmen $\alpha_{34} = 0$, $\alpha_{24} = 0$; und weil dann der der unendlich fernen Geraden der Ebene $z = 0$ oder $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ entsprechende Strahl oder Durchmesser durch die Gleichungen

$$-\alpha_{12} + \alpha_{23}y = 0, \quad -\alpha_{13} - \alpha_{23}x = 0$$

bestimmt ist, so wird derselbe zur Axe z mit $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$, (wenn man neue Variabeln X, Y einführt mit

$$X - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = x, \quad Y + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{23}} = y.$$

Dann erhält man für die dem Punkt X, Y, z entsprechende Ebene

$$\xi'X' + \eta'Y' + \zeta'z' + 1 = 0$$

die Coordinaten

$$\xi' = \frac{\alpha_{23}Y}{\alpha_{14}z}, \quad \eta' = \frac{-\alpha_{23}X}{\alpha_{14}z}, \quad \zeta' = \frac{-\alpha_{14}}{\alpha_{14}z}$$

und die Gleichung mit den gestrichenen Variabeln

$$\alpha_{23}(XY' - X'Y) - \alpha_{14}(z - z') = 0,$$

oder (§ 26)

$$\alpha_{23}p_{23} = \alpha_{14}p_{14}.$$

Ihre Neigung gegen die Ebene $z = 0$ ist durch

$$\tan\alpha_1 = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}}\sqrt{x^2 + y^2}$$

ausgedrückt, also nur von dem senkrechten Abstand des Punktes von der Axe der z abhängig; und sie enthält diess Perpendikel.

Bezeichnen wir das Verhältniss $\alpha_{14} : \alpha_{23}$ durch k und die Entfernung eines Punktes A von der Axe durch d, so ist die Neigung der ihm entsprechenden Ebene $\mathbf{A}$ durch $k\tan\alpha_A = d_A$ bestimmt. Für einen Punkt B im Abstand d_B ist seine Ebene $\mathbf{B}$ damit auch bestimmt. Die Geraden AB und $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ oder g, g^* liegen so, dass ihre kürzesten Abstände von der Axe z oder der Axe des Nullsystems in dieselbe Gerade fallen, die zugleich ihre eigene kürzeste Entfernung enthält.

Denn einer geraden Linie

$X = mz + a, \quad Y = nz + b,$ also $nX - mY = na - mb$

entspricht die conjugierte Gerade, der Ort der Pole ihrer Ebenen und die Schnittlinie der Polarebenen ihrer Punkte,

$$X' = (mz' + a)\frac{k}{(na - mb)}, \quad Y' = (nz' + b)\frac{k}{(na - mb)},$$

also auch

$$nX' - mY' = k$$

d. h. die Orthogonalprojectionen beider auf die zur Axe normale Ebene sind parallel; ihre Normale aus O ist $mX + nY = 0$ und schneidet sie in Punkten, für welche

$$X = \frac{(an - bm)n}{m^2 + n^2}, \text{ respective } X = \frac{kn}{m^2 + n^2}$$

und somit gleichmässig

$$z = -\frac{am + bn}{m^2 + n^2}$$

ist. Die Winkel beider Geraden g, g^* gegen die Ebene xy sind mit ihren Abständen von der Axe so verbunden, dass das Product des Abstandes in die Tangente des Winkels gleichen Werth $\frac{bm - an}{m^2 + n^2}$ für beide hat.

Man sieht, dass eine Gerade g mit ihrer conjugierten g^* zusammenfällt, wenn

$$k = na - mb$$

ist, d. h. für dreifach unendlich viele Lagen. Für jede solche Gerade ist nach ihren obigen Gleichungen

$$-a + x - mz = 0, \quad -b + y - nz = 0$$

die Gruppe der Coordinaten

$p_{12} = b$, $p_{23} = 1$, $p_{31} = a$, $p_{14} = k$, $p_{24} = -n$, $p_{34} = m$

und somit

$$an = -p_{31}p_{24}, \quad bm = p_{12}p_{34}$$

und wieder

$$p_{14} : p_{23} = k$$

die Gleichung des Systems dieser Geraden in den p_{ik}.

Die sich selbst entsprechenden Geraden des Nullsystems bilden also einen Complex. In der That, da dem Punkt P eine durch ihn hindurchgehende Ebene Π entspricht, so müssen alle die durch P gehenden und in Π liegenden Strahlen sich

selbst entsprechen und sind ihr und dem ihr entsprechenden Bündel um P gemein. Es ist der Complex, den die Gleichung

$$\alpha_{23} p_{23} = \alpha_{14} p_{14}$$

repräsentiert. Die Strahlen unseres Complexes in einer Ebene gehen also durch ihren Pol oder Nullpunkt, und die Strahlen desselben durch einen Punkt liegen in seiner Polarebene oder Nullebene; der Complex ist vom ersten Grade oder linear. Die Gleichung

$$\alpha_{23}(xy' - x'y) = \alpha_{14}(z - z')$$

zeigt, dass derselbe bei Drehung um seine Axe z und bei Verschiebung längs derselben ungeändert bleibt, so dass seine Geraden dann mit andern ihm angehörigen zur Deckung gelangen.

Wir erhalten dieselben Ergebnisse geometrisch construierend wie folgt. Zu jeder Geraden g ordnet das Nullsystem eine andere g_1 zu, die wir als Schnittlinie der Nullebene **A**, **B** von zweien ihrer Punkte A, B oder als die Verbindungslinie der Nullpunkte von zweien ihrer Ebenen erhalten und die daher im Allgemeinen zu g windschief liegt.

Jede Transversale t von zwei einander conjugierten Geraden g, g^* ist als sich selbst entsprechend ein Strahl des Complexes; denn für A, B^* als ihre Schnittpunkte mit jenen sind die Ebenen Ag_1, B^*g die Polarebenen und t ist auch ihre Schnittlinie. Umgekehrt muss eine sich selbst entsprechende Gerade t, welche die eine von zwei conjugierten g trifft, auch die andere g^* schneiden, weil die Ebene gt ihren Pol in g^* und in t zugleich haben muss. Und jede Transversale zu dreien unter zwei Paaren g, g^*, g_1, g_1^* von conjugierten Geraden schneidet deshalb immer auch die vierte, so dass zwei solche Paare immer vier Gerade einer Regelschaar eines einfachen Hyperboloids bilden; die Geraden l seiner zweiten Regelschaar sind Strahlen des Complexes.

Aus den conjugierten Geradenpaaren gg^*, $g_1 g_1^*$ ist das Polarsystem hiernach bestimmt, weil zu jedem Punkte A die Nullebene **A** als Ebene der von ihm ausgehenden zwei Transversalen zu den Paaren gg^* und $g_1 g_1^*$; und zu jeder Ebene **A** der Nullpunkt A als Schnittpunkt der in ihr liegenden Transversalen derselben.

Denkt man die unendlich ferne Ebene **U** und ihren Nullpunkt U, so entsprechen allen ihren Geraden, welche den Nullpunkt nicht enthalten, oder den Stellungen, die die Richtung U nicht enthalten, die Strahlen des Bündels von der Richtung U, die Durchmesser des Nullsystems; die Strahlen des Büschels um U in **U** aber sich selbst. Unter jenen Stellungen ist die absolute Polare von U oder die Normalstellung des Durchmessersystems auszuzeichnen; ein bestimmter Durchmesser entspricht ihr, der als der einzige, welcher normal ist zu seiner conjugierten Stellung, die Axe des Nullsystems genannt wird. Für jeden Durchmesser sind diejenigen Transversalen, deren Richtungen der ihm conjugierten Stellung angehören, sich selbst conjugiert; die Reihe der Punkte in einer solchen entspricht dem Büschel ihrer Ebenen. Für die Axe sind ihre Normalen sich selbst conjugiert und zwar entspricht dem Fusspunkt N einer solchen in der Axe die durch sie gehende Normalebene **N** zu derselben und ihrem unendlich fernen Punkt V die Ebene, die sie mit der Axe verbindet. Ist die Axe gegeben, so liegt für jede Ebene **A** ihr Nullpunkt A in der zur Axe normalen Geraden, welche sie enthält, oder in der Schnittlinie mit der Normalebene zur Axe durch ihren Schnittpunkt mit derselben. Sind also A, B zwei andere Punkte derselben Normale zur Axe, so gilt die Relation

$$(ABNV) \barwedge (\mathbf{ABNV})$$

oder
$$AN : BN = \frac{\sin(\mathbf{AN})}{\sin(\mathbf{BN})} : \frac{\sin(\mathbf{AV})}{\sin(\mathbf{BV})} = \frac{\sin(\mathbf{AN})}{\sin(\mathbf{BN})} : \frac{\cos(\mathbf{AN})}{\cos(\mathbf{BN})}$$
$$= \frac{\tan(\mathbf{AN})}{\tan(\mathbf{BN})};$$

oder abkürzend mit d_A, d_B als den Axenabständen der Nullpunkte A, B und $\alpha_{\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{B}}$ als den Neigungswinkeln der zugehörigen Nullebenen gegen die Normalstellung

$$d_A : d_B = \tan \alpha_{\mathbf{A}} : \alpha_{\mathbf{B}},$$

was mit der algebraischen Entwickelung übereinstimmt.

Zwei zu einander conjugierte Gerade gehören immer mit der Axe und ihrer Normalstellung zu einer Regelschaar, also zu einem hyperbolischen Paraboloid; sie sind daher zu einer Ebene parallel, die die Axenrichtung enthält. Ist die betrachtete Normale die Linie der kürzesten Entfernung der Axe von

der einen, so ist sie auch die der Axe von der andern und da beide die Falllinien der zugehörigen Nullebenen gegen die Normalstellung sind, so gilt für ihre Neigungen β zu derselben die vorige Relation.

Betrachtet man ein Polygon mit den auf einander folgenden Ecken $ABC\ldots O$, also mit der Seitenfolge AB, BC,... NO, OA und den auf einander folgenden Ebenen ABC, BCD,... MNO, NOA, OAB, so entsprechen den Ecken als durch sie hindurchgehende Nullebenen die Ebenen **A**, **B**, **C**,...**O** der Reihe nach; jener Kantenfolge die conjugierte **AB**, **BC**,... **NO**, **OA**, so dass zwei gleichnamige wie AB und **AB** mit der Axe des Nullsystems einerlei Linie der kürzesten Distanz haben und ihre Abstände und Neigungen den vorigen Gesetzen genügen; endlich den Ebenen ABC, BCD,... MNO, NOA, OAB die in ihnen liegenden Punkte **ABC**, **BCD**,...**MNO**, **NOA**, **OAB**.

Diese beiden Figuren sind einander also immer gleichzeitig ein- und umgeschrieben. (§ 79.) Wenn man von einem Punkt A aus auf einer ihn enthaltenden Complexgeraden nach B und von da auf einer andern Complexgeraden nach C geht, etc. so entsteht ein Complexpolygon und ein Complexpolyeder, da dem Punkt B die Ebene ABC entspricht, so dass seine Ecken, Kanten und Flächen als Nullpunkte, sich selbst conjugierte Gerade und Nullebenen dem System angehören.

Denken wir die benachbarten Eckpunkte einander unendlich nahe, also von jeder Complexgeraden nur ein Element, und ihre Winkel unendlich klein, so werden auch die Winkel benachbarter Flächen unendlich klein und es entsteht eine Complexcurve, deren Punkten die zugehörigen Schmiegungsebenen entsprechen, während ihre Tangenten sich selbst conjugiert sind. Eine solche Curve kann durch ihren Anfangspunkt und eine krumme Fläche bestimmt werden, in der sie liegt; die Nullebene des Anfangspunktes schneidet aus der Tangentialebene der Fläche in ihm die Anfangstangente, die Nullebene des benachbarten in ihr aus seiner Tangentialebene die Nachbartangente, etc. Auf einem Rotationscylinder der Axe des Nullsystems liefert jeder Punkt eine Schraubenlinie als Complexcurve und für denselben Cylinder sind alle diese Schraubenlinien einander congruent; sie bringen die

Drehbarkeit des Complexes um die Axe besonders einfach zur Anschauung. Solche Curven haben offenbar die Eigenschaft, dass die Schmiegungsebenen aller in einer Ebene liegenden Punkte derselben durch einen Punkt dieser Ebene gehen; dieselbe gilt also für die Schraubenlinien um die Axe des Complexes (vergl. II, § 15, 8), und wenn wir sie für Curven dritter Ordnung (oben § 79), für Curven vierter Ordnung erster Art mit Spitze, etc. fanden, so werden diese Curven damit als Complexcurven bezeichnet.

Das Nullsystem ist der rein geometrische Ausdruck der beiden Probleme von der Zusammensetzung der Kräfte im Raum — die beiden Kräfte, auf welche ein System immer in unendlich vielen Arten reduciert werden kann, wirken nach conjugierten Geraden; die durch einen Punkt gehenden Axen, in Bezug auf welche das Moment des Kräftesystems verschwindet, bilden das in der ihm correspondierenden Ebene liegende Strahlbüschel der sich selbst conjugierten Geraden — und von der Bewegung eines starren Systems — die conjugierten Geraden sind conjugierte Drehungsaxen, die Axe des Nullsystems ist die Axe der äquivalenten Schraubung des § 80; die geraden Linien, welche zu den Trajectorien ihrer Punkte normal sind, bilden die sich selbst conjugierten Geraden des Nullsystems, die Geraden dieser Art in einer Ebene gehen durch den derselben entsprechenden Punkt. Deshalb ist die Theorie des Nullsystems auch die eine Hauptgrundlage der graphischen Statik und der Kinematik.

Das Nullsystem und die Polarreciprocität sind die involutorischen Reciprocitäten, wie die geschaarte und die centrische Collineation $\Delta = -1$ die involutorischen Collineationen. Nach der Wichtigkeit, die ihnen zukommt, wollen wir sie hier noch einmal zusammenfassend betrachten, indem wir ihre entsprechenden Geraden und die aus ihnen zusammengesetzten Systeme hervorheben. Erst in diesen besitzen auch die Reciprocitäten mit der Gleichartigkeit der entsprechenden Elemente Vertauschbarkeit des Entsprechens in vollständiger Weise. Die genannten bilden zugleich die einzig möglichen linearen Involutionen im Strahlenraum, wo also nicht nur jedem Strahl eindeutig und vertauschbar ein Strahl, sondern auch jedem Büschel ein Büschel, jeder Regelschaar eine Regelschaar

vom nämlichen Grade, einer Congruenz (m, n) eine Congruenz (m, n) oder (n, m) und einem Complex n^{ten} Grades wieder ein solcher entspricht; insbesondere jedem linearen ein linearer, der mit ihm eine Congruenz gemein hat, in welcher entweder jeder Strahl sich selbst oder einem andern Strahl derselben Congruenz entspricht. Im ersten Fall muss ein linearer Complex sich selbst entsprechender Strahlen vorhanden sein, so dass in jeder Ebene und aus jedem Punkt ein Büschel derselben erhalten wird; und da schneidenden Geraden schneidende entsprechen, so entsprechen den Strahlen einer Ebene die Strahlen durch einen Punkt derselben und die des Büschels aus diesem Punkt in ihr sich selbst. Dem ersten Fall entspricht somit das Nullsystem. Wir wissen dagegen, dass im Fall der geschaarten Involution die sich selbst entsprechenden Strahlen die gemeinsamen Transversalen der beiden Axen oder eine nicht zerfallende lineare Congruenz bilden, während sie bei der centrischen Involution aus den Strahlen durch das Centrum und den Strahlen in der Collineationsebene bestehen, sowie endlich, dass im Fall des Polarsystems die sich selbst entsprechenden Geraden der beiden Regelschaaren der Directrixfläche sind. Das sind genau die drei Formen, in denen der zweite Fall realisiert werden kann, dass jedem Strahl der sich selbst entsprechenden linearen Congruenz ein anderer entspricht. Denn denken wir die beiden Axen derselben, so kann zuerst dem Büschel aus einem Punkt der einen das Büschel aus einem Punkt der andern entsprechen, so dass beiden ein sich selbst entsprechender Strahl gemein ist; die Gesammtheit derselben bildet eine Regelschaar in jedem linearen Complex und für alle eine lineare Congruenz mit zwei windschiefen Axen, wie wir es von der geschaarten Involution wissen. Oder es entspricht in jeder Congruenz dem Büschel aus einem Punkt einer Axe involutorisch ein Büschel aus einem Punkt derselben Axe, so dass zwei dieser Büschel sich selbst entsprechen und nun entweder alle Strahlen derselben sich selbst entsprechen oder die Strahlen eines jeden involutorisch gepaart sein müssen. Im ersten Fall enthält jeder lineare Complex zwei solche Büschel an verschiedenen Scheiteln und in verschiedenen Ebenen und es muss die Gesammtheit der sich selbst entsprechenden Strahlen in ein Bündel und eine Ebene zerfallen, wie es bei

der centrischen Involution geschieht. Im zweiten Fall entstehen durch den Schnitt der sich selbst entsprechenden Büschel aus der einen und der andern Axe der betrachteten linearen Congruenz vier sich selbst entsprechende Gerade eines windschiefen Vierseits und die Gesammtheit dieser Strahlen für alle linearen Complexe bildet die beiden Regelschaaren einer Fläche zweiten Grades: Polarreciprocität. Es giebt somit keine andern linearen Involutionen zwischen den Strahlen des Raumes, als die vier in den früheren Untersuchungen hervorgetretenen.

1) Man construiere die beiden Nullsysteme aus der Axe, einer Ebene und dem Abstand ihres Nullpunktes der Axe in Orthogonalprojection mit der Axe als Axe der z. Insbesondere zu den Ecken eines Tetraeders die Nullebenen und also das entsprechende ihm zugleich ein- und umgeschriebene Tetraeder.

2) Aus Axe a, Nullpunkt P und Nullebene $\mathbf{P}$ soll man zu dem durch drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Berührungspunkte T_1, T_2 von zweien derselben in $\mathbf{P}$ bestimmten Kegelschnitt den entsprechenden Kegel zweiten Grades aus P mittelst der conjugierten Geraden t_1^*, t_2^*, t_3^* und der zu den beiden ersten gehörigen Tangentialebenen $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, der Nullebenen von T_1, T_2, darstellen.

Die ersten Projectionen der t_i^* sind denen der t_i parallel und stehen mit denselben im Zusammenhang von Kräftepolygon und Seilpolygon.

3) Wenn von zwei Paaren conjugierter Geraden drei gegeben sind, so ist die vierte unter den Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte derjenigen projectivischen Reihen zu wählen, welche dieselben auf irgend zwei ihrer Transversalen bestimmen.

Das Nullsystem wird durch eine involutorisch geordnete Regelschaar bestimmt; der Nullpunkt einer Ebene ist der Pol der Involution im Schnitt in derselben, die Nullebene eines Punktes die Polarebene der Involution in ihrem Schein.

4) Entsprechen sechs Punkte $A \ldots F$ einer Raumcurve dritter Ordnung ihren Schmiegungsebenen $\mathbf{A} \ldots \mathbf{F}$, so entsprechen alle Punkte der Curve ihren zugehörigen Schmiegungsebenen, die Curve ist eine Complexcurve im Nullsystem; Complexcurve auf jeder durch sie gehenden Fläche zweiten Grades, insofern dieselbe zwei ihrer Tangenten enthält. Wenn die fünf ersten Elementenpaare $A \ldots E$, $\mathbf{A} \ldots \mathbf{E}$ einander räumlich reciprok entsprechen, so entspricht die Reihe AB dem Ebenenbüschel $\mathbf{AB}$ perspectivisch, weil $\mathbf{ABC}$, $\mathbf{ABD}$, $\mathbf{ABE}$ in ABC, ABD, ABE liegen, u. s. w. Sollte in der so bestimmten Reciprocität eine Polfläche vorhanden sein, so müsste dieselbe mit jeder der fünf Ebenen vier Gerade gemein haben;

die Reciprocität ist also ein Nullsystem. Weil endlich die Schmiegungsebene **F** den Schnittpunkt von **AB** mit ABF enthält, durch den die Nullebene von F gehen muss, weil er in ABF liegt, so entsprechen allen Punkten der Curve die zu ihnen gehörigen Schmiegungsebenen derselben.

Die erzeugenden collinearen Bündel aus zwei Punkten der Curve sind den collinearen ebenen Systemen in den zugehörigen Schmiegungsebenen reciprok.

5) Wenn man von zwei zu einem Nullsystem vereinigten reciproken Räumen den einen z. B. den ungestrichenen um eine zur Axe des Systems normale Gerade um 180^0 dreht, so entsteht eine Polarreciprocität mit gleichseitig hyperbolisch-paraboloidischer Directrixfläche. Da man ohne die Gleichung des Nullsystems

$$\alpha_{23}(xy' - x'y) = \alpha_{14}(z - z')$$

zu ändern, jede Axenormale als Axe der x denken darf, so wird die besagte Drehung durch die Substitution von $-y$ und $-z$ für y und z unter Belassung von x ausgedrückt, wodurch man die nach den gestrichenen und ungestrichenen Coordinaten symmetrische Gleichung erhält

$$\alpha_{23}(xy' + x'y) = -\alpha_{14}(z + z');$$

sie liefert als Gleichung der orthogonal-paraboloidischen Directrixfläche

$$\alpha_{23}xy = -\alpha_{14}z;$$

sie hat die Axe des Nullsystems zur Axe.

6) Die Ueberführung von x in y, von y in $-x$ und von z in $-z$ verwandelt die Gleichung des Nullsystems in die ebenso symmetrische

$$\alpha_{23}(xx' + yy') = -\alpha_{14}(z + z')$$

oder das Nullsystem in Polarität mit der Directrix

$$\alpha_{23}(x^2 + y^2) = -2\alpha_{14}z,$$

einem Rotationsparaboloid um die Axe des Nullsystems. Man hat das symmetrische des einen Systems in Bezug auf einen Punkt der Axe als Centrum oder in Bezug auf eine zur Axe normale Ebene gebildet und um 90^0 um die Axe gedreht. Man erläutere die Beziehung beider Directrixflächen zu einander.

7) Für zwei Complexschraubenlinien desselben Nullsystems verhalten sich die Ganghöhen h_A und h_B wie die Quadrate der Radien d_A^2, d_B^2. Denn aus

$$\tan\alpha_A = h_A : 2\pi d_A$$

folgt $\quad d_A : d_B = \frac{h_A}{d_A} : \frac{h_B}{d_B}$ und also $h_A : h_B = d_A^2 : d_B^2$.

8) Man zeige die Bestimmung des linearen Complexes aus fünf Geraden nach dem Texte. (Vergl. § 33.)

9) Die gleichzeitigen Normalen zu den Trajectorien eines unter fünf Bedingungen beweglichen starren Systems bilden einen linearen Complex und umgekehrt. Bei vier Bedingungen bilden sie somit die lineare Congruenz eines Büschels von solchen Complexen oder schneiden zwei feste Gerade; etc.

87. Die Verbindungen projectivischer Gebilde zweiter und dritter Stufe zu zweien und die daraus hervorgehenden Erzeugnisse sind im Vorigen aufgestellt und untersucht; aber wir wissen (§§ 70, 76), dass auch die Verbindung von drei projectivischen Gebilden zweiter Stufe Erzeugnisse hervorzubringen vermögen. Sie werden allgemein als analog zu den früher bemerkten Entstehungen der Curve dritter Ordnung und der Developpabeln dritter Classe aus drei projectivischen Ebenenbüscheln resp. Punktreihen statt aus zwei collinearen Bündeln oder Ebenen anzusehen sein; und wir erwarten hiernach auch Erzeugnisse der Verbindung von einer gewissen Anzahl projectivischer Gebilde irgend einer bestimmten Stufe. Wir gehen von dem einfachsten Fall aus, der Verbindung von drei collinearen Elementargebilden zweiter Stufe, untersuchen ihre Erzeugnisse, die Flächen dritter Ordnung respective Classe, und knüpfen daran den Ausblick auf die analogen allgemeineren Fälle auch mit Gebilden, welche nicht mehr Elementargebilde sind.

Drei zu einander projectivische Ebenenbündel — ihre Scheitel mögen S_1, S_2, S_3 heissen — erzeugen als den Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Ebenen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ eine Fläche dritter Ordnung, d. h. eine Fläche, die von einer Geraden g im Allgemeinen dreimal geschnitten wird. Denken wir nämlich das durch die Reihe in g am Scheitel S_1 bestimmte Strahlbüschel, so entspricht demselben ein ihm projectivisches Strahlbüschel in dem Bündel S_2, welches eine durch g gelegte Ebene in einer zur Reihe g projectivischen Reihe schneidet, die mit g eine Curve zweiter Classe hervorbringt; den Ebenen, welche sie mit S_2 verbinden, entsprechen im Bündel S_3 die Ebenen durch die Tangenten einer andern zu g projectivischen aber nicht mehr perspectivischen Curve zweiter Classe und nach § 45 gehen nicht mehr als drei derselben und mindestens eine durch den je entsprechenden Punkt in g; diese Punkte sind die in g vorkommenden Schnittpunkte von je drei ent-

sprechenden Ebenen der projectivischen Bündel. Die ebene Curve dritter Ordnung, welche den Schnitt unserer Ebene mit der Fläche bildet, ist der Ort von Punkten in den durch die drei Bündel auf ihr bestimmten collinearen Systemen, wo je drei entsprechende Gerade derselben sich begegnen (§ 70). Sie enthält die drei Gruppen sich selbst entsprechender Punkte der Systeme in Paaren.

Auf dieser Fläche dritter Ordnung liegen die drei Raumcurven dritter Ordnung, welche je zwei der collinearen Bündel durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen mit einander hervorbringen; wir wollen sie $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ nennen als aus den Bündeln S_1, S_2; S_2, S_3; S_3, S_1 respective hervorgegangen. Ist P ein Punkt, in welchem sich zwei entsprechende Strahlen a_u, a_k der Bündel S_i und S_k schneiden, so entspricht den durch sie bestimmten Ebenenbüscheln dieser Bündel ein zu ihnen projectivisches Ebenenbüschel in S_j, von dem eine Ebene durch P geht.

Wenn wir bemerken, dass nach der entwickelten Erzeugungsweise jede Ebene von einem dieser Bündel einen und nur einen Punkt der Fläche bestimmt, nämlich ihren Schnittpunkt mit den entsprechenden Ebenen der beiden andern Bündel, so erkennen wir die Punkte P der Fläche als projectivisch bezogen auf ein Gebilde zweiter Stufe und können sie daher auch den Punkten P' einer Ebene $\mathfrak{E}'$ projectivisch zuordnen, indem wir dieselbe zu einem jener Bündel durch Feststellung von vier Paaren entsprechender Elemente reciprok machen; nur dürfen von den bezüglichen Punkten der Fläche nicht drei auf einer von den drei oben genannten Curven dritter Ordnung liegen. Man kann sie als die eindeutige ebene Abbildung der Fläche nach ihren Punkten bezeichnen. (Vergl. § 77, 5.)

Jeder geraden Punktreihe g' in ihr entsprechen drei zu ihr und zu einander projectivische Ebenenbüschel in den Bündeln S_1, S_2, S_3 und die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Gruppen, d. h. die Punkte einer Curve dritter Ordnung auf der Fläche. Da zwei Gerade sich in einem Punkt schneiden und durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, so schneiden sich zwei Raumcurven dritter Ordnung von diesem

zweifach unendlichen System in je einem Punkte der Fläche und je zwei Punkte der Fläche werden durch eine Curve desselben verbunden; den Reihen mit einem gemeinschaftlichen Punkt in der Ebene entsprechen die einfach unendlich vielen Curven dritter Ordnung durch den entsprechenden Punkt der Fläche; und da jede von diesen einen beliebigen ebenen Querschnitt der Fläche dritter Ordnung einmal oder dreimal trifft, so muss das Bild eines solchen in der Ebene $\mathfrak{E}'$ so beschaffen sein, dass höchstens drei und mindestens einer seiner Punkte einer beliebigen geraden Reihe angehören, d. h. es ist eine Curve dritter Ordnung. Diese Curven dritter Ordnung müssen wie die ebenen Querschnitte und wie die Ebenen des Raumes, denen sie entsprechen, ein dreifach unendliches System bilden, d. h. sie müssen, weil neun Bedingungen nach § 33 eine solche Curve bestimmen, sechs Bedingungen unterworfen sein. Von welcher Art diese Bedingungen sind, kann leicht ermittelt werden. Drei entsprechende Ebenen der Bündel S_1, S_2, S_3 schneiden sich zwar im Allgemeinen in einem Punkt P, aber es kommt sechsmal vor, dass sie mehr als einen Punkt, d. h. eine Gerade mit einander gemein haben, welche dann eine gemeinschaftliche Sehne der Curven dritter Ordnung $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ sein muss. Dazu führt die Bemerkung, dass die Ebenen in jedem der drei Bündel, welche bei der Erzeugung der Punkte eines ebenen Querschnitts der Fläche betheiligt sind, einen Kegel dritter Classe umhüllen. Denken wir dann zwei beliebige Querschnitte $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ der Fläche, so liefern sie in dieser Weise an jedem der drei Punkte S_1, S_2, S_3 zwei Kegel dritter Classe, als Enveloppen der Ebenen, die ihren Punkten im bezüglichen Bündel entsprechen; unter den neun gemeinsamen Tangentialebenen dieser beiden Kegel sind die drei, welche den in der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ gelegenen Punkten der Fläche entsprechen; den übrigen sechs müssen je in $\mathfrak{E}_1$ wie in $\mathfrak{E}_2$ ein der Schnittlinie nicht angehöriger Punkt entsprechen, d. h. die drei je entsprechenden Ebenen der Bündel haben zwei verschiedene Punkte oder eine ganz in der Fläche enthaltene Gerade gemein. Somit erkennen wir die Existenz von sechs geraden Linien in der betrachteten Fläche; wir wollen sie als die Geraden $a_1, \ldots a_6$ der Fläche bezeichnen. Keine zwei derselben schneiden sich, weil in einem ihnen

gemeinsamen Punkte drei entsprechende Strahlen der erzeugenden Bündel zusammentreffen müssten; keine vier von ihnen gehören zur nämlichen Regelschaar, weil sonst alle Transversalen derselben in der Fläche liegen d. h. das bezügliche einfache Hyperboloid ein Theil derselben sein müsste.

In der ebenen Abbildung $\mathbf{E}'$ muss jede dieser Geraden, weil sie einer Ebene des zu ihr reciproken Bündels entspricht, durch einen Punkt dargestellt erscheinen, und da ein beliebiger ebener Querschnitt der Fläche von jeder dieser Geraden in einem Punkt getroffen wird, so müssen die dreifach unendlich vielen Curven dritter Ordnung, welche die ebenen Querschnitte der Fläche darstellen, durch die so bestimmten sechs Punkte $1, 2, \ldots 6$ der Ebene $\mathbf{E}'$ hindurchgehen. Wir wollen sie als die Fundamentalpunkte der Abbildung bezeichnen; sie sind zugleich die Ausnahmepunkte derselben, ihnen entsprechen nicht einzelne Punkte, sondern gerade Reihen von Punkten auf der Fläche. Den Schnitten der Ebenen eines Büschels mit der Fläche, dessen Scheitelkante sie in den Punkten A, B trifft, entsprechen die Curven eines Büschels von der dritten Ordnung, welche durch die sechs Fundamentalpunkte und die Punkte A', B' gehen und sich noch in einem neunten Punkte C' schneiden, dem Bilde des dritten Punktes C der Fläche in der Scheitelkante AB.

Einer geraden Reihe g' in $\mathbf{E}'$, welche einen der Fundamentalpunkte enthält, entsprechen in den erzeugenden Bündeln drei zu ihnen projectivische Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten die bezügliche Gerade der Fläche schneiden, und die daher an Stelle der im allgemeinen Fall entstehenden Raumcurve dritter Ordnung als Durchdringung zweier Hyperboloide, die ein Paar sich schneidende Geraden gemein haben, einen Kegelschnitt $\mathbf{G}$ erzeugen, dessen Punkte denen von g' projectivisch entsprechen. Denken wir die Ebene dieses Kegelschnitts, so schneidet sie aus der Fläche dritter Ordnung nothwendig noch eine Gerade b aus, und da das Bild der Vereinigung von b und $\mathbf{G}$ eine Curve dritter Ordnung durch die sechs Fundamentalpunkte sein muss, deren einen g' das Bild von $\mathbf{G}$ enthält, so kann das Bild von b nur der Kegelschnitt sein, den die übrigen fünf Fundamentalpunkte mit einander bestimmen. Wir hätten schon bemerken können, dass die sechs

Fundamentalpunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen können, weil sonst die oben betrachteten Punkte A', B', C' in einer Geraden und also ihre drei Originale in der Fläche in einer Raumcurve dritter Ordnung und zugleich in einer Geraden liegen müssten, was unmöglich ist. Somit bestimmen die sechs Fundamentalpunkte sechs Kegelschnitte $\mathbf{B}_1$ durch $2, \ldots, 6$; $\mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_6$ durch je fünf unter ihnen, die Bilder von sechs geraden Linien $b_1, \ldots b_6$, welche der Fläche dritter Ordnung gleichfalls angehören und von denen jede diejenigen fünf Geraden a_i der Fläche schneidet, deren Bilder ihr Bildkegelschnitt enthält. Die sechs Geraden a und die sechs Geraden b bilden, was man nach Schläfli eine Doppelsechs nennt.

Enthält aber ferner die Reihe g' zwei der Fundamentalpunkte, so sind die Scheitelkanten der entsprechenden Ebenenbüschel die Transversalen der bezüglichen Geraden a_i, a_k der Fläche aus den Scheiteln der Bündel, und die Curve dritter Ordnung, von der g' das Bild ist, wird durch Absonderung dieser Geraden zu einer sie schneidenden Geraden c_{ik} in der Fläche. Man sieht, es können nicht drei Fundamentalpunkte in einer geraden Linie liegen. Die erhaltene Gerade c_{ik} schneidet offenbar auch die beiden Geraden b_i und b_k der Fläche. Es giebt fünfzehn solcher Geraden c_{ik} in der Fläche, weil die sechs Punkte $1, \ldots 6$ so viele gerade Verbindungslinien liefern.

Die Fläche dritter Ordnung enthält also siebenundzwanzig gerade Linien, sechs a, sechs b und fünfzehn c. (Vergl. § 58.) Drehen wir um eine der Geraden eine Ebene, so schneidet sie die Fläche überdiess in einem Kegelschnitt und berührt sie in den zwei Punkten, in welchen dieser ihr begegnet; für die Ebenen durch eine Gerade a wird dieser Kegelschnitt sich als Curve dritter Ordnung durch die sechs Fundamentalpunkte und mit Doppelpunkt in dem zugehörigen unter ihnen darstellen, da dieser für sie alle die drei Punkte A, B, C vertritt; die Kegelschnitte des Büschels um eine b erscheinen wie wir sahen als Strahlen des Büschels aus dem gleichbezeichneten Fundamentalpunkt; die Kegelschnitte des Büschels um eine c aber müssen als die Kegelschnitte durch die vier nicht entsprechenden Fundamentalpunkte erscheinen. In jeder dieser einfach unendlichen Reihen kommen fünf Curven vor, welche zwei gerade Linien der Fläche darstellen, d. h.

durch jede der siebenundzwanzig Geraden gehen fünf dreifach berührende Ebenen der Fläche und jede der Geraden wird von zehn andern geschnitten. Es ist leicht, die folgenden Regeln zu begründen: Jede Gerade a respective b wird von allen Geraden b respective a, deren Indices von dem ihrigen verschieden sind, und von denjenigen Geraden c geschnitten, unter deren Indices der ihrige vorkommt. Jede Gerade c schneidet diejenigen a und b, welche einen ihrer Indices enthalten und diejenigen c, welche keinen derselben enthalten.

1) Wenn die drei collinearen Bündel die Ebene der Scheitel entsprechend gemein haben, so erzeugen sie diese und eine Fläche zweiter Ordnung durch die drei Collineationsaxen (§ 78).

2) Wenn in $\mathbf{A}_i = 0$, $\mathbf{B}_i = 0$, $\mathbf{C}_i = 0$ die $\mathbf{A}_i$, etc. lineare Functionen der vier Coordinaten x_i, respective ξ_i bedeuten, so werden durch

$$\varkappa\mathbf{A}_1 + \lambda\mathbf{B}_1 + \mu\mathbf{C}_1 = 0, \quad \varkappa\mathbf{A}_2 + \lambda\mathbf{B}_2 + \mu\mathbf{C}_2 = 0,$$
$$\varkappa\mathbf{A}_3 + \lambda\mathbf{B}_3 + \mu\mathbf{C}_3 = 0$$

drei collineare Gebilde zweiter Stufe dargestellt und das Erzeugniss ihrer Verbindung wird durch Elimination der Parameter in der Form

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_2\mathbf{C}_3 - \mathbf{B}_3\mathbf{C}_2) + \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_3\mathbf{C}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{C}_3) + \mathbf{A}_3(\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1) = 0$$

ausgedrückt. Es ist eine Fläche dritter Ordnung respective eine Fläche dritter Classe.

Nach den Elementen der Determinantentheorie ist analog zu § 42

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 + m\mathbf{B}_1 + n\mathbf{C}_1, & \mathbf{A}_1 + m'\mathbf{B}_1 + n'\mathbf{C}_1, & \mathbf{A}_1 + m''\mathbf{B}_1 + n''\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_2 + m\mathbf{B}_2 + n\mathbf{C}_2, & \mathbf{A}_2 + m'\mathbf{B}_2 + n'\mathbf{C}_2, & \mathbf{A}_2 + m''\mathbf{B}_2 + n''\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_3 + m\mathbf{B}_3 + n\mathbf{C}_3, & \mathbf{A}_3 + m'\mathbf{B}_3 + n'\mathbf{C}_3, & \mathbf{A}_3 + m''\mathbf{B}_3 + n''\mathbf{C}_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1, m, n \\ 1, m', n' \\ 1, m'', n'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3 \end{vmatrix}$$

und es erzeugen somit die collinearen Bündel

$$\varkappa(\mathbf{A}_1+m\mathbf{B}_1+n\mathbf{C}_1)+\lambda(\mathbf{A}_1+m'\mathbf{B}_1+n'\mathbf{C}_1)+\mu(\mathbf{A}_1+m''\mathbf{B}_1+n''\mathbf{C}_1)=0,$$
$$\varkappa(\mathbf{A}_2+m\mathbf{B}_2+n\mathbf{C}_2)+\lambda(\mathbf{A}_2+m\mathbf{B}_2+n'\mathbf{C}_2)+\mu(\mathbf{A}_2+m''\mathbf{B}_2+n''\mathbf{C}_2)=0,$$
$$\varkappa(\mathbf{A}_3+m\mathbf{B}_3+n\mathbf{C}_3)+\lambda(\mathbf{A}_3+m'\mathbf{B}_3+n'\mathbf{C}_3)+\mu(\mathbf{A}_3+m'\mathbf{B}_3+n''\mathbf{C}_3)=0$$

aus den drei durch die Parameterwerthe m, n, m', n', m'', n'' charakterisierten Punkten der Fläche die nämliche Fläche dritter Ordnung wie die ursprünglichen.

So wird auch (§ 78) die Raumcurve dritter Ordnung aus zwei collinearen Bündeln durch unendlich viele andere Paare collinearer Bündel erzeugt, deren Scheitel auf ihr liegen und durch dreifach unendlich viele Paare von Ebenenbüscheln, deren Scheitelkanten zu ihren Bisekanten gehören. Welche Sätze gelten für den ebenen Querschnitt dieser Systeme? (§ 71, 6.)

3) Betrachtet man die Gleichungen $\varkappa A_i + \lambda B_i + \mu C_i = 0$ als Bestimmungsgleichungen für die Verhältnisse der Veränderlichen $x_2 : x_1$, $x_3 : x_1$, $x_4 : x_1$, so erhält man diese als Quotienten dreireihiger Determinanten, deren Elemente lineare Functionen der $\varkappa, \lambda, \mu$ sind, also von homogenen Functionen dritten Grades mit den Veränderlichen $\varkappa, \lambda, \mu$; setzen wir $\varrho x_i = f_i(\varkappa, \lambda, \mu)$.

Betrachtet man $\varkappa, \lambda, \mu$ als projectivische Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, so wird dadurch jedem Punkt der Fläche ein bestimmter Punkt der Ebene zugeordnet und umgekehrt entspricht auch im Allgemeinen einem Punkt der Ebene ein Punkt der Fläche. Das letztere erleidet Ausnahmen für die sechs Punkte, welche man als den Curven dritter Ordnung $f_i = 0$ gemeinsam erkennt; diesen entsprechen sechs Gerade der Fläche, weil für die entsprechenden Werthe der $\varkappa, \lambda, \mu$ sich die Grundgleichungen (in 2) auf zwei reducieren.

Die so erhaltene Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf die Ebene ist mit der des Textes identisch.

Dieselbe kann dazu dienen, die Durchdringungscurven der Fläche dritter Ordnung mit andern algebraischen Flächen zu charakterisieren.

Man führe zu den Entwickelungen des Textes die dualistisch entsprechenden aus, welche die Theorie der Flächen dritter Classe enthalten.

Wie degeneriert das Erzeugniss, wenn die drei ebenen Punktsysteme affin zu einander sind?

Weil nach § 61 die Berührungsebenen der Flächen eines linearen Gebildes zweiter Stufe in den x in einem seiner Grundpunkte ein Bündel mit denselben Parametern bilden, so sind die Tangentialebenenbündel desselben Gebildes in zweien und dreien seiner Grundpunkte zu einander collinear und können zur Erzeugung von Raumcurven dritter Ordnung mit ihren Bisekanten resp. von Flächen dritter Ordnung verbunden werden. Ebenso sind die Systeme der Berührungspunkte der Flächen eines linearen Gebildes zweiter Stufe in den ξ in seinen Grundebenen zu einander collinear und erzeugen durch Verbindung zu zweien oder dreien developpable und krumme Flächen dritter Classe. Die nähere Untersuchung z. B. ob dieselben für die linearen Gebilde

zweiter Stufe aus Flächen zweiten Grades allgemein sind etc. bleibt zu führen. (Vergl. § 88, Anfang und § 49, p. 306 oben.)

4) Wenn drei entsprechende Strahlen der Bündel sich in einem Punkte schneiden, so wird derselbe ein Doppelpunkt der Fläche dritter Ordnung. Man bildet darnach leicht Flächen dieser Ordnung bis mit vier Doppelpunkten, ebenso wie bei Erzeugung des § 58. Die vier Doppelpunkte und drei andere Punkte der Fläche bestimmen eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. (§ 29, 7.) Wir erinnern, wie nach § 58 die Doppelpunkte aus den Schnitten der Scheitelkante des Ebenenbüschels mit der Grundcurve des Flächenbüschels und natürlich den Doppelpunkten der letzteren hervorgehen, wenn hier ihrem projicierenden Kegel aus dem Doppelpunkt die Ebene nach ihm entspricht. Berührt die Scheitelkante die Grundcurve, so entsteht ein biplanarer Knotenpunkt in der Fläche aus der Vereinigung von zwei gewöhnlichen; ein biplanarer Knoten entsteht auch bei Schnitt von Grundcurve und Scheitelkante, wenn die Ebene nach der zugehörigen Curventangente der diese enthaltenden Fläche zweiten Grades entspricht. Und ein uniplanarer Knoten wird erzeugt, wenn die Grundcurve einen Knoten hat, die Scheitelkante des Ebenenbüschels in der Ebene der zugehörigen Tangenten liegt und diese dem Kegel aus dem Knoten entspricht. Denn das Ebenenbüschel erzeugt mit dem Tangentialebenenbüschel der Flächen im betrachteten Punkt den Kegel der Inflexionstangenten (II, § 20) im Knotenpunkt und dieser degeneriert unter den angegebenen Umständen in ein Ebenenpaar und in eine Doppelebene resp.

5) Wie bildet man hiernach eine Regelfläche dritten Grades (II, § 60), als welche eine gerade Doppellinie enthält?

6) Zwei Curven dritter Ordnung im Raum, welche sich in einem Punkt schneiden, bestimmen eine Fläche dritter Ordnung; jede Ebene aus ihrem Schnittpunkt, die sie noch sonst schneidet, liefert durch den Schnitt ihrer nicht von jenem Punkt ausgehenden in ihr liegenden Sehnen einen Punkt der Fläche.

7) Jede Gerade b schneidet fünf der Geraden a, je vier a werden von zwei Geraden b, je drei a von drei b geschnitten; etc., die Geraden a und b sind zwei gleichbedeutende Gruppen. Drei Gerade a und die drei sie schneidenden b bilden den Schnitt eines einfachen Hyperboloids mit der Fläche.

Man bilde die Liste der Seiten der fünfundvierzig Dreiecke in den dreifach berührenden Ebenen der Fläche.

8) Die Ebenen durch eine Gerade der Fläche berühren sie doppelt in den Schnittpunkten der Geraden mit dem sie zum vollen Querschnitt ergänzenden Kegelschnitt; die Gesammtheit dieser Paare in einer Geraden bildet eine Involution, deren Doppelpunkte die Punkte stationärer Berührung sind (II, § 27, 9) oder die Punkte der parabolischen Curve in der Fläche (II, § 27, 4 und oben § 61).

9) Die Erzeugung aus einem Ebenenbündel und einem zu ihm reciproken Flächenbündel zweiten Grades ist in § 77 enthalten.

10) Was erzeugt man durch die Verbindung von drei collinearen Elementargebilden zweiter Stufe mit singulären Elementen?

11) Im Fall eines Doppelpunktes liefert die Centralprojection der Fläche dritter Ordnung aus diesem Doppelpunkt eine ebene eindeutige Abbildung, in welcher die sechs Fundamentalpunkte als Durchstosspunkte der sechs in der Fläche liegenden sie vierpunktig berührenden Geraden aus dem Doppelpunkt auf einem Kegelschnitt liegen, der das Bild des Doppelpunktes ist; diese sechs Geraden zählen für zwölf, weil die Bilder der andern Hälfte ihrer Doppelsechs in denselben Kegelschnitt fallen. Die fünfzehn Verbindungslinien der sechs Fundamentalpunkte repräsentieren die übrigen Geraden der Fläche. Die Geraden der Ebene entsprechen den durch den Doppelpunkt geführten Querschnitten.

12) Man charakterisiere die Abbildung der Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten und leite daraus die Existenz und Lage der drei Geraden ab, welche sie ausser den vierfach zählenden Kanten des Doppelpunkts-Tetraeders noch enthält.

Wir sahen in § 29, 7 die Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten nach der Verwandtschaft der reciproken Coordinaten aus der Ebene hervorgehen oder in derselben Punkt für Punkt abgebildet. Die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte der im Vorigen aufgestellten Verwandschaft zwischen Ebene und Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten bilden eine Congruenz, die das räumliche Analogon der Curve dritter Classe mit Doppeltangente bildet. Man untersuche die Eigenschaften derselben.

88. Weitere Entwickelungen können ebenso durch mannigfache Verbindungen des bisherigen wie durch Ausdehnung desselben erhalten werden. Wir geben zunächst ein Beispiel der ersten Art. Im B. 3) des vorigen § ist die collineare Beziehung erwähnt, welche zwischen den Tangentialebenenbündeln der Flächen zweiter Ordnung von einem linearen Gebilde zweiter Stufe in den acht Grundpunkten $P_0, \ldots P_7$ und ebenso zwischen den Systemen der Berührungspunkte der Flächen zweiter Classe eines solchen Gebildes in den acht Grundebenen $\mathbf{E}_0, \ldots \mathbf{E}_7$ stattfindet. Wir wissen, dass sieben der acht Grundpunkte oder Grundebenen den achten und die achte bestimmen, und erinnern, dass durch zwei beliebige Punkte oder Ebenen eine Fläche des linearen Gebildes von gegebenen sieben Grundelementen bestimmt ist, insbesondere also auch durch die Tan-

gentialebene in einem Grundpunkt resp. den Berührungspunkt in einer Grundebene; während durch ein Element ausser den Grundelementen ein lineares Gebilde erster Stufe von Flächen zweiten Grades resp. dessen Grundcurve vierter Ordnung oder Grunddeveloppable vierter Classe bestimmt werden. Offenbar liegen die Berührungspunkte der Flächen zweiter Classe einer solchen Schaar mit einer der Grundebenen in der Geraden, längs welcher diese jene ihre gemeinsame Developpable berührt; und die Flächen des Gebildes zweiter Stufe in ξ, welche eine der Grundebenen in den Punkten einer Geraden berühren, bilden eine Schaar von Flächen zweiten Grades und berühren auch jede andere Grundebene in Punkten einer Geraden — wie es der Begriff der Collineation ausspricht. Und dual entsprechend.

Ist dann g_{ik} die Schnittlinie der beiden Grundebenen $\mathbf{E}_i$ und $\mathbf{E}_k$ und berührt eine Fläche des Gebildes die eine der Ebenen in einem Punkt der Schnittlinie, so enthält sie diese ganz, weil durch dieselbe drei Tangentialebenen an sie gehen, und sie berührt daher auch die andere der beiden Grundebenen in einem Punkt dieser Geraden; oder die Gerade g_{ik} entspricht in der Collineation der Ebenen $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_k$ sich selbst als Reihe und enthält somit zwei sich selbst entsprechende Punkte $F_{ik}^{(1)}$, $F_{ik}^{(2)}$, in denen eine Fläche des Gebildes beide Grundebenen zugleich berühren muss. Diese Flächen können nur solche mit einer verschwindenden Hauptaxe oder Kegelschnitte sein, die dem Gebilde zweiter Stufe in ξ angehören. Für eine beliebige Gerade g_i der Ebene $\mathbf{E}_i$ gehören die in ihr die $\mathbf{E}_i$ berührenden Flächen des Gebildes einer Schaar an, und da diese vier in Kegelschnitte degenerierte Flächen enthält, so ist der Ort aller Punkte von $\mathbf{E}_i$, in denen sie von Kegelschnitten unter den Flächen des linearen Gebildes zweiter Stufe in den ξ berührt wird, eine Curve vierter Ordnung, welche offenbar keine singulären Punkte hat und zu der die Durchschnittslinien ihrer Ebene mit den sieben andern Grundebenen des Gebildes als Doppeltangenten gehören müssen. So entstehen in den acht Grundebenen $\mathbf{E}_0, \ldots \mathbf{E}_7$ acht allgemeine Curven vierter Ordnung, die unter einander collinear sind, als Orte der Berührungspunkte der Kegelschnitte unter den Flächen des Gebildes; und da in Folge ihrer Collineation den Doppeltangenten von irgend

einer unter ihnen Doppeltangenten jeder andern entsprechen müssen, so entspringen den 28 Geraden g_{ik}, in denen sich die acht Grundebenen schneiden, 28 Doppeltangenten von jeder dieser Curven; nämlich sieben als Schnittlinien ihrer Ebenen $\mathbf{E}_h$ mit den sieben übrigen Grundebenen und 21 als die entsprechenden $g_{ik}^{(h)}$ in $\mathbf{E}_h$ zu den Schnittlinien g_{ik} dieser sieben unter einander. Wie hiernach alle Flächen des Gebildes, die die Gerade g_{ik} enthalten, die Ebene $\mathbf{E}_h$ in Punkten der Doppeltangente $g_{ik}^{(h)}$ berühren, so berühren die Flächen des Gebildes, welche durch den Schnittpunkt der Grundebenen $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_k$ gehen, die Grundebene $\mathbf{E}_l$ in Punkten der Doppeltangenten $g_{ik}^{(l)}$, $g_{kh}^{(l)}$, $g_{hi}^{(l)}$ auf ihr.

Die Flächen des Gebildes zweiter Stufe in ξ, die durch einen bestimmten Punkt P im Raum gehen, berühren eine Grundebene $\mathbf{E}_i$ in den Punkten einer Curve dritter Ordnung, welche die ihr nach dem Vorigen angehörige Curve vierter Ordnung in sechs Punkten berührt, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen; und für zwei Punkte P, P^* liegen diese zweimal sechs Berührungspunkte auf einer Curve dritter Ordnung, in welcher diejenigen Flächen des Gebildes die Grundebene berühren, für welche P, P^* harmonische Pole sind — jene zweimal sechs Schnittpunkte entsprechen den zweimal sechs Kegelschnitten unter den Flächen des Gebildes, deren Ebenen P resp. P^* enthalten. Ist P in der Grundebene, so wird er zum Doppelpunkt der bezüglichen Berührungscurven dritter Ordnung und P und P^* in ihr liefern zwölf Berührungspunkte auf einer durch sie gehenden Curve dritter Ordnung.

Die Eigenschaften der Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung lassen sich also aus unserer Figur ableiten und es eröffnen sich eine Menge daran anschliessender Untersuchungen.

Andere ergebnissreiche Verbindungen entspringen aus demselben Satze des § 61 durch Anwendung auf ein Gebilde dritter Stufe, also z. B. die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf die Flächen zweiten Grades in einem linearen Gebilde dritter Stufe, ein zu jenem projectivisches Elementargebilde dritter Stufe. Denn in dieser Projectivität entspricht einer reellen oder imaginären Curve vierter Ordnung erster Art aus dem Flächengebilde eine Gerade des

Ebenenraumes und umgekehrt; einer Gruppe von acht Grundpunkten eines Flächenbündels in ihm ein Punkt; zwei solche Gruppen liegen daher in einer Curve vierter Ordnung erster Art und drei auf einer Fläche des Gebildes dritter Stufe. Seinen Flächenbüscheln entsprechen Ebenenbüschel und weil jenes vier Kegel enthält, so ist die Enveloppe der den Kegelflächen des Gebildes entsprechenden Ebenen eine Fläche vierter Classe, welche eindeutig der Ortsfläche der Mittelpunkte jener Kegel (§ 60, Schluss), der Kernfläche vierter Ordnung des Gebildes zugeordnet ist, die zehn Gerade enthält, weil zehn jener Kegel in Ebenenpaare zerfallen.

Den Verbindungsgeraden jeder Gruppe von acht Grundpunkten eines Bündels im Gebilde entsprechen, weil (§ 57, 7) sie mit der Raumcurve dritter Ordnung durch die sechs übrigen je eine Curve vierter Ordnung erster Art mit zwei Doppelpunkten im Gebilde vertreten, Doppeltangenten der Fläche vierter Classe, deren also durch einen Punkt 28 gehen — die Verbindung der jetzigen mit der vorhergehenden Betrachtung.

Die besonderen Fälle, wo die Flächen des Gebildes gemeinsame Punkte haben, besonders der mit sechs gemeinsamen Punkten, in welchem (§ 35) alle sie enthaltenden Flächen zweiten Grades dem Gebilde angehören, liefern zahlreiche interessante und wichtige Resultate.

Die Ausdehnung der bisherigen Untersuchungen sodann führt zunächst zur Erläuterung der Erzeugnisse von vier und mehr projectivischen Elementargebilden zweiter Stufe. Vier collineare Ebenen oder Bündel erzeugen als Enveloppe der Verbindungsebenen entsprechender Punkte eine Developpable sechster Classe und als Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine Curve sechster Ordnung; denn die Gebilde 1, 2, 3 und wieder ebenso die Gebilde 2, 3, 4 erzeugen je eine Fläche dritter Classe respective dritter Ordnung, welche beide die von den Gebilden 2 und 3 nach § 78 erzeugte Developpable dritter Classe respective Curve dritter Ordnung gemein haben, als ein Erzeugniss, an dem nicht alle Gebilde Theil haben. Eine Gerade wird von 16 Tangenten dieser Curve sechster Ordnung geschnitten ($r = 16$; II, § 22f.). Eine solche Curve bilden die Spitzen der Kegel unter den Flächen zweiten Grades in einem linearen Gebilde zweiter Stufe nach § 57.

Man sieht daraus, dass fünf collineare Ebenen oder Bündel nur eine Gruppe von Ebenen durch fünf entsprechende Punkte und eine Gruppe von Punkten in fünf entsprechenden Ebenen erzeugen können; wir werden sogleich erkennen, dass die Zahl der Elemente dieser Gruppe zehn sein muss.

Denn die analoge Verbindung von mehr als zwei collinearen Elementargebilden dritter Stufe giebt das Folgende: Drei collineare Räume liefern aus der Verbindung von je drei entsprechenden Bündeln eine Fläche dritter Ordnung und aus der von je drei entsprechenden Ebenen eine Fläche dritter Classe; fügen wir über die Bestimmung der Räume hinaus ein viertes Paar entsprechender Bündel oder Ebenen hinzu, so entsteht als Ort der Schnittpunkte von vier also von unendlich vielen entsprechenden Ebenen oder von drei entsprechenden Geraden der Räume eine Curve sechster Ordnung, und als Enveloppe der bezüglichen Verbindungsebenen eine developpable Fläche sechster Classe, dieselben, welche oben schon erhalten worden sind. Die Abbildung einer der Flächen dritter Ordnung durch sie (§ 87) zeigt, dass dieselbe sieben scheinbare Doppelpunkte hat. (Oder auch nach den Formeln von § 22 f. in II für $m = 6$, $r = 16$, $\beta = 0$.)

Vier collineare Räume liefern als Ort der zweifach unendlich vielen Schnittpunkte von je vier entsprechenden Ebenen respective als Enveloppe der zweifach unendlich vielen Verbindungsebenen von je vier entsprechenden Punkten eine Fläche vierter Ordnung respective vierter Classe, nach dem einfachen analytischen Ausdruck derselben mittelst vier linearer homogener Functionen $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$ der Coordinaten x oder ξ

$\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{B}_1+\lambda_3\mathbf{C}_1+\lambda_4\mathbf{D}_1=0$, $\lambda_1\mathbf{A}_2+\lambda_2\mathbf{B}_2+\lambda_3\mathbf{C}_2+\lambda_4\mathbf{D}_2=0$,
$\lambda_1\mathbf{A}_3+\lambda_2\mathbf{B}_3+\lambda_3\mathbf{C}_3+\lambda_4\mathbf{D}_3=0$, $\lambda_1\mathbf{A}_4+\lambda_2\mathbf{B}_4+\lambda_3\mathbf{C}_4+\lambda_4\mathbf{D}_4=0$

durch Elimination der Parameter λ_i.

Natürlich hat die entsprechende Determinante mit dem Anfangsglied $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2\mathbf{C}_3\mathbf{D}_4$ wie die der §§ 42 und 87 die Eigenschaft, dass sie bei Ersetzung der $\mathbf{A}_i$ durch $\mathbf{A}_i+l\mathbf{B}_i+m\mathbf{C}_i+n\mathbf{D}_i$, der $\mathbf{B}_i$ durch $\mathbf{A}_i+l'\mathbf{B}_i+m'\mathbf{C}_i+n'\mathbf{D}_i$, etc. übergeht in das Product der ursprünglichen Determinante in die Determinante, welche aus den Zeilen $1, l, m, n$; $1, l', m', n'$; etc. besteht.

Somit wird auch diese Fläche durch unendlich viele aus den ursprünglichen hervorgehender Quadrupel collinearer Räume erzeugt.

Die Fläche ist für congruente resp. ähnliche Räume zu specialisieren, wo also der absolute Kreis sich selbst entspricht.

Fünf collineare Räume erzeugen in gleicher Weise eine Curve zehnter Ordnung resp. eine Developpable zehnter Classe, das gemeinsame Gebilde der zwei aus den Räumen 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 5 respective entstandenen Flächen abgesehen von der nach dem Vorigen durch 1, 2, 3 allein entstehenden Curve oder developpablen Fläche sechster Ordnung respective Classe.

Endlich erzeugen, wie wieder aus dem Nächsten sich am einfachsten ergeben würde, sechs collineare Räume eine Gruppe von zwanzig Punkten respective Ebenen. Denn es steht der Ausdehnung des Begriffs der Elementargebilde auf die vierte Stufe, etc. nach § 22 p. 119 nichts entgegen.

Aber diese Bemerkung führt sofort zu der andern, dass nach der völligen Gleichartigkeit des analytischen Ausdrucks für Gebilde von Flächen als Orten oder Enveloppen mit dem der Gebilde aus Ebenen und Punkten von derselben Stufe unsere Betrachtungen sich im Wesentlichen auf die projectivische Verbindung solcher Gebilde übertragen müssen. Für Gebilde erster Stufe ist diess schon entwickelt. (§ 58.)

Für collineare Gebilde zweiter Stufe aus Flächen zeigt die Ausdrucksform unter 2) in § 87 sofort die Richtigkeit des allgemeinen Satzes: Der Ort der Schnittpunkte von je drei entsprechenden Flächen in projectivischen Gebilden zweiter Stufe von den respectiven Ordnungen μ_1, μ_2, μ_3 ist eine Fläche von der Ordnung $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$, welche durch die Basispunkte der drei Gebilde — an Zahl $\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3$ — ferner durch die Curven von den respectiven Ordnungen

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1\mu_2,\quad \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_2\mu_3,\quad \mu_3^2 + \mu_1^2 + \mu_3\mu_1,$$

die von zweien dieser Gebilde nämlich 1, 2; 2, 3; 3, 1 respective erzeugt werden, und endlich durch die unbegrenzte Zahl von Curven der Ordnung $(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1)$ aus je drei entsprechenden Gebilden erster Stufe aus den gegebenen Gebilden — hindurchgehen.

Und der Ort der Schnittpunkte von vier entsprechenden

Flächen in projectivischen Gebilden zweiter Stufe von den Ordnungen $\mu_1, \ldots \mu_i$ ist eine Curve der Ordnung

$$(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4).$$

Und Analoges giebt die Weiterführung auf Gebilde dritter, etc. Stufe.

So zunächst für die reciproken Gebilde zweiter Stufe in § 77. Wenn wir dort die Symbole $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{B}_i$ als homogene Functionen von den Graden μ_1 und μ_2 respective in den Variabeln statt als lineare Functionen denken, so bleibt die Entwickelung unverändert und das Ergebniss der projectivischen Verbindung des Strahlenbündels $\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2+\lambda_3\mathbf{A}_3=0$ mit dem Ebenenbündel $\mu_1\mathbf{B}_1 + \cdots = 0$ nach der bilinearen Relation

$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)\mu_1 + (b_1\lambda_1 + \cdot\cdot)\mu_2 + (c_1\lambda_1 + \cdot\cdot)\mu_3 = 0,$$

$$\mathbf{A}_1\{a_2(b_3\mathbf{B}_3 - c_3\mathbf{B}_2) + b_2(c_3\mathbf{B}_1 - a_3\mathbf{B}_3) + c_2(a_3\mathbf{B}_2 - b_3\mathbf{B}_1)\} + \text{etc.} = 0$$

drückt das Erzeugniss der Verbindung von zwei reciproken Flächenbündeln oder Flächengebilden zweiter Stufe aus, eine Fläche von der Ordnung respective Classe $(\mu_1 + \mu_2)$, jenachdem die Variabeln x_i oder ξ_i vorausgesetzt wurden; je zwei Flächen des ersten Gebildes erzeugen mit einander eine Curve respective Developpable, die mit der entsprechenden Fläche des zweiten eine Gruppe von gemeinsamen Punkten respective Ebenen liefert, welche dem Erzeugniss angehören.

So erzeugt ein Bündel von Ebenen mit einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung eine Fläche dritter Ordnung durch die Schnittpunkte der Strahlen des ersten mit den entsprechenden Flächen des zweiten und durch die Schnittpunktegruppen der Ebenen des ersten mit den entsprechenden Raumcurven vierter Ordnung erster Art aus den Flächenpaaren des zweiten. Denn man zeigt leicht, dass beide identisch sind.

Die Fläche des einen Bündels, die dem Scheitelstrahl des andern entspricht, berührt das Erzeugniss in seinem Scheitel (§ 77) und analog im allgemeinen Falle.

Bei der Erzeugung der Flächen aus projectivischen Büscheln gilt analog das Gesetz für jeden Punkt der Grundcurve des einen Büschels, dass die Tangentialebene derjenigen seiner Flächen, die der durch ihn gehen-

den Fläche der andern entspricht, auch die Tangentialebene des Erzeugnisses ist.

Wir wissen, dass für lineare Gebilde erster Stufe

$$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 = 0, \quad \mu_1 \mathbf{B}_1 + \mu_2 \mathbf{B}_2 = 0$$

die bilineare Relation der Parameter

$$(a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)\, \mu_1 + (b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2)\, \mu_2 = 0$$

mit der Projectivitätsgleichung derselben

$$a_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + b_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} = 0$$

identisch wird. Aber es ist zu bemerken, dass auch für lineare Gebilde dritter Stufe

$$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 + \lambda_4 \mathbf{A}_4 = 0,$$
$$\mu_1 \mathbf{B}_1 + \mu_2 \mathbf{B}_2 + \mu_3 \mathbf{B}_3 + \mu_4 \mathbf{B}_4 = 0$$

sich die analoge Entwickelung nicht nur algebraisch durchführen lässt, sondern auch constructive Bedeutung im Anschauungsraum behält. Entspricht dann den Werthegruppen λ_i', λ_i'', λ_i''' die Werthegruppe μ_i, so gelten die Gleichungen

$$\lambda_1' \mathbf{A}_1 + \lambda_2' \mathbf{A}_2 + \lambda_3' \mathbf{A}_3 + \lambda_4' \mathbf{A}_4 = 0, \quad \lambda_1'' \mathbf{A}_1 + \cdots = 0,$$
$$\lambda_1''' \mathbf{A}_1 + \cdots = 0, \quad \mu_1 \mathbf{B}_1 + \mu_2 \mathbf{B}_2 + \cdots = 0$$

und

$$(a_1 \lambda_1' + a_2 \lambda_2' + a_3 \lambda_3' + a_4 \lambda_4')\, \mu_1 + (b_1 \lambda_1' + \cdots)\, \mu_2 + (c_1 \lambda_1' + \cdots)\, \mu_3 + (d_1 \lambda_1' + \cdots)\, \mu_4 = 0,$$
$$(a_1 \lambda_1'' + \cdots)\, \mu_1 + (b_1 \lambda_1'' + \cdots)\, \mu_2 + (c_1 \lambda_1'' + \cdots)\, \mu_3 + (d_1 \lambda_1'' + \cdots)\, \mu_4 = 0,$$
$$(a_1 \lambda_1''' + \cdots)\, \mu_1 + (b_1 \lambda_1''' + \cdots)\, \mu_2 + (c_1 \lambda_1''' + \cdots)\, \mu_3 + (d_1 \lambda_1''' + \cdots)\, \mu_4 = 0.$$

Man entnimmt den drei ersten die Werthe von λ_4', λ_4'', λ_4''', um sie in die drei letzten einzusetzen und zwischen ihnen und der vierten Gleichung die μ_i linear zu eliminieren. Die Determinante der Elimination enthält in der dritten Reihe die $\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_4$, in der ersten die Trinome

$\lambda_1' a_{14} + \lambda_2' a_{24} + \lambda_3' a_{34}$, $\lambda_1' b_{14} + \cdots$, $\lambda_1 c_{14} + \cdots$, $\lambda_1' d_{14} + \cdots$,

wenn wir mit $a_{14}, \ldots d_{14}$ die Determinanten

$$a_1 \mathbf{A}_4 - a_4 \mathbf{A}_1, \ldots, d_1 \mathbf{A}_4 - d_4 \mathbf{A}_1$$

bezeichnen; in der zweiten und dritten aber die mit λ_1'', λ_2'', λ_3'',

Flächen in projectivischen Gebilden zweiter Stufe von den Ordnungen $\mu_1, \ldots \mu_4$ ist eine Curve der Ordnung

$$(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4).$$

Und Analoges giebt die Weiterführung auf Gebilde dritter, etc. Stufe.

So zunächst für die reciproken Gebilde zweiter Stufe in § 77. Wenn wir dort die Symbole $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{B}_i$ als homogene Functionen von den Graden μ_1 und μ_2 respective in den Variabeln statt als lineare Functionen denken, so bleibt die Entwickelung unverändert und das Ergebniss der projectivischen Verbindung des Strahlenbündels $\lambda_1\mathbf{A}_1+\lambda_2\mathbf{A}_2+\lambda_3\mathbf{A}_3=0$ mit dem Ebenenbündel $\mu_1\mathbf{B}_1 + \cdots = 0$ nach der bilinearen Relation

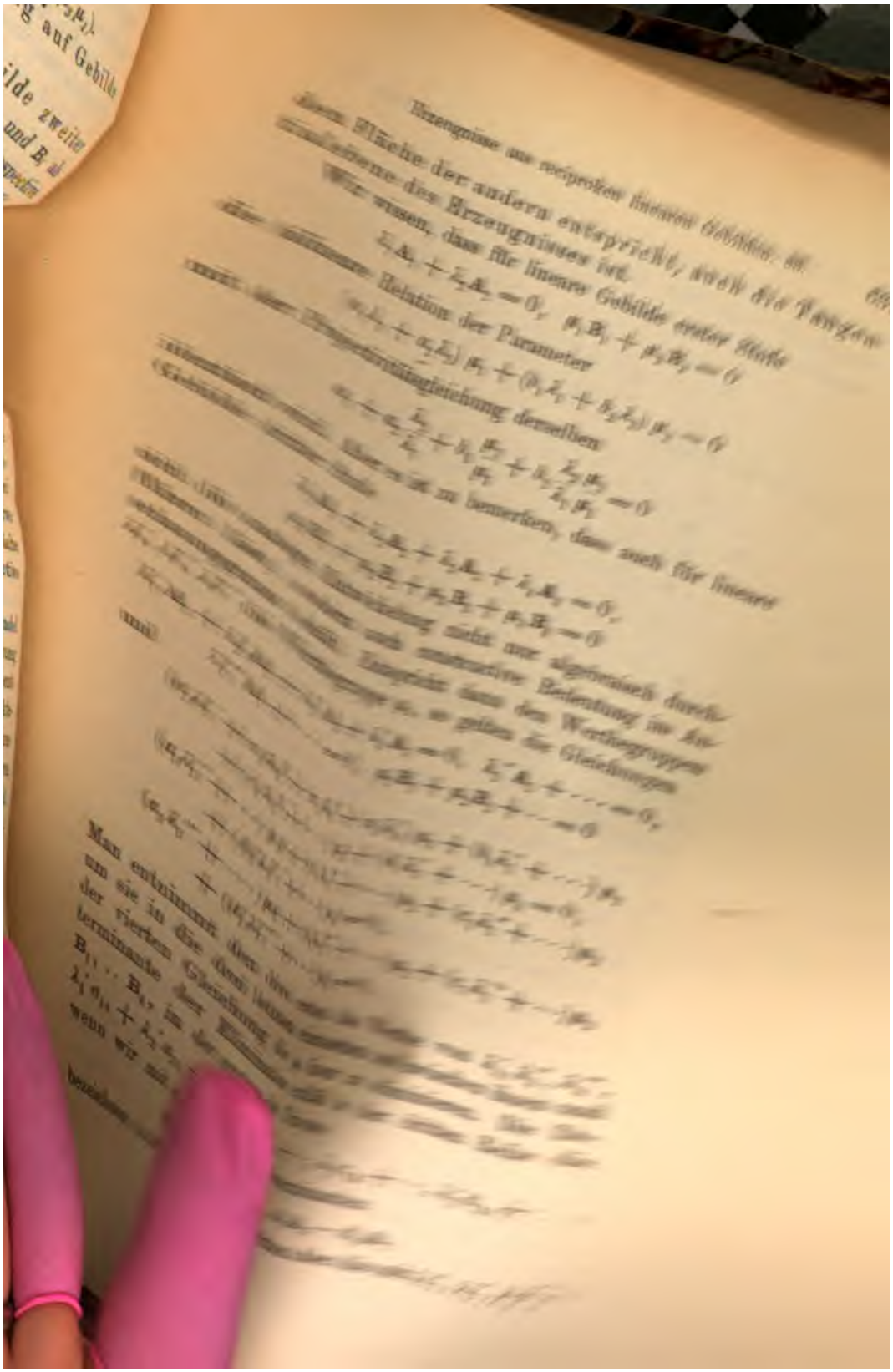
$$(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3)\mu_1 + (b_1\lambda_1 + \cdots)\mu_2 + (c_1\lambda_1 + \cdots)\mu_3 = 0,$$
$$\mathbf{A}_1\{a_2(b_3\mathbf{B}_3 - c_3\mathbf{B}_2) + b_2(c_3\mathbf{B}_1 - a_3\mathbf{B}_3) + c_2(a_3\mathbf{B}_2 - b_3\mathbf{B}_1)\} + \text{etc.} = 0$$

drückt das Erzeugniss der Verbindung von zwei reciproken Flächenbündeln oder Flächengebilden zweiter Stufe aus, eine Fläche von der Ordnung respective Classe $(\mu_1 + \mu_2)$, jenachdem die Variabeln x_i oder ξ_i vorausgesetzt wurden; je zwei Flächen des ersten Gebildes erzeugen mit einander eine Curve respective Developpable, die mit der entsprechenden Fläche des zweiten eine Gruppe von gemeinsamen Punkten respective Ebenen liefert, welche dem Erzeugniss angehören.

So erzeugt ein Bündel von Ebenen mit einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung eine Fläche dritter Ordnung durch die Schnittpunkte der Strahlen des ersten mit den entsprechenden Flächen des zweiten und durch die Schnittpunktegruppen der Ebenen des ersten mit den entsprechenden Raumcurven vierter Ordnung erster Art aus den Flächenpaaren des zweiten. Denn man zeigt leicht, dass beide identisch sind.

Die Fläche des einen Bündels, die dem Scheitelstrahl des andern entspricht, berührt das Erzeugniss in seinem Scheitel (§ 77) und [illegible] im allgemeinen Falle.

Bei der Erzeugung [illegible] scheln gilt analog das Ge[illegible] curve des einen Bü[illegible] derjenigen seiner F[illegible]



und wieder mit $\lambda_1''', \lambda_2''', \lambda_3'''$ gleichgebildeten Trinome. Man zerlegt sie nach ihren polynomischen Gliedern in ihre Summanden und findet, dass sie das Product der Entwickelung von

$$\mathbf{A}_4^2 \begin{vmatrix} \lambda_1', & \lambda_2', & \lambda_3' \\ \lambda_1'', & \lambda_2'', & \lambda_3'' \\ \lambda_1''', & \lambda_2''', & \lambda_3''' \end{vmatrix}$$

sei in die Summe

$$\mathbf{A}_1 \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \mathbf{B}_2, & b_2, & b_3, & b_4 \\ \mathbf{B}_3, & c_2, & c_3, & c_4 \\ \mathbf{B}_4, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix} + \mathbf{A}_2 \begin{vmatrix} a_1, & \mathbf{B}_1, & a_3, & a_4 \\ b_1, & \mathbf{B}_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & \mathbf{B}_3, & c_3, & c_4 \\ d_1, & \mathbf{B}_4, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ \mathbf{A}_3 \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \mathbf{B}_1, & a_4 \\ b_1, & b_2, & \mathbf{B}_2, & b_4 \\ c_1, & c_2, & \mathbf{B}_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & \mathbf{B}_4, & d_4 \end{vmatrix} + \mathbf{A}_4 \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \mathbf{B}_1 \\ b_1, & b_2, & b_3, & \mathbf{B}_2 \\ c_1, & c_2, & c_3, & \mathbf{B}_3 \\ d_1, & d_2, & d_3, & \mathbf{B}_4 \end{vmatrix},$$

und diese gleich Null gesetzt liefert daher den Ausdruck des Erzeugnisses. Für die $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{B}_i$ als Functionen von vier Veränderlichen x_i ist es die Gleichung einer Fläche von der Summe ihrer Grade als Ordnung aus den zweifach unendlich vielen Punkten in Tripeln des linearen Gebildes dritter Stufe $\mathbf{A}$, die der entsprechenden Fläche des Gebildes $\mathbf{B}$ angehören.

Man kann aber auch für die linearen Gebilde erster Stufe

$$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 = 0, \quad \mu_1 \mathbf{B}_1 + \mu_2 \mathbf{B}_2 = 0, \quad \nu_1 \mathbf{C}_1 + \nu_2 \mathbf{C}_2 = 0$$

die in den λ, μ, ν zugleich lineare Parameterrelation festsetzen

$$\{(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)\mu_1 + (a_1'\lambda_1 + a_2'\lambda_2)\mu_2\}\nu_2,$$
$$+ \{(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2)\mu_1 + (b_1'\lambda_1 + b_2'\lambda_2)\mu_2\}\nu_2 = 0.$$

Setzt man die Werthe von λ_2, μ_2, ν_2 aus den ersten drei Gleichungen in die letzte ein, so erhält man für das Erzeugniss den Ausdruck

$$\{(a_1\mathbf{A}_2 - a_2\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_2 - (a_1'\mathbf{A}_2 - a_2'\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1\}\mathbf{C}_2$$
$$- \{(b_1\mathbf{A}_2 - b_2\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_2 - (b_1'\mathbf{A}_2 - b_2'\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1\}\mathbf{C}_1 = 0.$$

Dasselbe ist für die $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ als lineare homogene Functionen der vier Veränderlichen X_i eine durch die Scheitelkanten der gegebenen Ebenenbüschel gehende Fläche dritter Ordnung. Ihre Punkte werden erhalten als Schnittpunkte der gemein-

samen Geraden von drei entsprechenden Ebenen der Büschel; die gewählte Schreibart — eine von drei gleichberechtigten — sagt uns aber, dass die Ebenenpaare der Büschel **A** und **B**, für welche das Verhältniss

$$\frac{(a_1\lambda_1 + a_1\lambda_2)\,\mu_1 + (a_1'\lambda_1 + a_2'\lambda_2)\,\mu_2}{(a_1\lambda_1 + b_2\lambda_2)\,\mu_1 + (b_1'\lambda_1 + b_2'\lambda_2)\,\mu_2}$$

einen constanten Werth k besitzt, derselben Ebene des Büschels **C** entsprechen, so dass die Strahlen der durch sie erzeugten Regelschaar oder das einfache Hyperboloid mit der Gleichung

$$(a_1\mathbf{A}_2 - a_2\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_2 - (a_1'\mathbf{A}_2 - a_2'\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1$$
$$= k\{(b_1\mathbf{A}_2 - b_2\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_2 - (b_1'\mathbf{A}_2 - b_2'\mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1\}$$

ihren Querschnitt in der Ebene $\mathbf{C}_1 - k\mathbf{C}_2 = 0$ auf der Fläche dritter Ordnung liefern.

Man sieht, die Fläche dritter Ordnung wird erzeugt aus einer linearen Congruenz und einem zu den Regelschaaren derselben projectivisch zugeordneten Ebenenbüschel. Analoges gilt für höhere Grade der $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$. Diese Erzeugung entspricht der einfachsten Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf der Ebene, die man etwa durch die Scheitelkante c des Büschels **C** legen wird; der Durchstosspunkt des bei der Erzeugung eines Punktes in ihr betheiligten Congruenzstrahles in der Bildebene ist das Bild jenes Punktes. Nach § 87 kann man die Scheitelkanten a, b der **A** und **B** als einander kreuzend aber die der **C** schneidend wählen. Dann sind die Durchstosspunkte von jenen in dieser zwei Fundamentalpunkte der Abbildung, da sie die Geraden der Fläche abbilden, die mit a, c resp. b, c ein Dreieck bilden; die vier Geraden der Fläche, welche a und b treffen, liefern die vier andern Fundamentalpunkte und die Geraden a, b erscheinen als Kegelschnitte, welche durch sie und den bezüglichen Durchstosspunkt (von a oder b) gehen. Für Flächen höherer Ordnungen ergiebt sich eine Mehrheit entsprechender Erzeugungen.

Bei den Flächen zweiten Grades lieferte die projectivische Verbindung reeller linearer Gebilde erster Stufe nur die Regelflächen, die der reellen linearen Gebilde zweiter Stufe dagegen alle reellen Flächen zweiten Grades; und die Theorie des Polarsystems zeigte uns, dass das Ineinanderliegen von Pol und Polarebene als von Punkt und Ebene weder reelle Punkte

noch reelle Ebenen liefern muss, oder dass es die rein imaginären Flächen zweiten Grades mit umfasst.

Wir wollen desshalb hier erwähnen, dass die Erzeugung der algebraischen Flächen aus reciproken Bündeln und die Definition aus ihren Polarsystemen allgemein möglich ist; also z. B. die Construction der Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung durch die nothwendige Anzahl ihrer Punkte mittels eines Strahlenbündels und eines dazu reciproken Bündels von Flächen der Ordnung n; und die projectivische Zuordnung der Punkte des Raumes zu den Flächen eines linearen Gebildes dritter Stufe, die ihre ersten Polarflächen in Bezug auf eine Fläche $(n+1)^{ter}$ Ordnung sind, so dass diese als der Ort derjenigen Pole erscheint, die in ihren Polarflächen liegen und als die Enveloppe der zugehörigen Tangentialebenen derselben.

Die Durchführung alles dessen sowie die Ausdehnung auf Strahlencoordinaten liegt ausserhalb des hier gesteckten Zieles. Die Erläuterung der Specialitäten bei Projectivitäten mit singulären Elementen (vergl. § 82, 8) empfehlen wir dem Leser.

Endlich sind bei der Untersuchung der Projectivität oder der linearen Beziehungen solche vom zweiten und dritten Grade hervorgetreten, bei denen zwar einem Element im Allgemeinen, jedoch nicht ausnahmslos wie bei den linearen, ein Element entspricht, während aus dem linearen Elementargebilde ein Gebilde zweiten oder dritten Grades hervorgeht. In der Theorie der reciproken Radien (vergl. I, § (36^d)) haben wir bereits in den Elementen ein Beispiel einer solchen Beziehung oder Verwandtschaft kennen gelernt und sind demselben weiterhin vielfach begegnet; im letzten Abschnitt fanden wir Beispiele allgemeinerer Art in § 70, 1, 3; § 72; § 75 nebst Beisp. und in den §§ 83, 85 und soeben p. 638. Die allgemeine Untersuchung solcher Beziehungen — man bezeichnet dieselben als birationale Transformationen — gehört somit auch zu den Erweiterungen, auf welche hier hinzuweisen ist.

Manche unter ihnen sind wie z. B. die reciproken Radien involutorisch und man kann nach der fundamentalen Bedeutung der Involution in den bisherigen Untersuchungen erwarten, dass dieselben auch im allgemeinen Fall von hervorragender Wichtigkeit sein werden.

Quellen- und Literatur-Nachweisungen.

§ 2, p. 5 f. Von den Mengen der Elemente in den Elementargebilden hat zuerst v. Staudt in seinem Werke „Beiträge zur Geometrie der Lage" (1856—60) § 8, p. 86 f. gehandelt. Doch weicht seine Zählung von der des Textes ab durch die Ersetzung von n durch $n+1$; wenn sie auch etwa als die um den unendlich fernen Punkt vermehrte Zahl der endlich entfernten Punkte der Geraden gedeutet werden kann, so ist doch eine solche Scheidung unter dem Gesichtspunkt der Projection ohne Zweck.

§ 3, p. 13 f. Dem Poncelet'schen Princip der Polar-Reciprocität (in Bezug auf Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades) „Théorie générale des polaires réciproques" Bd. 4 des „Journal für Math." (1829, jedoch von 1824 und zum Theil schon in Gergonne's „Annales" Bd. 8, 1818) stellte Gergonne in Wetteifer und Streit das fundamentale Princip der Dualität so zu sagen mehr philosophisch gegenüber und es gelang dem in den Streit verwickelten Plücker die umfassende Begründung desselben (1830) durch die Einführung von Punkt und Gerade als gleichberechtigte Elemente in der Ebene und von Punkt und Ebene im Raum. Die für die Coordinaten beider symmetrischen Gestalten der Incidenzbedingung von Punkt und Gerade in der Ebene, Ebene und Gerade im Bündel und von Punkt und Ebene im Raum, wie von zwei Geraden im Raum — §§ 17, 22, 26 des Textes — bilden den Beweis. Möbius hatte im „Barycentr. Calcul" (1827) den Haupttheil der Entdeckung vorausgenommen durch vollständige Behandlung der Collineation und Reciprocität und durch den Schluss seines klassischen Werks § 286; „Werke" I, p. 373. In Steiner's „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geom. Gestalten" (1832) „Werke" I, vergl. p. 234 f., erscheinen dieselben Gedanken mehr organisch und systematisch und nochmals hat wohl Chasles sie selbständig erfasst. Vergl. dessen „Aperçu historique" (1837).

§ 4, p. 14 f. Dass der Satz von den perspectivischen Dreiecken von Desargues ist, findet sich in I, Note zu § 19, 11, p. 361 schon angemerkt. Für die harmonischen Gruppen vergl. v. Staudt „Geometrie der Lage" (1847) § 8, p. 43 f.

§ 4, p. 18 und § 8, p. 36 heben die fundamentale Stellung der Involution in der Entwickelung hervor. Vergl. I, § 20, 14 und die zugehörige Note p. 361. Auf die Doppelverhältniss-Gleichheiten der Involution ist im Text kein Gewicht gelegt; man erhält sie leicht. Für AA_1, BB_1, CC_1 als drei reelle Paare ist nach dem Begriff der Involution $(BCAA_1) = (B_1C_1A_1A)$ (vergl. § 41, 2) und zwei analoge Gleichungen, also auch $\frac{BA}{CA} : \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{B_1A_1}{C_1A_1} : \frac{B_1A}{C_1A}$ u. s. w. Und ebenso ist $(BCA_1B_1) = (B_1C_1AB)$ etc. $-BA_1 \cdot CB_1 \cdot C_1A = B_1A \cdot C_1B \cdot CA_1$ und $(B_1CA_1B) = (BC_1AB_1)$ oder $-B_1A_1 \cdot CB \cdot C_1A = BA \cdot C_1B_1 \cdot CA_1$, etc. — die Gleichungen der Involution von sechs Elementen. Setzt man für B, B_1 das Doppelelement G, so entspringen aus ihnen die Gleichungen der Involution

von fünf Elementen, etc. Diese Relationen hat schon Desargues (vgl. 1, Noten p. 361 zu § 20 und p. 363 zu § 32); die constructive Durchbildung des Textes hier und in Bd. I war neu zu schaffen.

§ 5, p. 20. Vergl. v. Staudt „Geometrie der Lage" § 9, Nr. 106. Dazu die Note von F. Klein in Bd. 7 der „Mathem. Annalen" p. 530 f. und anderes bis zu G. Darboux' Mittheilung in Bd. 17, p. 55 und der von Schur Bd. 18, p. 252 derselben. Von Darboux stammt die Art und Weise der Erledigung der Schwierigkeit für das Irrationale oder Unendlichkleine p. 23.

§§ 9—13, p. 39 f. Die Lehre von den imaginären Elementen begründete v. Staudt in seinen „Beiträge". Er handelt in § 7 von ihnen und bestimmt sofort in § 8 auch ihre Menge; § 10 giebt den Begriff reell projectivischer Elementargebilde, vergl. noch § 12. In §§ 15, 16 („Beiträge" II, 1857) wurde die Lehre vom Sinn, von den Ketten und Würfen begründet. Diese Untersuchungen haben erst spät die gebührende Aufmerksamkeit gefunden; man vergl. die analytische Darstellung von Stolz in Bd. 4 der „Mathemat. Annalen" p. 416 (1871), das Programm der Friedrichs-Realschule zu Berlin (1872) von F. August und die Abhandlung von Lüroth „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen" in Bd. 8 der „Mathemat. Annalen" p. 145—214.

p. 43 f. Der Nachweis von der Verbindung und dem Unterschied der geometrischen Imaginären mit den algebraischen und ihrer Darstellung in der Zahlenebene nach Argand-Gauss ist hier zuerst gegeben worden. Die Lehre vom Imaginären in der „Cyklographie" ist im Wesentlichen identisch mit der v. Staudt's. Die Bestimmung der vier imaginären Elemente durch Strecke, Linienwinkel, Flächenwinkel und windschiefes Flächenelement p. 56 ist neu. Vielleicht wird man die darstellend geometrische Entwickelung des Ganzen pädagogisch befriedigend finden.

p. 67. Für die Projection mit imaginären Bestimmungselementen vergl. man Wiener's Werk „Darstellende Geometrie" (1885—87) und die Schrift von Beyel „Geometrische Studien" (1886).

§§ 14—24, p. 69 f. Die Hauptmomente dieser Entwickelung veröffentlichte ich zuerst in der „Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellsch. zu Zürich" Bd. 15, p. 152 f. Man vergleiche für die Grundidee v. Staudt's „Beiträge" § 29, p. 261—267. Algebraisch sind die barycentrischen Coordinaten von Möbius (1827) von den projectivischen Linliencoordinaten nicht verschieden; ebenso die Dreieckscoordinaten von Plücker „Journal für Math." Bd. 5 (1829). Vieles was ich in meinen Vorlesungen anzuknüpfen gewohnt war — wie die Distanzbestimmung, die Veränderung der Coordinaten nach Grösse und Zeichen mit der Bewegung des Elementes im Elementargebilde zweiter und dritter Stufe, die Beispiele von den Elementen aus permutierten Coordinaten, von denen mit reciproken Coordinaten, von der Verwandtschaft der Harmonikalen, von den regulären Coordinaten, den Streifen-, Keil- und prismatischen Coordinaten — konnte erst in dieser erweiterten 3. Auflage mitgetheilt werden; manches davon ist noch jetzt neu.

Zu § 18 sei genannt Jacobi's „Theoria analytica generalis projectionis centralis" in seiner Abhandlung „De transformatione integralis duplicis indefinitis .." im 8. Bd. des „Journal für Math." p. 338—341.

Denkt man die Umlegung der Ebene sq' in die Tafel (I, § 11, Fig. 15) mit dem Centrum $\mathfrak{C}$ und dem Hauptfluchtpunkt H und construieren wir wie dort (P) aus P' mittelst der Falllinie HP', so wird für $\mathfrak{C}$ als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten mit $\mathfrak{C}H = e$ und als Axe der x, mit b als der Bildbreite der Ebene sq' (I, § 5)

$$x' : x = \mathfrak{C}P' : \mathfrak{C}P$$

oder $$x' : x - x' = \mathfrak{C}P' : P'P = \mathfrak{C}H : PS = e : (x + b - e)$$

oder $$x' : x = e : x + b, \quad x' = ex : x + b.$$

Ebenso $y' = ey : x + b$ und umgekehrt

$$x = bx' : e - x', \quad y = by' : e - x'.$$

Vergl. § 81.

§ 18, 5. Die Lehre vom geometrischen Netz aus vier Punkten der Ebene und fünf Punkten im Raum findet man zuerst in Möbius' Werk „Der barycentrische Calcul" (1827) — jetzt „A. F. Möbius Gesammelte Werke" Bd. I, p. 237—265. Die harmonische Gruppenbildung v. Staudt's ist die auf die Elementargebilde erster Stufe reducirte Form derselben.

§ 22. Der zweite Beweis der Incidenzbedingung für Punkt und Ebene auf p. 119 ward zuerst in der italienischen Ausgabe des Werkes mitgetheilt. Der dritte p. 120 f. ist nach einem von Culmann 1870 mir ausgesprochenen Grundgedanken gebildet. Für die Summe und für das Product von zwei Würfen p. 121 vergl. man v. Staudt's „Beiträge" §§ 19, 20 oder Nr. 258 und 268.

§ 23, 9. Die Elementengruppen aus permutierten Coordinaten haben eine weitreichende Verwendung gefunden in der Abhandlung von Veronese „Interprétation geométrique de la théorie des substitutions de n lettres en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique". Siehe „Annali di Matematica" Bd. 11 (1883) p. 93—236.

§ 24, 12. Die Bezeichnung „Sinus der Ecke" rührt von v. Staudt her; der Satz über das Tetraedervolumen von Euler „Novi Comment. Petrop." 4, p. 158. Vergl. Möbius Statik § 63, jetzt „Werke" III, p. 88.

§ 24, 13 f. Eine analoge Entwickelung ward mir neuestens von Cand. math. Gerlach mitgetheilt; er hat auf diesem Wege auch die Abhängigkeit der Strahlencoordinaten von den Maassen des Fundamentalsystems abgeleitet.

§ 25, p. 142 f. Als erste Anwendung der sechs homogenen Coordinaten der Geraden im Raum ist zu nennen die Abhandlung von A. Cayley „On a new analytical Representation of Curves in Space" in Bd. 3 und 5 des „Quarterly Journal of Math." p. 225 (1859) und p. 81 resp. Dieselben erscheinen darin als Abkürzungen für die häufigst vorkommenden Ausdrücke, aber mit der sie verbindenden identischen Relation.

Allgemein bekannt sind die sechs Coordinaten eines Strahles durch die grosse Abhandlung von Plücker geworden „On a new Geometry of Space" im Bd. 155 (1865) der „Philosoph. Transactions" von London, p. 725 und durch sein von F. Klein herausgegebenes Werk „Neue Geometrie des Raumes" (Leipzig 1868—69). Sie sind darin geometrisch, aber auf Grundlage der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten — also wesentlich wie § 26 — entwickelt, also nicht in homogener und daher minder gedächtnissmässiger Form. Die geometrische Entwickelung der homogenen Coordinaten des Strahls, aus der auch die volle geometrische Durchsichtigkeit ihrer Transformation sich ergiebt — § 63 — ward bisher nicht dargestellt, ich gab sie zuerst in meinen Züricher Vorlesungen seit 1869.

Für weitere Studien vergleiche man besonders die Abhandlungen von A. Cayley „On the six Coordinates of a Line" in Bd. 11, 2 der „Transactions of the Cambridge Philos. Society" (1868) und die von A. Clebsch und F. Klein in den ersten Bänden der „Mathem. Annalen", sowie von Voss, Bd. 9 und 10 derselben Sammlung. Man vergl. die Darstellung in Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie des Raumes" 1. Theil, 3. Aufl., Kap. IX, §§ 239—241 und 2. Theil, 3. Aufl., Kap. V, §§ 181—189 und Kap. VII, §§ 362—389.

§ 25, 3 vergl. § 37, 3. Ich erhielt den Beweis des Satzes zuerst in der letzten Form und leitete daraus den Beweis hier ab. Der Satz findet sich zuerst in v. Staudt's „Beiträge" (1856) § 2 Nr. 35; er ist die Grundlage für den Begriff des tetraedralen oder Reye'schen Complexes.

§ 26, 2. Für die Auffassung der Coordinaten als Momente vergl.

man Zeuthen's Abhandlung in Bd. 1 der „Mathemat. Annalen" p. 432 f. (1869).

§ 27. Die hier gegebene Ableitung der identischen nicht homogenen Relation der Coordinaten ξ_i stimmt im Wesentlichen mit der von Kronecker in Bd. 72 des „Journal für Math." in „Bemerkungen zur Determinantentheorie" gegebenen überein (1870) p. 161; für die der Strahlencoordinaten vergl. man Zeuthen's vorher citirte Abhandlung.

§ 28, 8 und § 16, 2. Steiner hat die Beziehung der Punkte mit direct reciproken Coordinaten in der Form der Brennpunkte eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnittes behandelt; vergl. die Abhandl. „Werke" I, p. 189, besonders Nr. 7 f., wo durch Anwendung der Methoden der Projection eine Reihe interessanter Resultate abgeleitet sind.

Die circulare Curve vierter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten, die die unendlich ferne Gerade doppelt berührt in 11 ibid., hat Steiner in der berühmten Abhandlung „Werke" II, p. 641 f. (1856) behandelt.

§ 29, p. 180. Für die algebraische Entwickelung der beschränkten Systeme von Gleichungen an der Hand der geometrischen Vorstellungen vergl. man Salmon-Fiedler „Analyt. Geometrie des Raumes" 3. Aufl., II. Theil, § 438 f.—455.

§ 30, p. 195. Siehe die Abhandlung von G. Königs in „Annales de l'École normale sup." t. XI der 2. Serie p. 219 f. und neuestens die Note von H. Bourget in „Comptes rendus" 1887, erstes Sem., p. 1253.

§ 30, 3, p. 197. Vergl. die Abhandlung von Corr. Segre im 97. Bd. des „Journal für Math." p. 95 f.

§ 34, p. 216. Die Einführung eines Parameters und den Begriff des Curvenbüschels mit n^2 Grundpunkten hat man wohl auf Gabr. Lamé's „Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie" 1818 (p. 28) zurückzuführen. Die Entwickelung des Parameterbegriffs zu dem Coordinatenbegriff verdankt man vor Allem Plücker.

§ 35, p. 228. Die Methode der abgekürzten Berührung erscheint zuerst in Plücker's „Analytisch geometrische Entwickelungen" 1. Theil, 1828; fast gleichzeitig (Gergonne's „Annales" t. XVIII, p. 320) hatte sie Bobillier auf die einfachsten Fälle angewandt. Plücker hat sie vollständig entwickelt.

§ 35, 8. Die Definition der Potenzcoordinaten gab Darboux in einer Abhandlung in „Annales de l'École normale sup." t. I, 1872; es scheint aber, dass Clifford sie schon 1868 entwickelt und angewandt hat („Mathematical Papers by W. K. Clifford". London 1882, p. 332 f. Vergl. auch p. 546). Umfassende Entwickelungen gaben in letzter Zeit Reye, Segre, Loria, Lachlan.

§ 36, B. Diese Bestimmung des neunten Durchschnittspunktes von zwei Curven dritter Ordnung aus den acht übrigen hat A. S. Hart neuestens angegeben „Hermathena" XIII, p. 286 f.

§ 37. Diese Ableitung der Bedeutung des Parameters im linearen Elementargebilde erster Stufe ist in diesem Werke zuerst gegeben worden.

§ 42, 5. Zu den Involutionscurven vergl. man Emil Weyr's Note in Bd. 72, p. 285 des „Journal für Math."

§ 43. Die Theorie der Curven auf dem einfachen Hyperboloid entsprang aus Plücker's Abhandlung in Bd. 36 des „Journal für Math." (1847) p. 341. Das einfache Classificationsgesetz gehört Cayley und Chasles, vergleiche die fast gleichzeitigen Arbeiten von Cayley in Bd. 22, p. 35 des „Philosophical Magazine" (1861) und Chasles in „Comptes rendus" Bd. 53 (1861) p. 985.

Zu B. 5 vergl. man Seydewitz „Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene" (1846) p. 80, 13.

§ 44. Die Erzeugung der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und der allgemeinen Curven dritter Ordnung aus projectivischen Involutionen habe ich in Weiterführung einer von mir in der 2. Aufl.

von G. Salmón's „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" gegebenen Bemerkung (p. 355, 397; jetzt in der 5. Aufl. p. 521 f., 535) früh in Züricher Vorlesungen gegeben. Sie wurden dann Gegenstand der schönen Untersuchungen von Schröter, Durège und Clebsch, die man in den „Mathemat. Annalen" Bd. 5 u. f. findet. Hier erscheinen sie in ihrem ursprünglichen Zusammenhange mit der Untersuchung der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und mit den bezüglichen Schliessungsproblemen. Vergl. §§ 52—56.

§ 45. Man vergl. die Abhandlungen von Goebel und ihre Erweiterung von Schröter in Bd. 36, p. 317 und Bd. 54, p. 31 des „Journal für Math." „Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde"; neuerlich von Milinowski in „Zeitschrift für Math. und Physik" von Schlömilch von 1873. Dazu die Behandlung der Regelflächen dritten Grades in Bd. II dieses Werkes, § 60. Die Steiner'sche Hypocycloide (Note zu § 28) entsteht aus der projectivischen Zuordnung der Punkte eines Kreises zu den Richtungen der Ebene; den Rückkehrpunkten entsprechen die Richtungen der zugehörigen berührenden Durchmesser. Die analytische Gestaltung der Parametermethode der Beisp. 3 f. von § 46 gab Hesse in „Vier Vorlesungen a. d. analyt. Geometrie", vergl. Bretschneider's Dissertation (Erlangen 1875) „Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten".

§§ 47 f. ist die Ausführung des Beisp. 9 von § 165 in der 2. Aufl. dieses Werkes. Vergl. die Abhandlung von Zeuthen in Bd. 18 der „Mathem. Annalen"; insbesondere (1875) für weiteres Studium seine Cyklentheorie p. 51 f. und ibid. Bd. 26, p. 347, sowie die anschliessende Abhandlung von Voss.

W. R. Hamilton 1852 „Lectures on Quaternions" Append. p. 720 f., Cayley 1853 f. in Bd. 7 und 8, p. 326, 208 des „Philosoph. Magazine" und Townsend in Bd. 9 des „Quarterly Journ. of Math." begründeten die Behandlung dieser Fragen; letztere besonders die der zugehörigen Flächensysteme zweiten Grades.

§ 50, p. 316. Für die Construction algebraischer Curven dritter und vierter Ordnung aus bestimmenden Punkten vgl. man E. de Jonquières Schrift „Essai sur la génération des courbes géométriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre". Paris 1858.

§ 50, 1 f. Man sehe J. Steiner's „Gesamm. Werke" Bd. 2, p. 487 (1852) und vergleiche Pelz „Ueber das Problem der Glanzpunkte" in den „Sitzungsberichten der k. Ak. d. W. in Wien" Bd. 64, p. 730, sowie Schröter's Behandlung in Bd. 6, p. 85 der „Mathem. Annalen".

§ 51, p. 323. Zu Maclaurin's Theorie der correspondierenden Punkte der Curve dritter Ordnung sehe man Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven" (2. Aufl. Leipzig 1882) p. 152 f.

§ 53, p. 333. In ganz anderer Entwickelung erscheint die Gerade m' in der Abhandlung von Schröter in Bd. 5 der „Mathem. Annalen".

§ 53, 2, p. 339. Die Classification der Curven dritter Ordnung ist eingehend behandelt in dem unter § 51 genannten Werke, §§ 200 f.

§§ 54 f., p. 341, 348, 354. Die Vierergruppen der einfachen Hyperboloide eines Büschels finden sich, jedoch ohne die Auffassung als Involution vierten Grades und mit der irrigen Aufstellung von nur vier sich selbst entsprechenden Flächen unter ihnen, in der Abhandlung von Milinowski „Zur Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Art" in Bd. 97 des „Journal für Math." p. 294 f. Die Bildung der Involution § 56 und der Gedanke vom Nachweis von Involutionen höherer Grade unter den Flächen des Büschels zur rein construierenden Ableitung der Steiner'schen Schliessungssätze, gehören mir an. Aber ich unterlasse nicht, anzumerken, dass mein Assistent Dr. Disteli im Verfolg einer Diplomarbeit über die darstellend geometrische Behandlung der Raumcurve vierter Ordnung erster Art zu der Methode der Auslese mittelst

der Regelflächen vierten Grades aus Bisekanten, welche zwei Gegenkanten des Quadrupels schneiden, selbständig gelangt ist. Es ist ihm dann auch gelungen, an Hand derselben Methode die Steiner'schen Probleme in ihrem ganzen Umfang zu erledigen und ihre darstellend geometrische Durchführung zu erhalten; seine Ausführung erscheint zugleich mit diesem Buche; die dem § 56 beigegebene Tafel gehört derselben an und im zugehörigen Text habe ich meine Entwickelung durch eine eng an die seinige anschliessende ersetzt, um in das Studium seiner Schrift überzuleiten, die — man vergleiche die Vorrede des 2. Bandes, p. XI f. — als die Ausführung meines alten Programms mich besonders erfreut.

p. 358. Die Sätze über die Ableitung aller Gruppen aus einer gab zuerst Clebsch in seiner schönen Abhandlung im 63. Bd. des „Journal f. Math." p. 16. Trotz ihres umfassenden Inhalts hat sie — wie man z. B. aus der Anmerk. 24 im 2. Bd. von J. Steiner's „Gesamm. Werke" p. 739 sehen kann — der geometrischen Ausführung noch Manches aufzuklären übrig gelassen.

p. 362. Den Fällen der Degeneration entsprechen Möbius'sche Involutionen — vergl. „Werke" II, p. 390, Zusatz.

§§ 57, 59, p. 363, 381. Für die Theorie der Polargebilde siehe in geometrischer Entwickelung Cremona's „Introduzione", deutsch von Curtze als „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen" (Berlin 1870) 2. Theil, p. 61 f. — in analytischer meine deutschen Ausgaben von G. Salmon's Werken über analytische Geometrie, besonders „Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven" p. 62, 68, 73 f.

p. 383 f. Diese darstellend geometrische Ableitung der Polarcurven gab zuerst Rodenberg in Bd. 26 der „Mathemat. Annalen" p. 552 f.

p. 387, 10. Vergl. J. Steiner's Sätze 12. I in „Werke" II, p. 489. Es ist die darstellend geometrische Behandlung der Durchdringung von zwei Kegeln, welche dieselbe ebene Curve dritter Ordnung projicieren, also ein Specialfall von § 59, 9.

Neuestens haben Schoute und Zeuthen im „Bulletin" Darboux' Bd. 10, 11 auf das Steiner'sche Problem Bezügliches veröffentlicht.

§ 60, p. 390 f. Die Ableitungen der Plücker'schen Gleichungen auf dem Wege geometrischer Construction sind von meinen ehemaligen Assistenten Prof. A. Beck (Riga) — vergl. Bd. 14 von „Mathemat. Annalen" p. 207 f. — und Prof. J. Hemmig (Zürich) angegeben worden. Es ist klar, dass mit ihnen auch die Relationen zwischen den Charakterzahlen (§ 2) der „algebraischen Raumcurven" in II, § 22 f. begründet sind, wie dies vielleicht im Text auf p. 392 hätte angemerkt werden sollen.

§ 61 p. 401. Vergl. Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. des Raumes" 3. Aufl. Bd. 2, Literatur-Zusätze S. LX. Seitdem hat diese Frage eine ausführliche Behandlung gefunden in der Abhandlung von A. Voss „Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen" Bd. 27 und besonders Bd. 30 von „Mathemat. Annalen", letzteres p. 228.

§ 62. Diese Ableitung der Coordinatengleichungen der Projectivität gab ich im Zusammenhang mit der Entwickelung meiner projectivischen Coordinaten seit 1869 in meinen Züricher Vorlesungen. Man vergleiche die Darstellung von Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes" p. 72 f. und p. 120 f. oder die auf die Ebene beschränkte in Salmon-Fiedler's „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" 5. Aufl. §§ 88 f. Die allgemeine Bestimmung durch die geometrische Deutung der Substitutionscoefficienten war neu in diesem Buche. Vergl. „Vierteljahrschrift der Zürcher Naturf. Gesellsch." Bd. 16 (1871).

§ 63, p. 415. Die allgemeine Coordinatentransformation ward in der vorher citierten kurzen Note zuerst gegeben, sogleich aber auch von meinem damaligen Assistenten Prof. J. Hemmig in der Form von S. 416 f.

direct abgeleitet; Bd. 16 der obengenannten „Vierteljahrschrift" p. 41 f. Auf ihre rechnerische Durchführung S. 420 f. kam ich mit Beispielen zurück a. a. O. in Bd. 24. Unter diesen Beispielen war die Behandlung des Hyperboloids aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln und orthogonalen Ebenenpaaren § 63, 2 — die unendlich vielen Erzeugungen der ersten Art waren bis dahin unbekannt — und die Ableitung der metrischen Grundformeln des § 64, p. 426 f.

§§ 65 f. Für die Algebra der linearen Substitutionen in Rücksicht auf Geometrie vergleiche man die Salmon-Fiedler'schen Lehrbücher, besonders die „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transf." 2. Aufl. und „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" (5. Aufl.) Kap. 18—21.

§ 69, p. 462 f. Die Erweiterung der Polarentheorie von Punkten auf Curven etc. ist zuerst von Clifford (1868) „Mathematical Papers" (1882) p. 115 f. gegeben; dann von Reye in den Abhandlungen der Bde. 72 u. 78 des „Journal f. Math." (1870, 1874) entwickelt worden; vergl. auch dessen Abhandlungen in Bd. 77, 79, 82 a. a. O.

§ 70, p. 472 f. Die constructive Behandlung der Specialfälle der Collineation vereinigter Ebenen ist neu. Für Beisp. 4) sehe man Reye's „Geometrie der Lage" 2. Abthlg. (2. Aufl. p. 204). Das Ergebniss in 7) fand eine Anwendung in Burmester's Abhandlung „Über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe" in Bd. 22 des „Civil-Ingenieur".

§ 72, p. 488 f. Vergl. Magnus „Aufgaben und Lehrsätze" Bd. I, p. 60 f. — Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. der Kegelschnitte", jetzt 5. Aufl. § 396 f. — Schröter im „Journal f. Math." Bd. 77, p. 105—112. Die hier veröffentlichte Darstellung gab ich in meinen Vorlesungen vor dem Erscheinen der Schröter'schen Arbeit. Siehe § 83.

§ 73, p. 498 f. Die Erläuterung der vier Polarsysteme aus derselben Reciprocität ist neu. Für die Polar-Reciprocität vergl. man auch Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" 5. Aufl. §§ 399—414.

§ 74, p. 513. Ein gutes Beispiel für die projectische Verallgemeinerung metrischer Relationen, die hierin enthalten ist, bietet der Fundamentalsatz der schiefen Axonometrie in Bd. I, § 61, der schon dort p. 339 als Specialfall der Collineation bezeichnet worden ist. Weil Aehnlichkeit ebener Systeme Collineation mit entsprechenden Kreispunkten ist, so ist der besagte Satz, nach welchem die Parallelprojection von vier Punkten $ABCO$ des Raumes einem gegebenen Viereck $A'B'C'O'$ ähnlich werden kann, dem folgenden äquivalent: Vier Punkte $ABCO$ lassen sich aus einem Punkte S einer gegebenen Ebene $\mathbf{U}$ so auf eine zu suchende Ebene $\mathbf{E}$ projicieren, dass für die Collineation ihrer Bilder mit dem gegebenen System $A'B'C'O'$ in der Ebene $\mathbf{E}'$ auch den Schnittpunkten von $\mathbf{E}'$ mit einem festen Kegelschnitt K in $\mathbf{U}$ die Schnittpunkte von $\mathbf{E}$ mit demselben Kegelschnitt entsprechen.

In dieser projectivischen Form ist der Satz direct bewiesen worden von F. Schur in Bd. 25 der „Mathem. Annalen" p. 596 f.

§ 75, p. 513 f. Vergl. v. Staudt's „Beiträge" (1856) § 13, Nr. 182 f. und dazu vorbereitend § 21 der „Geometrie der Lage" oder Nr. 284 f.

§ 76, p. 526. Die Lehre von den linearen Gebilden zweiter Stufe aus Polarsystemen ist ausführlich synthetisch behandelt in Schröter's „Theorie der Kegelschnitte" vergl. 2. Aufl. p. 476.

B. 3) Der Kegel der Schnittlinien rechtwinkliger Ebenenpaare durch zwei Gerade und der der Verbindungsebenen rechtwinkliger Strahlenpaare in zwei Ebenen finden sich bei J. Steiner (1827) (der erste vorher bei Hachette) vergleiche „Werke" I, p. 117 Anm., die Erweiterung auf einfache Hyperboloide ibid. p. 383—395. Chasles (1836) und Schröter (1878) haben besonders den ersten weiter untersucht. Die unendlich vielen Erzeugungen aus gleichwinkligen Büscheln habe ich 1879 zuerst nachgewiesen (§ 63, 2).

Dass die Axen und die Ebenen zweier rechtwinkligen Coordinaten-

systeme von demselben Anfangspunkt sechs Mantellinien und respective sechs Tangentialebenen eines Kegels zweiter Ordnung resp. Classe sind, ist unter Steiner's Aufg. und Lehrsätzen „Werke" I, p. 452 — mit Betonung der allgemeineren Sätze. (Vergl. hier II, § 37, 19f.) Für Q_1', Q_2' als Fluchtpunkte der gegebenen Strahlen bei der Construction des ersten Kegels und q_{1N}', q_{2N}' als die Fluchtlinien ihrer Normalebenen bilden die Verbindungsgeraden von einem Punkt A' des Spurkegelschnittes mit jenen die Schnittpunkte einer Tangente a_N' der Spur des zweiten Kegels in diesen; zugleich bilden sie mit derselben ein Tripel orthogonaler Strahlen und Ebenen, so dass das zweite Paar der besonderen Kegel mit dem ersten durch die Darstellung verbunden erscheint. Der Tangente a' des ersten Kegelschnittes in A' entspricht der Fluchtpunkt der Normalen A_n' als Berührungspunkt von a_N' am zweiten Kegelschnitt.

§ 77, p. 528. Vergl. Seydewitz im „Archiv f. Math. und Physik" Bd. 9, p. 158f. Die Erzeugung der Specialformen aus den singulären Reciprocitäten p. 532f. war neu in diesem Werke.

B. 3) Die Rotationsflächen zweiten Grades aus gleichen reciproken Bündeln behandelte Schönflies in einer Abhandlung in Bd. 99 des „Journal f. Mathem." p. 195f.

§ 78, p. 536. Vergl. Seydewitz im „Archiv f. Math. und Physik" Bd. 10, p. 203f. und v. Staudt „Beiträge" (1860) p. 298. — Dazu die Anmerk. zu § 21 in Bd. II, p. 546. Das erste Vorkommen der Developpabeln dritter Classe mit ihrer Grundeigenschaft von p. 541 ist in Möbius' „Barycentr. Calcul" (1827) „Werke" I, §§ 96, 98 bes. p. 121. Dann Steiner (1832) „Werke" I, p. 441.

§ 79, p. 545. Der Identitätsbeweis ist zuerst im 56. Bd. des „Journal f. Math." p. 27 von Schröter gegeben worden, vergl. seine „Theorie der Oberflächen" etc. (1880) p. 265f.; es ist der dual entsprechende zu dem unseres Textes. Der Satz von der Lage des Schnittpunktes der Schmiegungsebenen in der Ebene ihrer Curvenpunkte ist von Chasles „Comptes rendus" Bd. 45, p. 189 (1857).

B. 2) Vergl. Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. des Raumes" II (3. Aufl. 1880) § 99f.

B. 3) Vergl. die Sätze von Cremona in „Comptes rendus" Bd. 54 (1862) p. 604 und die Abhandlungen von S. Dino und E. d'Ovidio im „Giornale di Matem." von Battaglini Bd. 3, p. 100 (1865).

§ 80, p. 560. Der Ausdruck Affinität und diese Construction und Erklärung derselben ist von Euler „Introductio in Anal. Infinit." Bd. 2, Kap. 18, Art. 442.

p. 561. Man vergl. Magnus „Lehrsätze und Aufg. a. d. analyt. Geom. des Raumes" Bd. 2, p. 90, jedoch auch R. Baltzer's Programm des Dresdener Kreuz-Gymnasiums von 1852, p. 35 Anm.

p. 562. Ueber Sinngleichheit und Sinngegensatz in collinearen Räumen handelte neuestens Hauck in „Zeitschrift für Mathem. und Physik" Bd. 21 und 24, p. 407f. und 381f.; früher H. J. St. Smith in der gehaltvollen Abhandlung „On the Focal Properties of Homographic Figures", „Proceedings of the London Math. Soc." Bd. 2, p. 196—248, speciell p. 234 (1869). Für uns ist das Bezügliche durch die Betrachtungen genügend erledigt, die bei der Construction der projectivischen Coordinaten durchgeführt wurden. Die genannte Abhandlung lässt es bedauern, dass ein lange angekündigtes Buch desselben Autors über die Geometrie nicht zur Veröffentlichung gekommen ist.

p. 564. Man sehe Mittheilungen von Chasles in „Comptes rendus" von 1843, 1860, 1861.

§ 81, 11f. Man vergleiche die vorher genannte Abhandlung von Smith und die neuerliche Darstellung von R. Sturm in Bd. 28 p. 261—268 der „Mathemat. Annalen".

§ 82, 6 f. Die berühmte Frage Nr. 15) im Anhang der „Systemat. Entwickelung" von J. Steiner, als deren Lösung er fälschlich eine Fläche erwartete und für die auch in der Ausgabe der „Werke" I, p. 442 und p. 527 eine unzureichende Lösung angegeben ist, tritt so mit den bezeichneten Elementaraufgaben in eine Reihe.

§ 82, 8 f. Zu den singulären Projectivitäten führten mich die Grenzfälle des Projectionsprozesses, vergl. die 2. Aufl. dieses Buches; um dieselbe Zeit handelte von ihnen T. A. Hirst in einer Abhandlung in den „Proceedings of the London Math. Soc." Bd. 5, p. 40 f., welcher in Bd. 6, 7, 8 interessante Fortsetzungen gefolgt sind.

§ 83, p. 590—596. Vergl. die Abh. von Schröter in Bd. 77 des „Journal f. Math." p. 121 f. Die hier gegebene Darstellung hatte ich schon vor dieser Veröffentlichung in meinen Vorlesungen und zum Theil auch in der 2. Aufl. von Salmon-Fiedler „Analyt. Geometrie des Raumes" Bd. 1, Anmerk. 8 und 3. Aufl. von „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte" p. 546 mitgetheilt. Sie weicht von derjenigen Schröter's in einem wesentlichen Punkt ab und lehrt das Tetraeder der involutorischen Elemente direct zu construieren, um daraus die beiden als Polar- und Polfläche bezeichneten Flächen zweiten Grades abzuleiten. Das von den letzteren die eine mittelst der andern linear in sich selbst transformiert wird, ist evident; vergl. § 48. Dadurch hängt die Untersuchung zusammen mit den Arbeiten von Hermite, Cayley und Rosanes im „Journal für Math." Bd. 47, p. 307; Bd. 50, p. 288 und Bd. 80, p. 52.

Für das Gesammtgebiet der Collineation und Reciprocität der Elementargebilde der drei Stufen empfehle ich zum Studium besonders noch die gehaltvollen Arbeiten von R. Sturm, die in den Bänden 1, p. 533; 6, p. 513; 10, p. 117; 12, p. 254; 19, p. 461; 22, p. 569; 26, p. 465; 28, p. 268 veröffentlicht sind.

§ 84. Ueber die Fläche zweiten Grades als Ordnungsfläche des räumlichen Polarsystems siehe vor Allem v. Staudt „Geometrie der Lage" § 25, p. 196.

§ 84, p. 601 f. Vergl. die ausführliche Darstellung in Schröter's „Theorie der Oberflächen" etc. § 56.

§ 84, 7. Für die Entwickelung dieser metrischen Beziehungen siehe §§ 58—60 des vorher citierten Werkes.

§ 85, p. 607. Man vergl. Townsend's Abhandlung im 3. Bd. des „Cambridge and Dublin Mathem. Journal" p. 1, 97, 148; die Focalpunkte als die Fläche doppelt berührende Nullkugeln, die Directrixen als ihre Berührungssehnen. Ausführlich ist die Theorie entwickelt in Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. des Raumes" Bd. 1, Kap. 8, p. 184—246. Die Verbindung der Focalkegelschnitte mit den reellen Kreisschnittebenen liefert die metrischen Erzeugungen der Flächen zweiten Grades von Salmon und von Mac-Cullagh. Für einen Focalpunkt der zu den cyklischen Ebenen normalen Hauptebene und die zugehörige Directrix ist das Verhältniss constant, in welchem das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Flächenpunktes von jenem zum Product seiner Entfernungen von den Kreisschnittparallelen durch diese steht (Salmon 1842); für einen Focalpunkt der anderen Hauptebenen und die zugehörige Directrix ist das Verhältniss constant, in welchem die Entfernung eines beliebigen Flächenpunktes von jenem zu der parallel einer cyklischen Ebene gemessenen von dieser steht. (Mac-Cullagh 1836; jetzt „Collected Works", 1880; p. 260—317.)

§ 86, p. 612 f. Man vergl. Möbius „Lehrbuch der Statik" Bd. 1, §§ 69, 84 f. und seine Abhandlung in Bd. 10 des „Journal f. Math." p. 317—341 (1833); jetzt „Werke" Bd. 3 und Bd. 1, p. 489. v. Staudt nahm den von Möbius eingeführten Namen an, siehe seine „Beiträge" (1856) § 5, Nr. 92 f. Ueber Tetraeder, die einander gleichzeitig ein- und umgeschrieben

sind, handelte Möbius schon 1828 im 3. Bd. des „Journal für Math.", „Werke" Bd. 1, p. 441 f.

§ 86, p. 618. Vergl. des Verfassers Abhandlung „Ueber Geometrie und Geomechanik" in Bd. 21 der „Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturforsch. Gesellschaft" p. 186—228 und ihre Uebersetzung im „Journal de Mathém." von 1878 p. 141 f.

§ 86, 2. Vergl. die seit 1872 wiederholt aufgelegte Schrift von Cremona „Le figure reciproche nella statica grafica" (Milano).

§ 86, 4. Vergl. Reye's „Geometrie der Lage" 2. Aufl. der 2. Abthlg. (1882) p. 103.

§ 86, 5f. Für diese Beziehungen vergl. man Magnus' „Sammlung von Aufg. und Lehrsätzen aus der analyt. Geom. des Raumes" (1837) p. 144 f. und Chasles' Note 30 über die reciproken Curven und Flächen von Monge im „Aperçu historique" (1837), p. 405 der Uebersetzung von Sohnke. Dazu neuestens die gleichzeitigen Entwickelungen von G. Hauck in Bd. 31 der „Zeitschrift f. Math. u. Phys." und von C. Segre im Bd. 25 des „Giornale di Matemat."

§ 86, 9. Die ausgesprochenen Sätze sind zuerst von Schönemann in „Monatsberichte der k. Akad. v. Berlin" von 1855 (p. 255 f.) mitgetheilt worden; um 1868 hat sie Mannheim in seiner „Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable" in Bd. 20 des „Recueil des Mém. des savants étrangers" neu entwickelt.

§ 87. Zu den Flächen dritter Ordnung mögen ausser Salmon-Cayley's (1849), Sylvester's (1852) und Steiner's (1853) (siehe „Werke" II, p. 654) die 27 Geraden, das Pentaeder und die projectivischen Erzeugungen betreffenden grundlegenden Abhandlungen aus der schon umfangreichen Literatur der Flächen dritten Grades noch empfohlen werden die Abhandlungen von Schröter, Clebsch und Cremona „Journal für Math." Bd. 62, p. 265; Bd. 65, p. 359 f. und Bd. 68 resp. und die Werke von R. Sturm „Synthet. Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung" (Leipzig 1867) und von Reye „Geometrie der Lage" 2. Abth. 2. Aufl., Vortrag 24 und 26. Man vergleiche auch Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie des Raumes" Bd. 2 (3. Aufl. 1880) Kap. V; für die Lehre von der eindeutigen punktweisen Abbildung der Flächen ebenda Kap. VIII.

§ 88. Die für die Lehre von den Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung grundlegende Abhandlung von Hesse Bd. 49 des „Journal für Math." p. 243, 279 (1855) — zwischen beiden Theilen steht J. Steiner's Abhandlung „Werke" II, p. 605 f., die 1853 im Auszug der Akademie von Paris vorgelegt wurde — verbindet dieselben mit der Anschauung des Bündels von Flächen zweiter Ordnung; R. Sturm hat dies in seiner Abhandlung in Bd. 70 desselben Journals p. 212 f., spec. p. 224, 229 besonders klar dargestellt. Aronhold hatte zuerst (1864, „Monatsberichte der k. Akad. von Berlin" p. 499 f.) die sämmtlichen Doppeltangenten als linear abhängig von sieben unter ihnen erkannt, wie diess nun aus jener Anschauung hervorgeht. Man vergl. für diese Theorie Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven" (2. Aufl. 1882) § 264 f. und die schöne analytische Darstellung von Frobenius in Bd. 99, p. 275 f. (1886) des „Journal für Math."

Es sei erwähnt, dass die 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung auch aus der Centralprojection der Fläche dritter Ordnung aus einem ihrer Punkte hervorgehen; die Bilder der 27 Geraden der Fläche und die Spur ihrer Tangentialebene im Projectionscentrum sind die Doppeltangenten ihrer Umrisscurve vierter Ordnung — wie diess von Geiser in Bd. 1 der „Mathemat. Annalen" p. 129 f. ausgeführt ist.

Zu § 88, p. 632 f. Vergl. die Abhandlung von Reye in Bd. 86 des „Journal für Math." p. 84 f.

Die Abbildung der Fläche dritter Ordnung p. 639 kann als Steiner'sche hyperboloidische Projection derselben bezeichnet werden, nach den Entwickelungen Steiner's in „Systematische Entwickelung" etc. unter Nr. 59 f., jetzt „Werke" I, p. 407 f. Eine lineare Congruenz von Strahlen wird zunächst von zwei beliebigen Ebenen in Punktsystemen geschnitten, deren jedes als Abbildung des andern erscheint. Den Geraden der einen Ebene entsprechen als Spuren der durch sie mit den Axen der Congruenz bestimmten Hyperboloide (daher der gebrauchte Name) Kegelschnitte der andern, die durch drei feste Punkte gehen. Sie wird auch von zwei beliebigen Punkten durch Ebenenbündel projiciert, die in der dual entsprechenden Beziehung stehen.

Zu der allgemeinen Construction der Flächen $(n+1)^{ter}$ Ordnung aus collinearen Bündeln p. 635 vergleiche man besonders die Abhandlungen von Reye in Bd. 1, p. 455 und von Schur in Bd. 23, p. 437 der „Mathemat. Annalen". Die Bestimmung der algebraischen Flächen durch die Construction ihrer Polarsysteme wurde ausgeführt von Thieme in der „Zeitschrift f. Mathem. u. Physik" Bd. 24, p. 221 und 276 f. und ferner insbesondere für die Flächen dritter Ordnung in Bd. 28, p. 133 der „Mathemat. Annalen." Ein Abriss dieser Entwickelungen würde das Programm meines Buches überschreiten.

Die birationalen oder Cremona'schen Transformationen für Ebene und Raum sind in Salmon-Fiedler's „Anal. Geom. der höheren ebenen Curven" und „Analytische Geometrie des Raumes" Bd. 2 eingehend behandelt und die bezügliche Literatur ist daselbst verzeichnet; die involutorischen unter ihnen sind für die Ebene besonders in Arbeiten von Bertini und noch ungedruckt auch für den Raum von Wyss behandelt worden.

Alphabetisches Sachenregister
für den dritten Theil.

Die Zahlen bestimmen die Seiten des Buches; die gesperrt gedruckten Worte gelten immer auch für die durch — mit ihrem Satze verbundenen nachfolgenden Anführungen.

Abbildung der Flächen zweiten Grades auf einander und auf sich selbst 291 f., 297 f. — aus der Erzeugung 531, 536 — affin geschaarte 577 f. — cyklographische der Curve vierter Ordnung erster Art 347 — der Fläche dritter Ordnung aus der Erzeugung 623 f, 625 f., 628 f., 630, 639 — der Kugel, stereographische 45 f. **Absolute** Developpable 210 — Richtung 94, 168, 175, 252, 254, 474 f., 568 — Stellung 184, 562. **Absolutes** 252, 426 f., 485 f. **Abstand** von Punkt und Ebene 130 — von Punkt und Gerade 93, 430 f. Adjungiertes System 133, 309, 409 f. **Aehnlichkeit** der Räume 560 f., 587 — ebener Systeme 474. **Affinität** der Räume 559 f., 581, 587 — speciell geschaarte 577 — ebener Systeme 414, 472 f. Algebraische Zahl als Bestimmungsmittel 68. Anschmiegungspunkt 546, 548. Antipol und Antipolare 507, 600. Apolarität von Curven 463. Asymptoten der Curve dritter Ordnung 325, 332, 547. Asymptotenkegel der Fläche zweiten Grades 184, 534. Auflösung linearer Gleichungen 98, 132, 212 f. **Axe** des Nullsystems 613, 616 — der Schraubung des starren Systems 564 f. **Axen** der Involution 253 — der geschaarten 576 — der sphärischen Kegelschnitte 523 — des Polarsystems 500, 592, 598 f. — des schiefen Kreiskegels 527 f. — des hyperbolischen Paraboloids 567 f. — der Curven und Flächen zweiten Grades 433 f.

Bedeutung (geometrische) der Coefficienten der linearen Substitution 411 f. — der Coefficienten der Parametergleichung der Projectivität 244 — des Parameters im Büschel von Curven oder Flächen 397 f. — im Büschel von Flächen zweiten Grades 369 — im linearen Elementargebilde erster Stufe 236 f. — homogener Gleichungen mit reellen Coefficienten 161 f., 203. Bedingung für die Strahlen des Bündels, der Ebene, des Büschels 150. Berührungsknoten 314. Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche zweiten Grades 529. Bestimmungselemente von Curven und Flächen 211. Bestimmung der Gleichung einer Curve, etc. aus den Bestimmungselementen 212. **Bewegung** der Elemente harmonischer Gruppen 20 — der Ebene in sich 476 — des starren Systems 563, 618, 622. **Bewegungssinn** bei der elliptischen Involution 40 — des Doppelelements derselben 41 — in imaginären Gebilden 64 f. Bild der Curve dritter Ordnung als Kegelschnitt 559. **Brennpunkte** der Kegelschnitte 209, 258, 449, 522; speciell eingeschriebener als Punkte mit reciproken Coordinaten 84, 171 — der Kegelschnittschaar 319 — des Polarsystems 508, 518 — des sphärischen Kegelschnittes 524 — der bicircularen Curve vierter Ordnung 346, 349. **Bündel** von Ebenen 116 — von Strahlen 150 — collineare 481 f.,

536 f., 628, 632 f. — reciproke 496 f., 528 f. — von Flächen und Curven 635 f., 637 f. — von Projectivitäten 627, 633 f. Büschel collinearer Bündel bei der Curve dritter Ordnung 549 — (von Strahlen-) projectivisch gleiche 248, vereinigte über projectivischen Reihen 251 — (von Strahlen und Ebenen) entsprechende gleiche in collinearen Bündeln 481 f., in collinearen Räumen 580 f. — von Collineationen aus zwei 487 — von Curven und Flächen 217 — von Flächen zweiten Grades 326 f. — von linearen Complexen 221 f. — von Polarsystemen 525 f. Büschelschaar von Kegelschnitten 219 — von Flächen zweiten Grades, speciell orthogonaler Hyperboloide 426.

Centra der Kreise im Dreieck 76, 82 — der Kugeln im Tetraeder 113 — der sphärischen Kegelschnitte 523. Centralprojection der Flächen zweiten Grades aus einem Punkt 265, zur Herstellung von Collineationen auf ihr 293, 295 f. Centralaxe der Bewegung 564. Centrum der Collineation 469, 471, 571, 574, 575 f. — der Drehung 476 — der Involution 574. Charaktere der Curven und Developpablen 6 f. Charakteristik vereinigter projectivischer Gebilde erster Stufe 38, 249, 252 — der centrischen Collineation 572, 574. Classe einer Curve 7, 164 — einer Fläche 178. Classification der Curven auf dem einfachen Hyperboloid 267 f. Collineation der Bündel, concentrischer 481 f., mit selbstentsprechendem Scheitelstrahl 542, mit selbstentsprechender Ebene 543 — der Elementargebilde zweiter und dritter Stufe 9, 12 f., 403 f., 465 f., 556 f., 632 f., 634, axiale 568 f., centrische 11, 13, 571 f., 573 f., 585, geschaarte 570 f., 576, 585, involutorische 574 f. — der Punkte (und Ebenen) auf der Fläche zweiten Grades 291, 294 f., 297 f. — involutorische, der gemeinsamen Curve und Developpablen von zwei Flächen zweiten Grades 215. Collineationen mit demselben Complex 583 f. Collineationsebene 573 f. Complex, linearer 192, speciell Axencomplex 155 f., 192, aus fünf Geraden 199 f., 621, des Nullsystems 613 f., n^{ten} Grades 192 f. — tetraedraler 196 f., 567, 580 f., 582 f. — der doppelt conjugierten Geraden 584 f. 593, 604 — von Flächen zweiten Grades 585, speciell confocalen 586, 607 f. und harmonischer 587 — von Sekanten der Raumkurve vierter Ordnung erster Art 455 — von constantem Moment 196 f. Complexcurve, ebene 192, 584 — Complexkegel 192, 455, 584, 586. Complexpolygone und Polyeder, insbesondere Curven und Developpable 617 f. Complexe Zahlen in geometrischer Darstellung 44 f. Conchoide 291. Congruenz der ebenen Systeme 475 f. — der Räume 562 f. — grösster polarer Dreiecke 500, 513, polarer Tetraeder 598 — von Strahlen 193, totale und partielle 193 — aus den F.-Geraden 196 — der Biseckanten der Curve dritter Ordnung 536 f., 543 f., 567, 571 — der Bitangenten der Developpablen dritter Classe 540 — der Geraden mit entsprechend gleichen Reihen oder Büscheln in collinearen Räumen 581 — der Verbindung entsprechender Punkte der Collineation auf dem Hyperboloid 298 — entsprechender Punkte der Kernflächen einer Fläche 401 — lineare 199, 222 f., 542 f., 544, 578 — von constanten Momenten 197 f. Connex 200 f., 312 f., 326, 379. Construction der projectivischen Elementargebilde aus bestimmenden Paaren 10, 12, 26 f., 28 f., 466 f., 556 f., 560, 569 — der Elemente aus ihren Coordinaten und Gleichungen 88, 106, 122, 147, in linearen Gebilden aus Curven 230 — der entsprechenden Elemente reciproker Räume 595 f. — der Gleichungen 202 f. — der Polaren eines Punktes für eine Curve 383 f. — der projicierenden Biseckante der Curve dritter Ordnung 539, der Curven vierter Ordnung erster Art 518 — der Schraubung zwischen zwei Lagen des starren Systems 565 f. — des Nullsystems 613, 615, 620 f. — des Polarsystems, in der Ebene 501 f., 505 f.; im Raume 600 f.; ihrer gemeinsamen Elemente zu zwei und drei 517 f., der Viererinvolution im Flächenbüschel zweiten

Grades und ihrer sechs Doppelflächen 350 f., 354 f. — vom neunten Schnittpunkt zweier Curven dritter Ordnung 234 f. — von Curven dritter Ordnung 316 f. — von Curven vierter Ordnung 317. Constructionen mit imaginären Elementen 47 f., 49 f., 62 f. — von Raumcurven dritter Ordnung 545. Contravariante 432, des Kegelschnittbüschels 440. Coordinaten des Elements in den Elementargebilden erster Stufe 69 f., 99 f., zweiter Stufe 72 f., 135 f., dritter Stufe 102 f. — des Elements im linearen Gebilde aus Curven 226 — des Strahles 142 f. — specielle 76, 89 f., 91 f., 95, 107 f., 109, 123 f., 125 f., 127 f., 129, 131, 150 f., 175, 258, 449, 568. Coordinatengeometrie 68. Coordinatengleichungen der Projectivität 246, 408 f., 413 f. Correspondenz, algebraische in linearen Elementargebilden erster Stufe 250 f., 556 — der Punktepaare in der Curve dritter Ordnung 319, 323, 333, 342, 403, 526 f. Covariante 432, 460 — des Kegelschnittbüschels 440 — des Flächenbüschels vom zweiten Grade 453, 455 f. Curve ebene und doppeltgekrümmte 162 f., 179 f., 633 f., 635 — dritter Ordnung, ebene 169, 176, 227 f., 263, 277, 312 f., 315 f., 318 f., 331 f., 335 f., 337, 339, 350, 395, 449, 480, 526 f.; gewundene 266, 268, 283, 371, 537 f., 545 f., 548, 551, 567, 569, 571, 582, 620 f., 623 f. — vierter Ordnung etc., ebene 169 f., 172, 176, 228, 233 f., 266, 272, 274, 277, 282 f., 312 f., 314 f., 320, 326, 329, 345, 548; gewundene 266, 268, 275, 286 f., 316, 379, 551 f. — von Cayley 404, 406; von Hesse, Steiner siehe Kerncurven, Cykliden 376.

Darstellung der elliptischen Involution 41 f., 43 f., 56 — der imaginären Elemente 204 f., 206 f. — geometrische, des windschiefen Flächenelements 195. Determinante 96 f., 132 f. — der linearen Substitution 409 f. Developpable 179 f., 190, 360, 455 f., 540, 545, 546 f., 553, 567, 569, 571, 582, 633. Directrixen der Focalpunkte bei Flächen zweiten Grades 609 f. — des Kegelschnitts 209. Directrixkegelschnitte und Flächen zweiten Grades 502 f., 596 f., 601 f. Discriminante 303 f., 366 f., 393 f., 442. Distanz 71 f., 76 f., 107 f., 160, 430 f., 513. Doppelcurven 376, 455, 523, 553. Doppelelemente der algebraischen Correspondenz 250 f., der Collineation 467 f., 481 f., 556 f., 570 f., 573, der Involution 37, 253, 442, 527, 574, 576, 595, der Projectivität 249, 251, 270, 594. Doppelflächen 330, 347, 350, 359, 452. Doppelinflexionsknoten 170, 173. Doppelpunkt 7, 375. Doppelt conjugiert 478 f., 492 f., 514 f., 519 f., 592 f., 595, 604. Doppelsechs von Geraden der Fläche dritter Ordnung 626. Doppeltangente 7, 548. Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung 631 f. Doppelverhältnisse 30, 147, 239 f., 241 f., 252, 254, 257, 335, 349, 394, 571, 583, 584 f. 586 f. — als Constructionsbedingung für Kegelschnitte etc., Hyperboloide und Curven dritter Ordnung und tetraedrale Complexe 587 f. Dreiecke und Dreiseite, perspectivische 14 f. Dreikante, orthogonale entsprechende 482 f., 487. Dualität 11, 13 f., 59, 92, 155, 299, 306, 334, 372, 375, 383 f., 545, 555, 557. Durchdringung 179 f., 267, 326 f., 339 f., 355, 451 f. Durchmesser von Polarsystemen 500, des Nullsytems 616.

Ebenen, cyklische collinearer Bündel 486, im Polarbündel 521 — doppeltberührende osculierende und stationäre einer Raumcurve 6 f., 551, 554 — an drei Flächen 180 f., 557 — durch drei Punkte 131, 133, 136 — durch Punkte der Gruppe mit permutierten Coordinaten 221. Einheitelemente der Coordinaten 69 f., 75, 88, 105, 122. Elementargebilde der verschiedenen Stufen 4 f., 9, 68, 72 f., 102 f., 236, 408 f., 463 f., 556 f. Elemente, imaginäre 3, 38, aus der Gleichung 203 f., behandelt durch Involution 34 — conjugierte, Punkte, Ebenen und Gerade erster Art 39 f., Gerade zweiter Art 50 f., 53 f., 578, der Regelflächen zweiten Grades 55. Elemente, singuläre einer Curve 7. Elemente mit per-

mutierten Coordinaten 95, 113 f., mit reciproken Coordinaten 84, 115 f., mit theilweis gleichen Coordinaten 109 — ungleichartige mit denselben Coordinaten 84, 93, 115, 130, 507 — rationale und irrationale 7, 22 f. Elementenpaare 200 f., gemeinsame von Involutionen 262, von vereinigten Projectivitäten 271 f., speciell auf der Fläche zweiter Ordnung 299 — involutorisch entsprechende in reciproken Elementargebilden zweiter und dritter Stufe 490 f., 591 f. Ellipse und Ellipsoid, imaginäre 504, 600. Erzeugnisse der Correspondenz (m, n) 277, speciell involutorischer Flächenbüschel 407 — die Projectivität zwischen Elementargebilden 256 f., 264 f. und ihren Erzeugnissen 279 f., 549 f., zwischen Erzeugnissen projectivischer Elementargebilde 285 f., 289 f., 549 f., 555 — collinearer Ebenen und Bündel 536 f., 545, 632 f. — collinearer Räume 633 f. — projectivischer Curven- und Flächenbüschel 406, speciell zweiten Grades 312, 325, 328 f., 373 f., 377 f., des Büschels und der Schaar aus zwei solchen 448 f., 453 f. — projectivischer Involutionen, auch auf Kegelschnitten 272, 274 f., 276 f., 342 f., 347 f., 397 — linearer Gebilde erster Stufe 277 f., 311 f. — reciproker Elementargebilde zweiter Stufe 528 f., 530 f., 533, 536, 601 f., allgemeiner linearer 635 f. — dritter Stufe 589 f., 591 f., 593 f., 636 f., 639.

Fläche, algebraische n^{ter} Ordnung respective Classe 177 f. — zweiter Ordnung 181 f., 184, 209 f., 214 f., 215 f., 224, 372, 528 f., 530 f., 532 f., 534 f., 598 f., 603 f. — dritter Ordnung respective Classe 185 f., 196, 374 f., 395, 459, 622 f., 629 — vierter Ordnung respective Classe 376, 395 f. (Steiner'sche), 634. Flächenbüschel zweiten Grades 217 f., zugleich Schaar 220 f., 336, 340 f., 398, 455, 551 f., 555, 605. Flächenschaar der Confocalen 586 f., 607 f., 609 f. — Flächengebilde, lineare, zweiter etc. Stufe 224 f., 457 f., 459 f. Flächenelement, windschiefes 194 f., 222. Flächeninhalt des Dreiecks 97. Focalcurven 513, 608 f., 610 f. Focalebenen und Punkte in der Collineation 485 f., in einer Congruenz 195. Focalgerade 486, 521 f. Focalkegelschnitte 210, 608 f., 611. Form, geometrische 202. Fundamental-Elemente der Coordinaten 69 f., 72, 104 — Punkte der Abbildung 265, 536, 625 f. — Steiner'scher Vierseite in der Curve dritter Ordnung 357 f.

Gebiet von k Dimensionen 226. Gebilde, lineare verschiedener Stufen 217 f., 222 f., 224 f., 227 f., 230, 232 f., 233, 306, 630 f., 633 f. — contravariante bei Curven und Flächen zweiten Grades 447, 451 — projectivische vereinigte 249, auf Flächen zweiten Grades 291 f. Gegenaxen 471 f. Gegenebenen 414, 567, 573 f., 575. Gegenpunkte 248, 415, 496, 598. Geometrie der Lage und darstellende, elementare, projectivische 3, 38, 203. Gerade aus vier linearen Complexen 156 — conjugiert rein imaginäre 58, in einer Fläche zweiten Grades 210, 373, 452, 530 — conjugiert in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades 510, in Bezug auf ein Nullsystem 614 f., 616 f. — der scheinbaren Doppelpunkte des Bildes der Curve vierter Ordnung erster Art 333, 518 — ihre Durchstosspunkte und projicierenden Ebenen im F.-Tetraeder 143 f., 149 f., 151 f. — in einer krummen Fläche 178 f., 373, 374 f., 376 f., der Fläche dritter Ordnung 624 f. — involutorisch entsprechende der Reciprocität 595 — mit derselben Polinvolution in zwei Polarsystemen 514 f. Geschlecht einer Curve 234. Glanz- und Reflexpunkte auf den Kegelschnitten einer Schaar 318. Gleichung des Punktes (als Büschel) und der Geraden 71, 85, 87 f. — der Ebene und des Punktes (als Bündel) 116, 122 — der Geraden als Complex 155. Gleichungen, homogene mit zwei, drei, vier und sechs Veränderlichen 161; 162 f., 463; 177; 191 f.; mit verschiedenen Reihen von Veränderlichen 200 f., 312 f. — von Curven dritter Ordnung 228 f., 395 f. Grundcurve, respective Grundpunkte etc. 217, 221, 225, 234 f., 372, 440, 611; Grundregelschaar 225.

Grad der Congruenz, der Regelfläche, des Complexes 194. Gruppen der Elemente im Gebilde erster Stufe 162 — der Elemente mit numerisch gleichen Coordinaten 82 f., 111 f., 114, 123, 137, 148 f., 152 — der Elemente mit permutierten Coordinaten 83, 95 f., 113 f., 123, 130 f., 138, 215 f., 222 f. — der gemeinsamen Elemente von Curven, Kegeln, Flächen, Complexen 164, 180, 194 — der Viererinvolution im Flächenbüschel zweiten Grades 330, 347 f., speciell ihrer Doppelflächen 359 — der F.-Punkte Steiner'scher Vierseite in der Curve dritter Ordnung 358. Gültigkeit der fundamentalen Constructionen für die imaginären Elemente 58 f.

Harmonikale im Dreieck 79, 176 f., 548; und Elemente von reciproken Coordinaten 177. Harmonikalebene im Tetraeder 108. Harmonische Centra 382 f., 384, 398. Harmonische Gruppen 19, 22, 37, 89, 239, 241 f. — bei Schein- und Schnittbildung 21. Harmonisches Paar zu zwei gegebenen im Elementargebilde erster Stufe 20. Harmonizante von zwei Curven 462 f. Hauptaxen und Ebenen der Fläche zweiten Grades 370 f. — des Polarsystems 500, 521, 598 f. Hauptdreieck und Dreikant vereinigter collinearer Elementargebilde zweiter Stufe 467, 482, reciproker Bündel 498. Hauptkreis des Kegelschnittes 449. Hauptangenten der algebraischen Flächen 402. Hauptetraeder der collinearen Räume 556 f., 584 f. Hilfswinkel bei Kegelschnitten 310. Hyperbeln, gleichseitige der Ebene 225. Hyperboloide, einfache 182, 185, 208, 242, 264 f., 423 f., 436 f., 556 f., 567, 581 f., 602. Hypocycloide, dreispitzige 174, 176.

Identität gleichartiger projectivischer Elementargebilde und perspectivische Lage 9 f., 13, 24 — der Flächen zweiter Ordnung und Classe 365, 531 — der Tangentenfläche der Curve dritter Ordnung mit der Developpablen dritter Classe 545 f., 548 f. Imaginär conjugierte Paare 39, 42. Imaginäres der Algebra und der Geometrie 44 f. Incidenz imaginärer Elemente 25, 47 — reeller Elemente 71, 85, 91, 119 f., 124, 126, 128 f., 154 f. Inflexionspunkte der Curven dritter Ordnung 325, 405 — der Curven n^{ter} Ordnung 402. Invarianten 432, der Flächen zweiten Grades 433, 450 f., 456 f., ihrer Hauptaxentransformation 435 — des Kegelschnittbüschels 438 f., 444 f. — der Berührung zwischen Curven etc. 461. Invariantenkriterien für gleichseitige Hyperbel, Kreis und Parabel 449. Invariantenrelation zwischen Kegelschnitten 447. Inversion 176, 188. Involution 18, 35 f., 39 (Correctur), 218, 223, 225, 230, 239, 253 mit Zusatz, 261 f., 268, 270, 276 f. — auf der Fläche zweiten Grades 292, 294, 297 f. — im Strahlenbündel 487 — in collinearen Räumen, centrisch und geschaart 572, 574, 575 f., 619 f. — der Fläche zweiten Grades mit sich selbst 578 — in der Reciprocität 490 etc. siehe Polarsystem — in der Regelschaar 268, 270, 272 f., 332, 341, 620 — unter den Flächen zweiten Grades im Büschel mit allgemeiner Grundcurve 330, 340 f., 347; bei Grundcurven mit ein und zwei Doppelpunkten 361 f. Involutionen, lineare 574 f., im Strahlenraum 618 f. Jacobi'sche Curve respective Fläche von drei Kegelschnitten 457, 459, 526 — von drei Flächen 459 f. — von vier Flächen zweiten Grades 457 f.

Kegel zweiten Grades 32 f., concyklische und confokale 525, im Flächenbüschel zweiter Ordnung 333, 367 f., specielle Arten 527 — n^{ter} Ordnung oder Classe 163. Kegelschnitt durch verschiedene Bestimmungselemente 32 f., 164 f., 166 f., 213 f., 215, 219 f., 224, 242, 248 f., 256 f., 258, 310, als Polarsystem 505 f., speciell imaginäre Ellipse 504 — und Curvenbüschel 229, 263, mit Involution n^{ten} Grades 261 f. Kegelschnitte, concentrische 441, 444 — in doppelter und dreipunktiger Berührung 219 f., 263, 270 — sphärische 523 f., 608, ihre cyklischen

Bögen 524. Kegelschnittbüschel 229, 304 f., 311 f., 313 f. Kegelschnittnetz 312, aus der Collineation ebener Systeme 476, 479 f., 481. Kegelschnittschaar 349. Keilcoordinaten 126 f. Kerncurven und Kernflächen 400 f., 633, bei der Curve dritter Ordnung 403, 406. Kette von Elementen 64. Kinematik und Statik (graphische) 618. Kräfte- und Seilpolygon 620. Kreis 175, 428 — absoluter 159 f., 184. Kreisbüschel 449. Kreise der Ebene 225. Kreisschnitte der Kegel und Flächen zweiten Grades 521, 577. Kreisverwandtschaft 520. Kugel 159, 161, 184, 216, 535. Kugelbüschel, projectivische 376. Kugelcomplex 231 f., 385. Kugelcongruenz 231. Kugeln des Raumes 225.

Lage, harmonische von zwei Kegelschnitten 447 — perspectivische von affinen, ähnlichen und congruenten ebenen Systemen 478, 562, von collinearen Bündeln 483, 522, 544, collinearen Räumen 10, 13, 578 f., 582 — von imaginären Elementen 46 — von reell projectivischen Elementargebilden erster Stufe 25. Lagenänderung des Elements mit seinen Coordinaten 80 f., 110 f. Lemniscate 170, 176, 290. Linie, geodätische der Fläche zweiten Grades 611. Linien, gerade der Fläche dritter Ordnung 628 f. Linienpaare als Kegelschnitte 257, 311 — im Kegelschnittbüschel 304.

Mannichfaltigkeiten, geometrische 203. Methode, graphische und analytische 1, 2. Metrik 38 — als Inbegriff der invarianten Beziehungen zum Absoluten 439, 449, 451 — der Centralprojection 512 f. — der collinearen Bündel und Räume 418, 482 f., 484 f., 579 f. — der Polarsysteme 503 f., 518 — im Nullsystem 613, 616, 621. Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades 370, 433 — des Polarsystems 500, 598 — der Reciprocität 415 — des Nullsystems 613. Mittelpunktsort der Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades im Büschel 305, 372 — der Polarsysteme der Schaar 606. Moment zweier Geraden 154. Momentcentrum 476.

Netz der harmonischen Gruppen 94, 138, 167. Normale, gemeinsame, zweier Geraden 153. Normalenparaboloide des confocalen Systems 609. Normalform der Bewegung 564 — der Gleichung der Ebene 126, 130 — der Fläche zweiten Grades 183, 442 f. — der Geraden 87, 90, 93 — des Kegelschnittes 307, 442 f. Nullkugel 512. Nullebene und Nullpunkt 615. Nullsystem 549, 611 f., 619 und Polarreciprocität 621.

Ordnung einer Curve 7, 164. Ordnungsfläche siehe Directrix. Orthogonalität von confocalen Flächen zweiten Grades 609 — von Ebenen 139 — von Geraden 93, 428, 430 — von Kugeln 231 f. Orthogonalsystem im Bündel 512 f., 521 f. Orthogonalkreis eines Kegelschnittes 209. Orthogonalkreise eines Kreises 225. Orthogonalkugeln zu zwei Kugeln 225. Oval von Cartesius 346 f.

Paar, gemeinsames von zwei Involutionen 37, auf der Fläche zweiten Grades 299. Paare, gemeinsame von zwei Paaren vereinigter projectivischer Elementargebilde 270 f., auf der Fläche zweiten Grades 299. Parabel 166. Parabolische Curve der Fläche 402. Paraboloide, confocale 609 — im Flächenbüschel zweiten Grades 372 — im Nullsystem 616, 621. Parallelebenen durch zwei Gerade 153. Parallelismus von Ebenen 139 — von Geraden 93. Parameter 100, 227, als Theilverhältniss 101 f., 236, 305. Parameterdarstellung 135, 226 f., 240, 259 f., 265, 304 f., 309 f., 551 f. Parametergleichung der Projectivität der Elementargebilde 243 f., 247, 250, linearer Gebilde zweiter und dritter Stufe 415. Perspectivität der Polardreiecke bei Kegelschnitten 309, 506, 510 — von Büscheln der Flächen zweiten Grades respective der Kegelschnitte 314, 377 — und Projectivität 8 f. Polare eines Punktes 37,

301, 307, 349, 364, 381 f., 384 f., 403 f., 504, 593, 610 f., als Covariante 460, eines Punktes der Curve oder Fläche 387 f., einer Curve 461 f. Polarcomplex 385. Polardreiecke 498 f. Polaren- und Polarebenenbüschel 248; 301, 305, 368. Polarflächen und Polarkegelschnitte zu Flächen und Curven zweiten Grades 305, 450, 456, 535 — sowie Polflächen und -Kegelschnitte der Reciprocität 489 f., 491 f., 589 f., 592. Polarreciprocität 496 f., 596 f. Polarsystem 499 f., 501 f., 507 f., 509, 511, 522 f., 596, 599 f., 602 f., 639. Polarsysteme 513 f., 518, 520 f., 525, 603—610. Polartetraeder 597. Pole, conjugierte 305, 371. Polvierecke und -vierseite 446. Polygone, Poncelet'sche auf Flächen zweiten Grades 296 f. — Steiner'sche bei Curven dritter und vierter Ordnung 352 f. Potenz und Potenzcoordinaten 232. Product von Würfen 121. Projection 4, 63 f., 208, 266, 268, 274, 326, 363. Projectivität 3, 8 f., 24, 240 f., 243 f., 246, 248, 255 f., 269, 273, 278 f., 291, 306, 311 f., 331, 333, 369 f., 377, 399, 408, 415, 448 f., 453 f., 551 f., 605 f., 622—640; imaginäre 67, singuläre 545, 588. Proportionalität der Strahlencoordinaten 145. Punkte, singuläre 6 f., 169 f., 172 — mit derselben Polarinvolution in vereinigten Polarsystemen 514 f.

Quadrupel harmonischer Pole in Flächenbüschel und Schaar zweiten Grades 333, 338 f., 344, 368 f. — involutorisch entsprechender Elemente der Reciprocität 590 f.

Radicalaxe 176 f. Radien, reciproke 176, 188 f. Rang einer Curve 7. Raum von vier Dimensionen 119, 142, 635. Raumansicht, perspectivische 3. Realität der gemeinsamen Elemente vereinigter Polarsysteme 516, 604 — der Hauptelemente collinearer Ebenen und Räume 467, 470, 558 f. — der involutorischen Elemente reciproker Bündel, Ebenen und Räume 49, 497 f., 596 — von Elementen bei imaginären Curven und Flächen zweiten Grades 378, 500 f., 507 f., 598, 600. Rechtwinkelpaare und Tripel, entsprechende 247, 482 f., 579. Reciprocität der Elementargebilde 9, 12, 410, 413 f., 488 f., 497 f., 528 f., 533 f., 589 f. — linearer Gebilde aus Curven und Flächen 636 f. — nach Punkt und Harmonikalebene im Quadrupel beim Flächenbüschel zweiten Grades 360. Regelflächen vierten Grades aus Bisekanten des Quadrupels und der Grundcurve im Flächenbüschel zweiten Grades 354 f. — aus projectivischen Involutionen 272 — aus projectivischen Kegelschnitten etc. 286 f., 550 f., 555 f. Regelschaar, hyperboloidische und paraboloidische 32 f., 193, 199, 264, 268 f., 272 f., 289, 371, 453, 566, 569, 571, 577, 581 f., 593, 609, 615. Relation, bilineare 245 f., 256 — der Ebenen-, Punkt- und Strahlencoordinaten zu den Maassen des F.-Systems 156 f., 160 f., 426 f. — identische der Strahlencoordinaten 145, 151 f. — zwischen den Gleichungen von drei Paaren in Involution 255, von $k+2$ Elementen im linearen Gebilde k^{ter} Stufe 229. Relationen, Plücker's und Cayley's zwischen den Anzahlen der Singularitäten algebraischer Curven 390 f. — zwischen Wurzeln und Coefficienten einer Gleichung 380. Resultante von Gleichungen 162, 393. Rotationsflächen zweiten Grades aus congruent reciproken Bündeln 535. Rotationskegel, umgeschriebene der Flächen zweiten Grades 610. Rotationssymmetrie 577. Rückkehrtangenten 548. Rückkehrcurve der Developpabeln dritter Classe 541, 546 f.

Schaar von Curven, Flächen, Polarsystemen 217, 525. Schein und Schnitt 4, 73, 96, 481, 520, 525. Scheitel der Grundcurve im Flächenbüschel zweiten Grades 351, 451. Schliessungsprobleme und Sätze 296 f., 352 f. Schmiegungsebene 541, 546, 549, 554. Schnecke von Pascal 346 f. Schnitt von Curven, Ebenen, Flächen, Geraden 98, 135 f., 142, 155, 178, 180, 215, 263, 267, 299, 307, 363, 379 f., 386, 440, 516. Schnitt zweier Vierseite derselben Fläche zweiten Grades im Büschel auf der Grund-

curve 355. Schnitte, specielle, collinearer Bündel 545. Schönheit der bicircularen und circularen Curven 340. Schraubenlinie als Complexcurve 617, 621. Schraubung zwischen gleichsinnig congruenten Räumen 564. Singularitäten ebener Curven 233 f., 389 f., 401 f. Singuläre Projectivitäten 532 f., 544 f., 588 f. Singuläre Punkte und Ebenen der Complexe 198. Singuläre Curven oder Flächen in linearen Gebilden 394. Sinn, gleicher und entgegengesetzter 474 f., 562 f. Situationsaxe und -punkt 476. Spur der Developpabeln dritter Classe 541, 546 f., 548. Statik, graphische 618. Stellvertreter des imaginären Kegelschnittes 508. Strahlencoordinaten 146 f., 222 f. Strahlencoordinatengleichung der Fläche zweiten Grades 366, 454. Strahlenraum 6, 618. Strecke als imaginärer Punkt 44, 56. Streifen, windschief paraboloidischer als rein imaginäre Gerade 56. Substitution, lineare 246, 409 f., 432 f. Summe von Würfen 121. Supplementarkegel 527. Symbolgleichungen 256 f., 261, 264. Symmetrie 474 f., 523 f., 576 f., 578 — der Permutationsgruppen 131 — von Gleichungen 253, 256, 301, 307, 363. Systeme, beschränkte, von Gleichungen 180, 193 — von Elementenpaaren und Tripeln 200 f., 202.

Tangente 6 f., 302, 387, 546, 552, doppelte 7, 631 f. Tangenten, gemeinsame, von zwei Kegelschnitten 215, 440, 517 — conjugiert imaginäre 209 — der Grundcurve in einer Fläche zweiten Grades im Büschel 340, 456. Tangentenbüschel und Kegel 164, 178, 364. Tangentialebene 374, 388, 529 — doppelte 626 — dreifache 627, 629. Tetraeder, einander ein- und umgeschriebene 549. Theile der Ebene und des Raumes 81, 110 f. Theilverhältniss 238. Transformation, der Coordinaten 415 f., 420 f., 422 f., 429 — zweier Gleichungen zweiten Grades zur Normalform 442. Transformationen, birationale 640. Transversalen zu Geraden 156, 207, 222, 264. Transversalentheorie 78 f., 108 f. Trieder, perspectivische 16. Tripel harmonischer Pole 307, 514 — involutorisch entsprechender Elemente der Reciprocität 490 f. Trisekantenhyperboloid 268, 277.

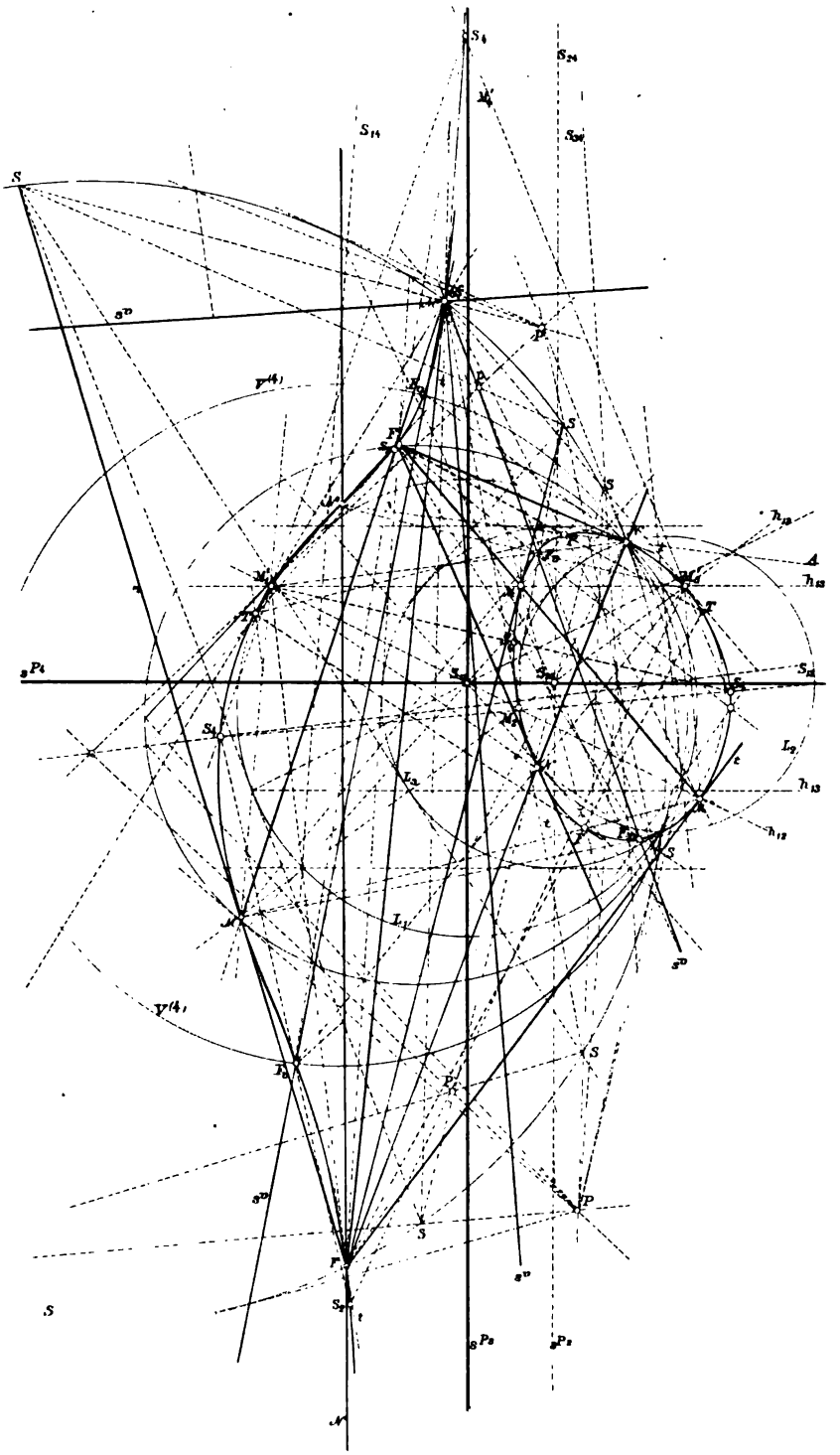
Ueberführung collinearer Ebenen und Bündel in perspectivische Lage 471 f., 484 — reciproker Ebenen, Bündel und Räume in involutorische Lage 499 f., 509 f., 579, 602. Uebergang von allgemeiner zu involutorischer Reciprocität 497, 594 — von Punkt- zu Ebenen- und Linien-Coordinaten 302, 309, 365 f., 389. Uebergänge im Flächenbüschel zweiten Grades 207 f. Umformung, collineare und reciproke 13. Umrisse confocaler Flächen 609, von Regelflächen 280. Unendlich ferne Elemente 89, 94, 116, 129, 151 f., 171 f., 248, 318, 339, 423, 425, 471 f., 473, 496, 499 f., 513, 534, 559, 572 f., 575, 578 f., 586, 597, 613, 616. Unterscheidung der beiden Elemente eines imaginär conjugierten Paares 40.

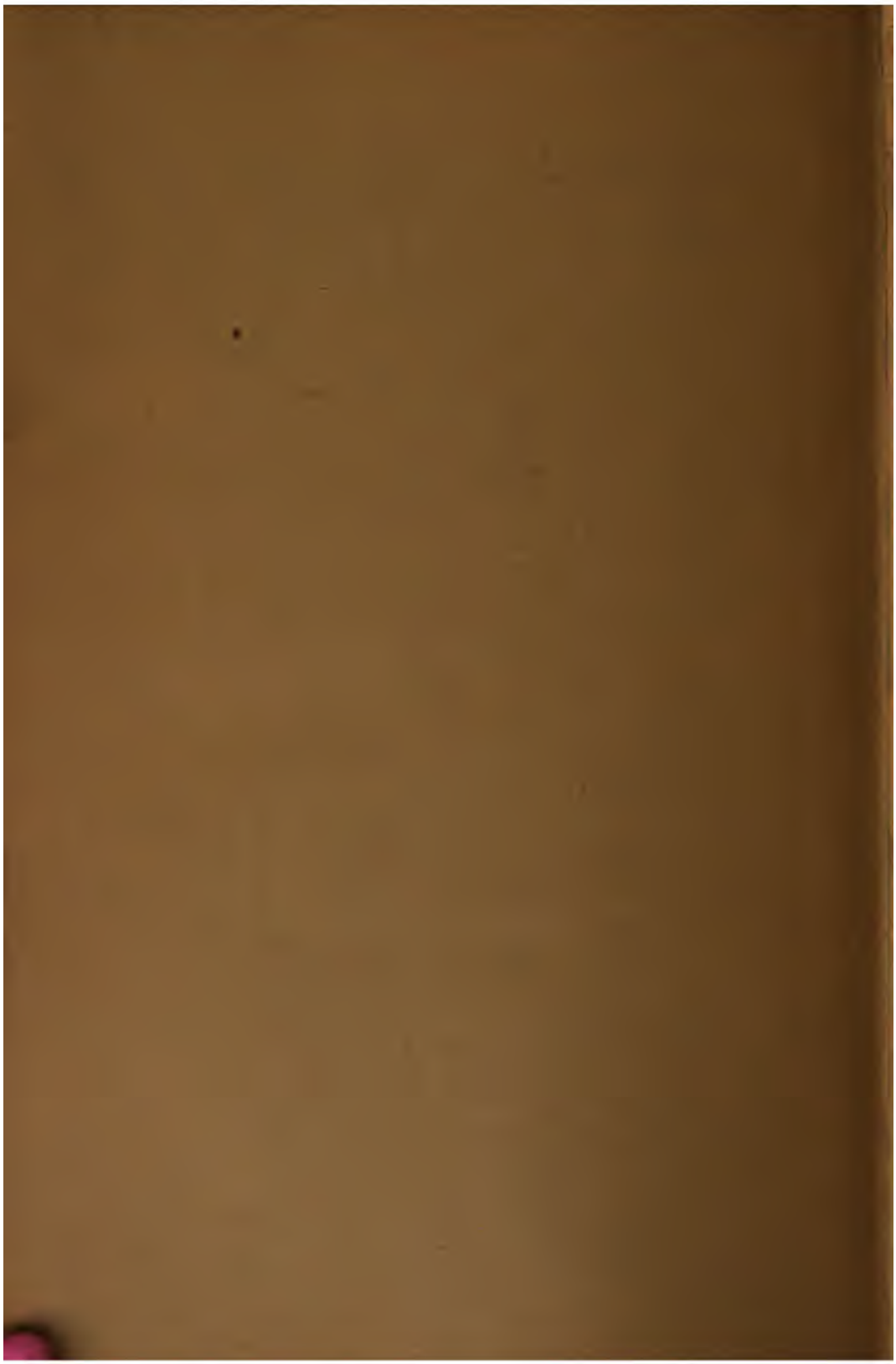
Verbindungsebene 155. Verbindungsgerade 96 f., 99, 142 f., 152. Vertauschbarkeit des projectivischen Entsprechens 31 f., 35, 242, 254 f., siehe Involution. Verwandtschaft der Harmonikalen 177, 189 f. — direct reciproker Coordinaten 170 f., 173 f., 185 f., 188 — doppelt conjugierter Elemente 478 f., 493 f., 514 f., 519 f., 592 f., 604, 606. Vielecke und Vielflache, entsprechende im Nullsystem 617. Vierecke und Vierseite, Vierflache und Vierkante 16 f., 19. Vierergruppen der Umrisskegelschnitte des Flächenbüschels zweiten Grades 343. Volumen des Tetraeders 134, 140 f., 154, 240, 437.

Winkel von Geraden und von Ebenen 93, 138 f., 252, 429 f. Winkelgleichheit 513. Winkelraum und Winkelstreifen als imaginäre Ebene und Gerade 44, 56. Wurf 30, neutraler 64. Würfe, gleichartige 31 f., perspectivische 67. Würfel, entsprechende 561. Wurzeln der binären

Gleichungen mit reellen Coefficienten 161 f., 203 f., 370, 436, 443, 470, 490, 558, 591.

Zahl der Coefficienten in der allgemeinen homogenen Gleichung n^{ten} Grades 211 — der Coefficienten in der Parametergleichung der Curven auf dem Hyperboloid 267 — der gemeinsamen Elemente von Curven resp. Flächen 181 — der imaginären Elemente 43, 59 f., 61 f. — der reellen Elemente 5 f., 8. Zuordnung der Elemente, eindeutige 5 f. — durch Curve dritter Ordnung und Developpable dritter Classe 549 — der Elementargebilde mit Curven dritter Ordnung, Developpabeln dritter Classe und ihren Congruenzen, resp. mit Flächen zweiten Grades 549 f., 555 f. — der Transversalen windschiefer F.-Geraden durch Harmonikalen 191 — durch die Congruenzen der F.-Geraden 196 — involutorische der doppelt projicierenden Kegel durch die Grundcurve des Flächenbüschels zweiten Grades 330 — projectivische durch Complex, Congruenz und Regelfläche 194 f., 248 — von Kegelschnitt- und Strahlbüschel durch die Curve dritter Ordnung 321, 327 — von Strahlbüschel und Büschel von rationalen Curven dritter Ordnung durch die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten 324, 326 f. Zusammengehörigkeit der Coordinaten 87, 91, 108, 122. Zusammenhang der acht Grundpunkte des Flächenbündels zweiten Grades 372 f., 630 — der neun Grundpunkte des Büschels von Curven dritter Ordnung 234 f., 320 f. — der Verwandtschaft der reciproken Coordinaten und der Harmonikalebenen 191. Zwischenformen 432.





This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.